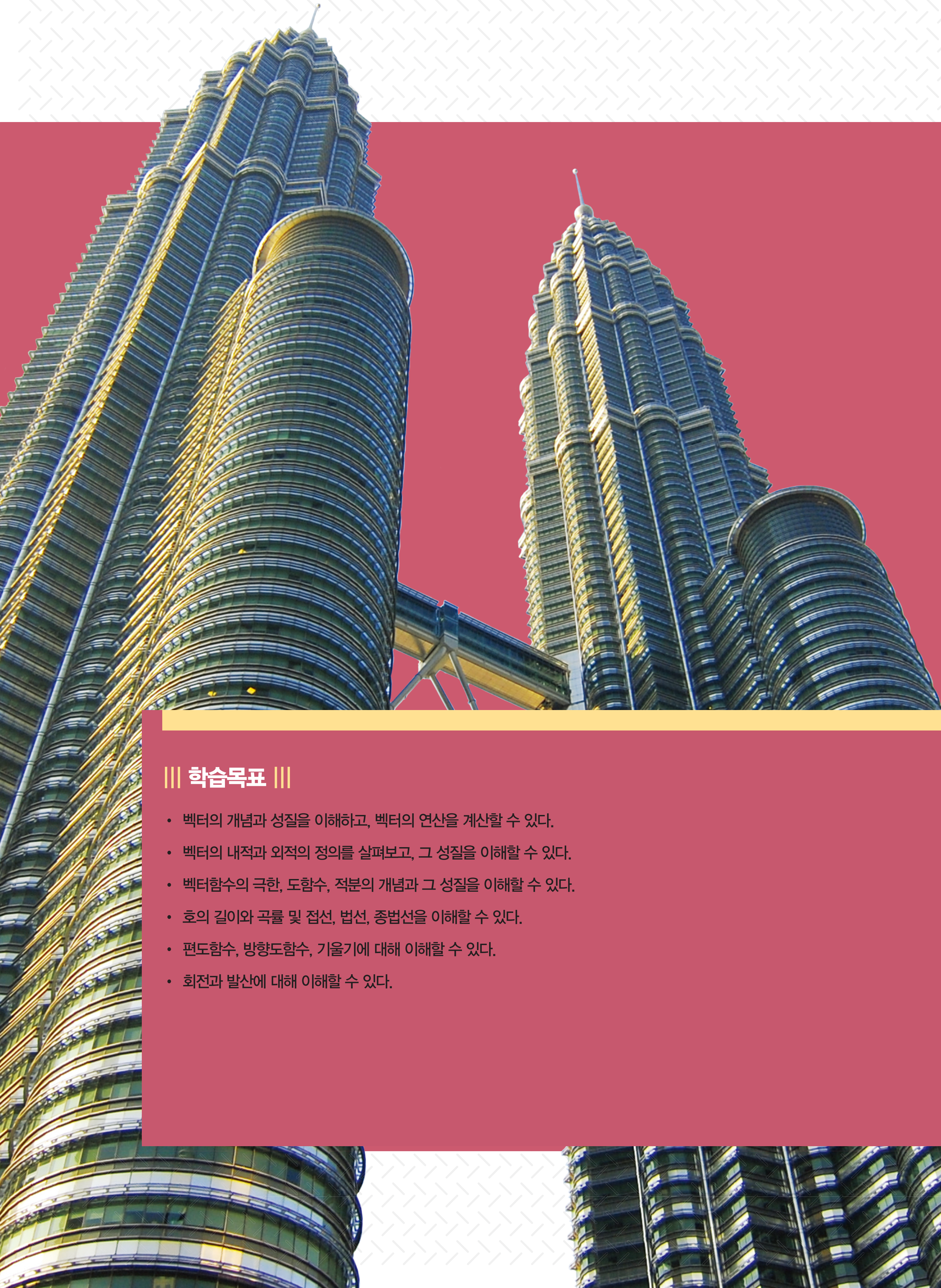


학습목표

- 벡터의 개념과 성질을 이해하고, 벡터의 연산을 계산할 수 있다.
- 벡터의 내적과 외적의 정의를 살펴보고, 그 성질을 이해할 수 있다.
- 벡터함수의 극한, 도함수, 적분의 개념과 그 성질을 이해할 수 있다.
- 호의 길이와 곡률 및 접선, 법선, 종법선을 이해할 수 있다.
- 편도함수, 방향도함수, 기울기에 대해 이해할 수 있다.
- 회전과 발산에 대해 이해할 수 있다.

Chapter 09

벡터미분

Vector Differential Calculus

실습실

동영상

||| 목차 |||

Section

9.1

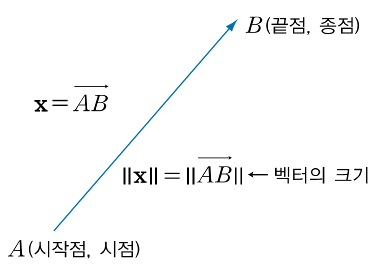
벡터의 성질과 연산

이 절에서는 스칼라와 벡터를 정의하고, 벡터의 덧셈과 스칼라배에 대해 정의한다. 또한 벡터 간 연산을 쉽게 만들어주는 벡터의 성분 표시에 대해 살펴본다.

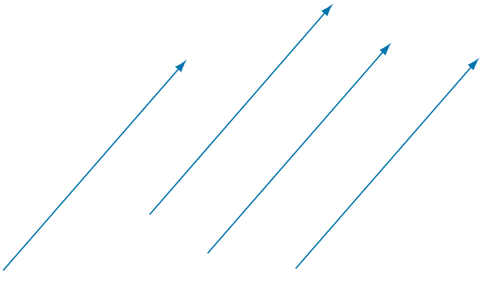
KEYWORDS 벡터, 스칼라, 벡터의 덧셈, 벡터의 스칼라배, 성분 표시

벡터

스칼라(scalar)는 길이, 넓이, 질량, 온도 등 크기만 갖는 양이다. **벡터**(vector)는 속도, 위치 이동, 힘 등 크기뿐만 아니라 방향까지 갖는 양이다. 따라서 벡터는 [그림 1]과 같이 방향이 있는 유향선분(directed line segment) 또는 화살표로 나타낸다.



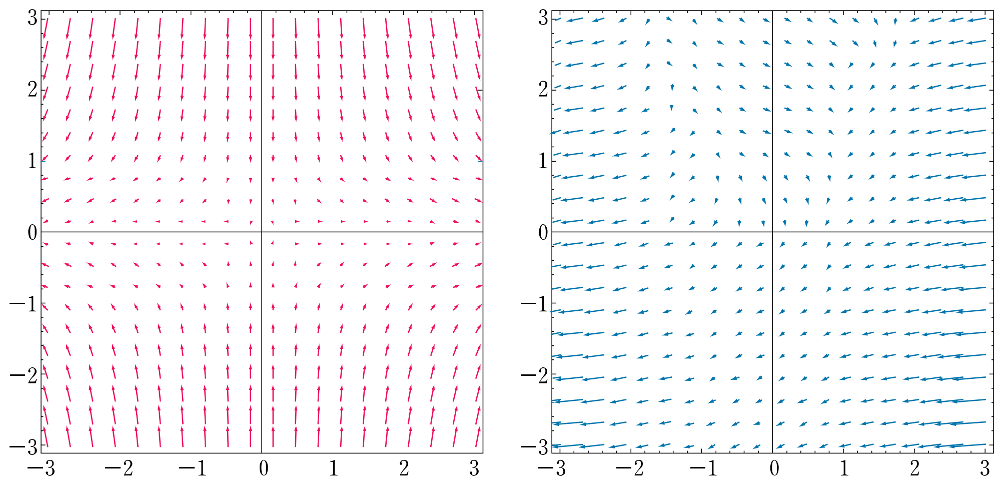
[그림 1] 벡터 표기



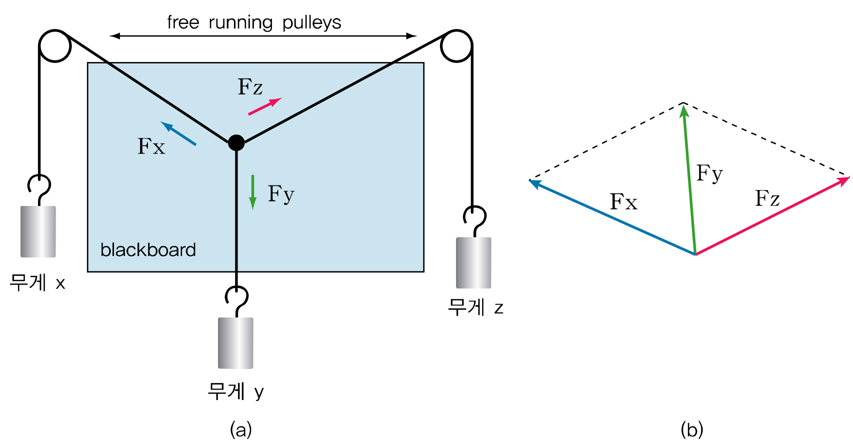
[그림 2] 벡터의 상등

벡터는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ 같이 알파벳 소문자 볼드체로 나타내거나 시작점(initial point)과 끝점(terminal point)으로 나타낸다. 예를 들어, [그림 1]에서 A가 시작점, B가 끝점일 때 벡터는 $\overrightarrow{AB}$로 나타낸다. 화살표의 길이는 벡터 $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$의 **크기**(magnitude) 또는 **노름**(norm)이라 하고, $\|\mathbf{x}\|$ 또는 $\|\overrightarrow{AB}\|$ 로 나타낸다. 이때 벡터의 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**(unit vector)라 하고, 시작점과 끝점이 같고 크기가 0인 벡터를 **영벡터**(zero vector)라고 한다(영벡터는 크기가 0이므로 방향이 없다). [그림 2]와 같이 방향과 크기가 같은 벡터들은 모두 같은(상등, equal) 벡터를 나타낸다.

벡터는 물리학에서 운동 법칙뿐만 아니라 속도, 가속도, 힘 등을 나타내는 데 유용하게 쓰인다. 예를 들어, [그림 3]과 같은 벡터들의 모임은 힘의 구성을 나타내고, 이는 전자기장과 같은 벡터들의 공간을 나타낼 때 효과적이다. [그림 4]는 물리에서 사용하는 벡터의 예로 도르래에 걸리는 힘의 배분을 보여준다.



[그림 3] 벡터들의 공간



[그림 4] 벡터의 사용 예(도르래에 걸리는 힘의 배분)

앞으로 특별한 언급이 없는 한 스칼라는 실수로 제한한다. k가 스칼라이면 $k \in \mathbb{R}$ 을 의미한다. 또한 벡터는 주로 3차원 공간인 $\mathbb{R}^3$에서 다루고, 2차원 공간 $\mathbb{R}^2$에서는 특수한 경우로 다루기로 한다.

벡터의 연산

이제 벡터의 연산에 대해 살펴보자. 벡터의 연산에는 덧셈과 스칼라배가 있다.

Section
9.3

외적

이 절에서는 두 벡터의 곱이 다시 벡터가 되는 외적을 정의하고, 그 성질에 대해 살펴본다.

KEYWORDS 외적, 면적, 스칼라 삼중적, 점과 직선 사이의 거리, 외적의 응용

외적

두 벡터의 외적(cross product 또는 outer product)은 $\mathbb{R}^3$에서만 정의되며, 외적의 결과도 역시 $\mathbb{R}^3$의 벡터가 된다.

정의 9.3.1 두 벡터의 외적

두 벡터 $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$와 $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$의 외적은 다음과 같다.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$$

예제 1 CAS

두 벡터 $\mathbf{a}=(3,\ -2,\ 1)$과 $\mathbf{b}=(4,\ 2,\ -3)$에 대해 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$를 구하라.

풀이

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}\mathbf{k}=(4,\ 13,\ 14)$$

CAS

Sage 코딩

```
a=vector([3, -2, 1]);b=vector([4, 2, -3])
ab=a.cross_product(b)
print "axb=", ab
```

실행(Evaluate)

```
axb= (4, 13, 14)
```

[정의 9.3.1]로부터 다음과 같은 외적의 성질을 쉽게 확인할 수 있다.

정리 9.3.2 외적의 성질 ①

$\mathbb{R}^3$의 0이 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$와 $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

(2) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0,\ \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$

(3) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$

증명 (1), (2)번 정리는 행렬식의 성질을 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

그러므로 외적은 교환법칙이 성립하지 않는다.

(2) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(a_1, a_2, a_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

$$=a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

그러므로 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$이 성립한다.

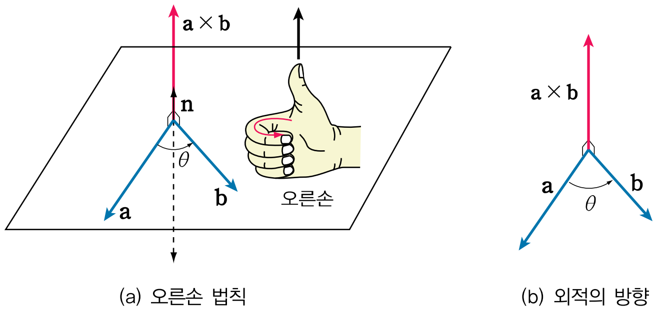
(3) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

■

이제 외적 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 의미를 자세히 살펴보자. 먼저 방향을 살펴보면, [정리 9.3.2]의 (2)에 의해 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 모두 수직이다. [그림 1] (a)에서 보듯이 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 생성하는 평면에 수직인 방향은 평면의 위 또는 아래 두 방향이다. 이 중 외적 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 방향은 오른손 법칙을 따른다. 즉 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{b}$ 방향으로 오른손을 감아쥐었을 때, 엄지손가락이 가리키는 방향이 된다.



[그림 1] 오른손 법칙과 외적의 방향

그리고 벡터 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 크기에 관해서는 다음의 정리가 성립한다.

정리 9.3.3 외적의 크기

$\mathbb{R}^3$의 0이 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적의 크기는 다음과 같다.

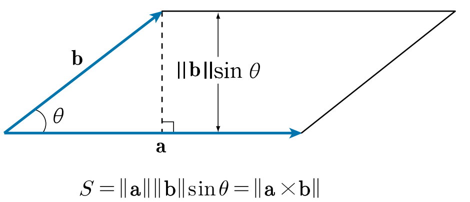
$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta$$

여기서 θ는 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각이다. $(0 \le \theta \le \pi)$

증명 [정리 9.3.2]의 (3)과 [정리 9.2.1]을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

그러므로 $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta$이다. 따라서 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적의 크기는 [그림 2]와 같이 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 면적 S와 같다. ■



[그림 2] 벡터의 외적과 평행사변형

[정의 9.3.1]과 [정리 9.3.3]으로부터 다음을 알 수 있다.

- 영이 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행이기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$이다.
- $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$
- 일반적으로 결합법칙은 성립하지 않는다. 즉 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$이다.

이 외에도 외적은 다음과 같은 성질을 만족한다.

정리 9.3.4 외적의 성질 ②

$\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$와 스칼라 α에 대해 다음이 성립한다.

(1) $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})$

(2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

(3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

(4) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

(5) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

스칼라 삼중적

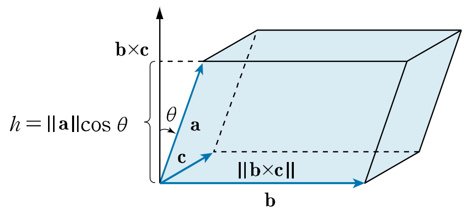
정의 9.3.5 스칼라 삼중적

$\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$에 대해

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

을 **스칼라 삼중적**(triple scalar product)이라 한다.

이때 [정리 9.3.4]에 의해 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$가 성립한다. [그림 3]과 같이 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$로 정의된 평행육면체를 살펴보자.



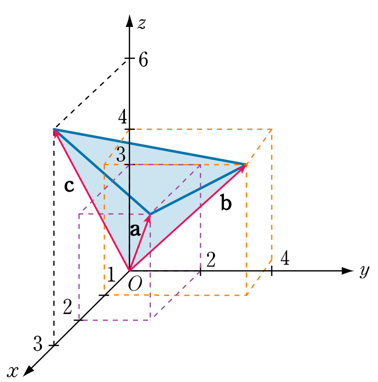
[그림 3] 평행육면체

밑면은 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$가 이루는 평행사변형이므로 면적은 $A=\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|$이고, θ를 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$가 이루는 각이라 하면 주어진 평행육면체의 높이는 $h=\|\mathbf{a}\||\cos\theta|$이다. 따라서 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$로 정의된 평행육면체의 부피는 $V=Ah=\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|\|\mathbf{a}\||\cos\theta|=|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$가 된다. 즉 스칼라 삼중적의 크기가 된다.

TIP 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 동일한 평면상에 있을 때는 평행육면체의 부피가 0이므로 스칼라 삼중적은 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$이다.

예제 2 CAS

[그림 4]와 같이 벡터 $\mathbf{a}=(2, 2, 3)$, $\mathbf{b}=(1, 4, 4)$, $\mathbf{c}=(3, 0, 6)$에 의해 형성되는 사면체의 부피를 구하라.



[그림 4] [예제 2]의 사면체

풀이 세 벡터에 의해 만들어지는 평행육면체의 부피는 스칼라 삼중적의 절댓값으로 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&4&4\\3&0&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&4\\0&6\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&4\\3&0\end{vmatrix}=48+12-36=24$$

따라서 평행육면체의 부피는 24이고, 사면체의 부피는 평행육면체 부피의 $\frac{1}{6}$이므로 4이다.

CAS

Sage 코딩

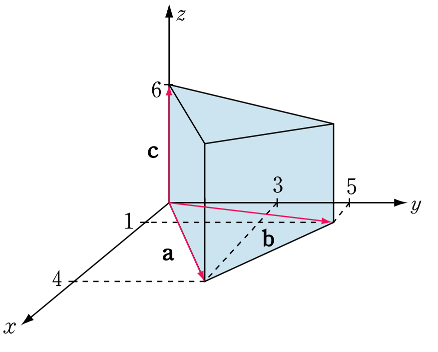
```
a=vector([2, 2, 3])
b=vector([1, 4, 4])
c=vector([3, 0, 6])
bc=b.cross_product(c)
scp=a.inner_product(bc) # 스칼라 삼중곱
V=1/6*abs(scp)          # 절댓값을 취하고, 사면체이므로 1/6을 곱해준다.
print "V=", V
```

실행(Evaluate)

```
V= 4
```

예제 3

[그림 5]와 같이 벡터 $\mathbf{a}=(4, 3, 0)$, $\mathbf{b}=(1, 5, 0)$, $\mathbf{c}=(0, 0, 6)$에 의해 만들어지는 삼각기둥의 부피를 구하라.



[그림 5] [예제 3]의 삼각기둥

풀이 벡터 $\mathbf{a}$와 벡터 $\mathbf{b}$가 이루는 삼각형을 밑면, 벡터 $\mathbf{c}$를 높이로 한다. 밑면의 넓이는 삼각형이므로 $\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$이고 높이는 $\|\mathbf{c}\|$이므로 삼각기둥의 부피는

$$V=\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|$$

로 구할 수 있다. 그러므로

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=17\mathbf{k}$$

에서 $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=17$ 이고 $\|\mathbf{c}\|=6$ 이므로, 삼각기둥의 부피는 $V=\dfrac{1}{2}\cdot 17\cdot 6=51$ 이다.

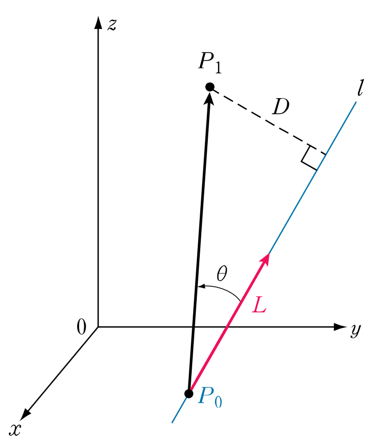
점과 직선 사이의 거리

벡터를 이용하여 점에서 직선까지의 거리를 구해보자.

정리 9.3.6 점과 직선 사이의 거리

직선 l 은 벡터 $\overrightarrow{L}$ 에 평행한 직선이고, l 위의 임의의 점을 P_0 라 하자. 이때 l 위에 없는 점을 P_1 이라 하자. 그러면 P_1 과 l 사이의 거리 D 는 다음과 같다.

$$D=\frac{\|\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|\overrightarrow{L}\|}$$



[그림 6] 점과 직선 사이의 거리

증명 $\overrightarrow{L}$ 과 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 이 이루는 사잇각을 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$ 라 하면 $D=\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\sin\theta$ 이다.

$\|\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\|=\|\overrightarrow{L}\|\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\sin\theta$ 일 때 $\dfrac{\|\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|\overrightarrow{L}\|}=\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\sin\theta$ 이므로

$D=\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\sin\theta=\dfrac{\|\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|\overrightarrow{L}\|}$ 이다. ■

Section
9.4

벡터함수와 도함수

이 절에서는 벡터함수를 정의하고, 일변수 함수의 극한과 연속의 개념을 확장하여 벡터함수의 극한과 연속을 알아본다. 그리고 벡터함수의 도함수와 역도함수를 살펴보고, 벡터함수의 부정적분과 정적분을 정의한 후 그 성질들에 대해 살펴본다.

KEYWORDS 벡터함수, 극한, 연속, 도함수, 부정적분, 정적분

벡터함수

벡터함수는 스칼라 또는 벡터를 새로운 벡터(주로 2차원 평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 내의 벡터)에 대응시키는 함수를 말한다. 먼저 스칼라를 평면상의 벡터로 대응시키는 함수 $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$은 다음과 같이 표현되며, t의 변화에 따라 $\mathbf{r}(t)$가 가리키는 벡터의 끝점은 평면상의 곡선을 이룬다.

$$\mathbf{r}(t) = (f(t),\ g(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (t \in D)$$

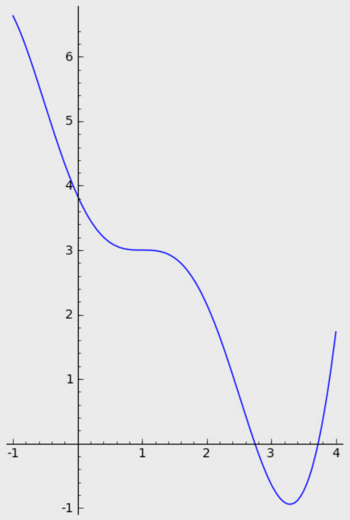
여기서 $f(t)$, $g(t)$는 $D \subset \mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로 정의된 함수로, $\mathbf{r}(t)$의 **성분함수**라 한다.

예를 들어, 벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \left(t+1,\ 3-t^2\sin t\right) = (t+1)\mathbf{i} + (3-t^2\sin t)\mathbf{j}$ $(-2 \le t \le 3)$의 그래프를 Sage로 그려보면 평면곡선이 나타난다.

Sage 코딩

```
var('t')
f(t)=t+1;g(t)=3-t^2*sin(t)
parametric_plot((f(t), g(t)), (t, -2, 3))
```

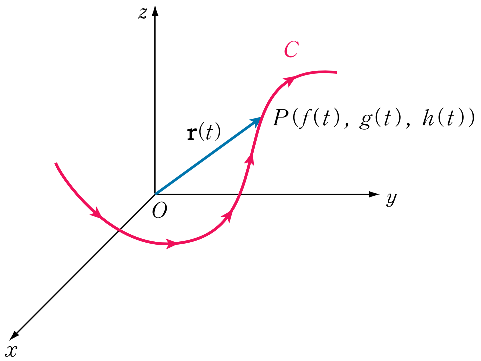
실행(Evaluate)



마찬가지로 스칼라를 공간상의 벡터로 대응시키는 함수 $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$는 다음과 같이 표현할 수 있으며, [그림 1]과 같이 공간곡선을 나타낸다.

$$\mathbf{r}(t) = (f(t),\ g(t),\ h(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (t \in D)$$

여기서 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$는 $D \subset \mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{R}$ 로 정의된 함수로, $\mathbf{r}(t)$의 성분함수라 한다.



[그림 1] 공간곡선

예제 1 CAS

벡터함수 $\mathbf{r}(t) = (\cos t,\ \ln(3-t),\ \sqrt{t-1})$의 성분함수와 정의역을 구하라. 또한 Sage를 이용하여 벡터함수의 그래프를 그려라.

예제 4 CAS

벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} + e^{-2t}\,\mathbf{j} + \cos^2 t\,\mathbf{k}$의 2계 도함수를 구하라.

풀이

먼저 1계 도함수를 구하면

$$\mathbf{r}'(t) = \sec^2 t\,\mathbf{i} - 2e^{-2t}\,\mathbf{j} - 2\cos t\sin t\,\mathbf{k} = \sec^2 t\,\mathbf{i} - 2e^{-2t}\,\mathbf{j} - \sin 2t\,\mathbf{k}$$

이므로, $\mathbf{r}(t)$의 2계 도함수는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}''(t) = 2\sec^2 t\tan t\,\mathbf{i} + 4e^{-2t}\,\mathbf{j} - 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

CAS

Sage 코딩

```
var('t')
f(t)=tan(t);g(t)=exp(-2*t);h(t)=cos(t)^2
r(t)=[f(t), g(t), h(t)]
print diff(r(t), t, 2)
```

실행(Evaluate)

```
(2*sin(t)/cos(t)^3, 4*e^(-2*t), -4*cos(t)^2 + 2)
```

벡터함수의 미분은 다음과 같은 성질을 만족한다.

정리 9.4.7 벡터함수의 미분의 성질

미분가능한 벡터함수 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 스칼라 c, 미분가능한 실함수 f에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(2) $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\,\mathbf{u}'(t)$

(3) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

(4) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

(5) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

(6) $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{u}\left(f(t)\right)\right] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (연쇄법칙)

예제 5

$\mathbf{r}(t)$가 $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ (c는 임의의 상수)를 만족하는 벡터함수일 때, $\mathbf{r}'(t)$와 $\mathbf{r}(t)$가 모든 t에 대해 직교함을 보여라.

풀이

$\|\mathbf{r}(t)\|^2 = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = c^2$ 의 양변을 미분하면

$$(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t))' = \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$$

이다. 따라서 $\mathbf{r}'(t)\perp\mathbf{r}(t)$임을 알 수 있다.

TIP [예제 5]에서 $\mathbf{r}(t)$는 중심이 원점인 구면 위에 있는 직선이다. 따라서 접선벡터는 항상 위치벡터에 수직이 된다.

예제 6 CAS

$\mathbf{u}(t) = \sin^{-1}t\,\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 에서 $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})'(t)$와 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'(t)$를 구하라.

풀이

$\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = \sin^{-1}t - 10t$ 에서 $\{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 10$이다.

$\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}(t) = -5t\ln t\,\mathbf{i} + (2\sin^{-1}t + 5t)\mathbf{j} + \sin^{-1}t\ln t\,\mathbf{k}$ 에서

$$\{\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\}' = -(5\ln t + 5)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + 5\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\sin^{-1}t}{t}\right)\mathbf{k}$$

이다.

CAS

Sage 코딩

```
var('t')
u=vector([arcsin(t), 0, 5*t])
v=vector([1, log(t), -2])
uv=u.inner_product(v)
uxv=u.cross_product(v)
print "u.v=", uv
print "(u.v)'=", diff(uv, t)
print "uxv=", uxv
print "(uxv)'=", diff(uxv, t)
```

실행(Evaluate)

```
u.v= -10*t + arcsin(t)
(u.v)'= 1/sqrt(-t^2 + 1) - 10
```

```
uxv= (-5*t*log(t), 5*t + 2*arcsin(t), log(t)*arcsin(t))
(uxv)'= (-5*log(t) - 5, 2/sqrt(-t^2 + 1) + 5, log(t)/sqrt(-t^2 + 1) + arcsin(t)/t)
```

벡터함수의 적분

두 벡터함수 $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{r}(t)$에 대해, 구간 I에서 $\mathbf{R}'(t)=\mathbf{r}(t)$를 만족하면 $\mathbf{R}(t)$를 $\mathbf{r}(t)$의 역도함수라 한다. 즉 $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$이고, F, G, H가 각각 f, g, h의 역도함수라면 $\mathbf{r}(t)$의 역도함수는 $\mathbf{R}(t)=F(t)\mathbf{i}+G(t)\mathbf{j}+H(t)\mathbf{k}$이다.

I에서 $\mathbf{r}(t)$의 모든 역도함수는 $\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$는 임의의 상수벡터)의 형태로 표현되므로 이를 I에서 $\mathbf{r}(t)$의 부정적분이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$$

정의 9.4.8 벡터함수의 부정적분

벡터함수 $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{R}(t)=F(t)\mathbf{i}+G(t)\mathbf{j}+H(t)\mathbf{k}$에 대해 $\mathbf{r}(t)$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$$

여기서 F, G, H는 각각 f, g, h의 역도함수이며, $\mathbf{C}$는 임의의 상수벡터이다.

TIP [정의 9.4.8]에서 F, G, H는 각각 f, g, h의 부정적분을 구해 얻을 수 있다.
즉 $\int \mathbf{r}(t)\,dt=\left(\int f(t)\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int g(t)\,dt\right)\mathbf{j}+\left(\int h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$이다.

예제 7 CAS

$\mathbf{r}(t)=\sec^2 t\,\mathbf{i}-2\cos t\,\mathbf{j}-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{k}$의 부정적분을 구하라.

풀이

벡터함수의 부정적분은 각 성분함수의 부정적분을 통해 구할 수 있다. 즉 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt&=\left(\int \sec^2 t\,dt\right)\mathbf{i}-\left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{j}-\left(\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)\mathbf{k}\\&=\tan t\,\mathbf{i}-2\sin t\,\mathbf{j}-\sin^{-1} t\,\mathbf{k}+\mathbf{C}\quad(\mathbf{C}\text{는 적분상수벡터})\end{aligned}$$

CAS

Sage 코딩

```
var('t')
f(t)=sec(t)^2;g(t)=-2*cos(t);h(t)=-1/sqrt(9-t^2)
r(t)=[f(t), g(t), h(t)]
print integral(r(t), t)
```

실행(Evaluate)

```
(tan(t), -2*sin(t), -arcsin(t))
```

벡터함수의 정적분은 각 성분함수에 미적분의 기본 정리를 적용하여 계산할 수 있다.

정의 9.4.9 벡터함수의 정적분

벡터함수 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$가 $[a, b]$에서 적분가능하면(즉, 역도함수를 가지면), a에서 b까지 $\mathbf{r}(t)$의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

일변수함수의 경우와 마찬가지로 연속인 벡터함수에 대해서도 미적분의 기본 정리를 적용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = [\mathbf{R}(t)]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

여기서 $\mathbf{R}$은 $\mathbf{r}$의 역도함수, 즉 $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$이다.

예제 8 CAS

$\mathbf{r}(t) = \sec^2 t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{k}$일 때 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathbf{r}(t)\,dt$를 구하라.

풀이 [예제 7]에 의해 $\int \mathbf{r}(t)dt = \tan t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j} - \sin^{-1} t\,\mathbf{k} + C$이므로 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\tan t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j} - \sin^{-1} t\,\mathbf{k}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{i} - \sqrt{2}\,\mathbf{j} - \sin^{-1}\frac{\pi}{4}\mathbf{k}$$

CAS

Sage 코딩

```
var('t')
f(t)=sec(t)^2;g(t)=-2*cos(t);h(t)=-1/sqrt(1-t^2)
r(t)=[f(t), g(t), h(t)]
print integral(r(t), t, 0, pi/4)
```

실행(Evaluate)

```
(1, -sqrt(2), -arcsin(1/4*pi))
```

벡터함수의 적분은 다음과 같은 성질을 만족한다.

정리 9.4.10 벡터함수의 적분의 성질

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$가 $[a, b]$에서 연속인 벡터함수이고, c가 스칼라일 때 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int_a^b c\mathbf{r}_1(t)dt = c\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$

(2) $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t)dt$

(3) $\displaystyle\left|\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt\right| \le \int_a^b |r_1(t)|dt$

Section 9.7

회전과 발산

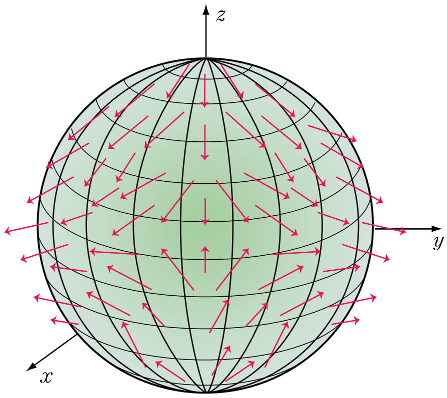
이 절에서는 벡터를 벡터로 보내는 함수인 벡터장과 벡터미분에서 중요한 개념인 회전(curl)과 발산(divergence)에 대해 살펴본다.

KEYWORDS 벡터장, 회전, 발산

벡터장

벡터장(vector field)은 $\mathbb{R}^3$에서 $\mathbb{R}^3$로의 함수 $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이다.

이때 함수 $\mathbf{F}$의 그래프는 [그림 1]과 같이 3차원 영역의 각 점에서 뻗어나오는 3차원 벡터로 나타낼 수 있다.



[그림 1] 벡터장

특히 스칼라함수 $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 의 기울기로 정의되는 벡터장

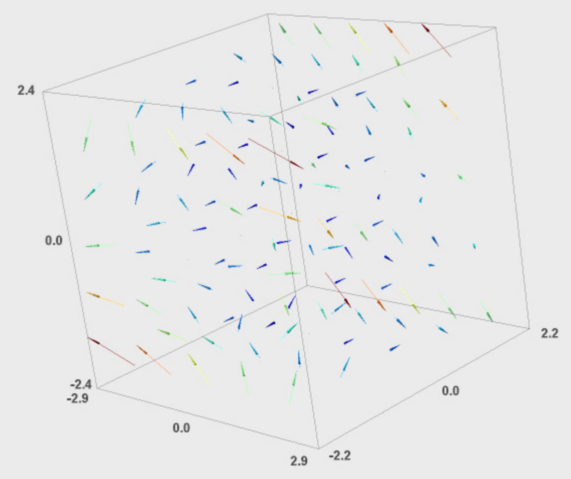
$$\mathbf{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

는 **그래디언트장**(gradient field)이라 한다. $\mathbf{F}$가 **보존장**(conservative field)이라 함은 어떤 스칼라함수 f의 기울기가 되는 것을 말한다. 즉 $\mathbf{F} = \nabla f$이다.

Sage 코딩

```
var ('x y z')
G=vector([-y*(z+x), x, y*z])                              # 벡터함수
plot_vector_field3d(G, (x,-2,2), (y,-2, 2), (z,-2,2))  # 벡터장 그리기
```

실행(Evaluate)



회전

함수 $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$가 미분가능한 벡터장이라 하자. 그러면 회전(curl)은 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$라 할 때 다음과 같이 정의된다.

$$\text{curl }\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

TIP 물리학적으로 $\mathbf{F}$가 유체의 속도 벡터장이면 curl $\mathbf{F}$는 그 유체가 가장 빨리 회전하는 축의 방향을 제시해주며, 그 크기는 회전의 속력을 나타낸다. curl $\mathbf{F}=\mathbf{0}$인 벡터장 $\mathbf{F}$를 **회전하지 않는**(irrotational) **벡터장**이라 한다.

회전에 대해서는 다음 정리가 성립한다.

정리 9.7.1 회전의 성질

$\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$와 $\mathbf{G}=G_1\mathbf{i}+G_2\mathbf{j}+G_3\mathbf{k}$가 각각 미분가능한 벡터장이라 하자. $f(x, y, z)$가 연속인 편도함수를 가지면 다음이 성립한다.

(1) $\text{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\text{curl }\mathbf{F}+\text{curl }\mathbf{G}$

(2) $\text{curl}(f\mathbf{F})=f\ \text{curl }\mathbf{F}+(\nabla f)\times\mathbf{F}$

다음의 정리는 그래디언트장의 회전이 $\mathbf{0}$임을 말해준다.

정리 9.7.2 보존장의 회전 ①

$\mathbf{F}$가 연속인 2계 편도함수를 갖는 미분가능한 벡터장이라 할 때, 만일 $\mathbf{F}$가 보존장이면 $\text{curl}\ \mathbf{F} = 0$이다.

증명 $\mathbf{F}$가 보존장이므로 적당한 함수 f가 존재하여 $\mathbf{F} = \nabla f$가 성립한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\text{curl}\ \mathbf{F} = \text{curl}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0 \quad ■$$

다음과 같이 [정리 9.7.2]의 역도 성립한다.

정리 9.7.3 보존장의 회전 ②

$\mathbf{F}$가 연속인 편도함수를 갖는 미분가능한 벡터장이라고 할 때, 만일 $\text{curl}\ \mathbf{F} = 0$이면 $\mathbf{F}$는 보존장이다.

예제 1 CAS

벡터장 $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} - 3xz^2\mathbf{k}$의 회전을 구하라.

풀이 회전의 정의에 따라 계산하면 다음과 같다.

$$\text{curl}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2yz & -3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2yz) \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2) \right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right)\mathbf{k} = -2y\,\mathbf{i} + 3z^2\,\mathbf{j} - 2xy\,\mathbf{k}$$

CAS ① 회전을 계산하는 함수 만들기

Sage 코딩

```
var ('x y z')
def curl(F):                                  # curl 함수를 정의
    assert(len(F) == 3)                       # 3차원 벡터인지 확인
```

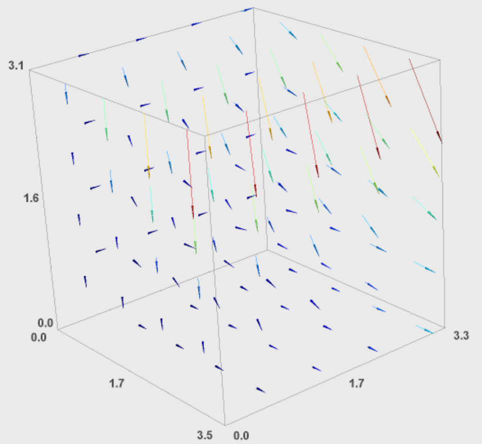
```
    return vector([diff(F[2], y) - diff(F[1], z), diff(F[0], z) - diff(F[2],
x), diff(F[1], x) - diff(F[0], y)])
```

② 벡터장 그림 그리기

Sage 코딩

```
F=vector([x*y^2, 2*y*z, -3*x*z^2])                    # 벡터장 입력
plot_vector_field3d(F, (x,0,pi), (y,0,pi), (z,0,pi)) # 벡터장 그리기
```

실행(Evaluate)



③ 회전 구하기

Sage 코딩

```
print "curl(F)=", curl(F)
```

실행(Evaluate)

```
curl(F)= (-2*y, 3*z^2, -2*x*y)
```

발산

함수 $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$가 미분가능한 벡터장이라 하자. $\mathbf{F}$ 의 **발산**(divergence)은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{div }\ \mathbf{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

Chapter 09 연습문제 | 답

문제 풀이에 도움이 되는 Sage 코드를 제공합니다. http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap9.html#exercise

[9.1 벡터의 성질과 연산]

CAS 1 $\mathbf{a}=(4,\ -1,\ -3)$, $\mathbf{b}=(-1,\ 3,\ 5)$에 대해 $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$, $2\mathbf{a}+5\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}-2\mathbf{b}\|$를 계산하라.

[9.2 내적]

CAS 1 두 벡터 $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ 사이의 각을 구하라.

CAS 2 두 벡터 $(t,\ 1,-4)$와 $(3t,-2t,\ t)$가 수직이 되는 t를 구하라.

CAS 3 벡터 $\mathbf{a}=(-3,\ 0,\ 4)$ 위로의 벡터 $\mathbf{b}=(-4,\ 3,-2)$의 정사영, $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$를 구하라.

4 코시-슈바르츠 부등식 $\|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$를 증명하라.

5 삼각부등식 $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$를 증명하라.

CAS 6 점 $(2,\ -5,\ 1)$을 지나고 벡터 $(0,\ 1,\ -1)$에 평행한 직선의 방정식을 구하라.

7 점 $(2,\ 1,\ -3)$을 지나고 평면 $2x-5y-2z=3$에 수직인 직선을 구하라.

CAS 8 두 점 $(3,\ 5,\ -1)$, $(-1,\ 2,\ 5)$을 지나는 직선의 방정식을 구하라.

CAS 9 점 $(5,\ 2,\ -3)$을 지나고 벡터 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$와 $3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$에 수직인 직선의 방정식을 구하라.

10-11 평면의 방정식을 구하라.

10 점 $(-2,\ 3,\ 6)$을 지나고 벡터 $(1,\ -1,\ 5)$에 수직인 평면

11 점 $(0,\ 3,\ -1)$을 지나고 법선벡터가 $\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$인 평면

[9.3 외적]

1-2 두 벡터의 외적을 구하라.

CAS 1 $\mathbf{a}=(4,\ -5,\ 1)$, $\mathbf{b}=(2,\ 7,\ -3)$

2 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$

3 $\mathbf{a}=(2,\ 1,\ -2)$, $\mathbf{b}=(3,\ -3,\ -1)$에 대해 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$와 $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$를 구하라.

CAS 4 두 벡터 $(5,\ -4,\ 2)$와 $(3,\ 7,\ 1)$에 모두 수직인 단위벡터 두 개를 구하라.

CAS 5 네 점 $A(3,\ 1)$, $B(4,\ 4)$, $C(5,\ 1)$, $D(4,\ -2)$를 꼭지점으로 하는 평행사변형의 면적을 구하라.

CAS 6 세 점 $P(1,2,-4)$, $Q(5,3,-1)$, $R(0,-3,1)$을 지나는 평면에 수직인 벡터를 찾아라.

7-8 주어진 네 점 P, Q, R, S에 대해 이웃하는 세 변 PQ, PR, PS가 이루는 평행육면체의 부피를 구하라.

CAS 7 $P(2,\ 0,\ -1)$, $Q(4,\ 2,\ 3)$, $R(5,\ 1,\ -1)$, $S(1,\ 1,\ 2)$

8 $P(0,\ 1,\ -5)$, $Q(1,\ -3,\ 4)$, $R(7,\ 0,\ -2)$, $S(0,\ 2,\ 3)$

9 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$에 대해 $\|\mathbf{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 일 때, 다음 관계식을 보여라.

(a) $\nabla|\mathbf{r}|=\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ (b) $\operatorname{curl}\mathbf{r}=0$

(c) $\nabla\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}\right)=-\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$ (d) $\nabla(\ln|\mathbf{r}|)=\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$

답

[9.1 벡터의 성질과 연산]

1 $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $(3, 13, 19)$, $\sqrt{254}$

[9.2 내적]

1 67.8°
2 0, 2
3 $\dfrac{4}{5}$, $\left(-\dfrac{12}{25}, 0, \dfrac{16}{25}\right)$
4 생략
5 생략
6 연습문제 실습실을 참고하세요.
7 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+3}{-2}$
8 연습문제 실습실을 참고하세요.
9 연습문제 실습실을 참고하세요.
10 $x-y+5z=25$
11 $x+y-3z=6$

[9.3 외적]

1 연습문제 실습실을 참고하세요.
2 $-11\mathbf{i}+23\mathbf{j}-8\mathbf{k}$
3 $(-7, -4, -9)$, $(7, 4, 9)$
4 연습문제 실습실을 참고하세요.
5 6
6 $(20, -23, -19)$
7 4
8 276
9 연습문제 실습실을 참고하세요.
10 $\dfrac{7\sqrt{17}}{5}$
11 생략
12 연습문제 실습실을 참고하세요.

[9.4 벡터함수와 도함수]

1 $-4\le t\le\dfrac{3}{2}$
2 $-2<t<2$ $(t\ne 1)$
3 연습문제 실습실을 참고하세요.
4 $-\dfrac{1}{3}\mathbf{i}+\sqrt{11}\,\mathbf{j}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\tan 2}{\cos 2}\mathbf{k}$
5 연습문제 실습실을 참고하세요.
6 연습문제 실습실을 참고하세요.
7 생략
8 $\mathbf{r}'(t)=\langle \sec^2 t, -2\sin 2t, 2\cos 2t\rangle$
9 $\mathbf{r}'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{i}+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{k}$
10 $\mathbf{r}'(t)=(2at\cos 2t+a\sin 2t)\mathbf{i}$
$-3b\cos^2 t\sin t\mathbf{j}+3c\sin^2 t\cos t\mathbf{k}$
11 $\dfrac{1}{3}\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$
12 $\ln(5/4)\mathbf{i}+\dfrac{\tan^{-1}(1/2)}{2}\mathbf{j}$
13 생략
14 연습문제 실습실을 참고하세요.
15 $\mathbf{v}(t)=(-3\sin t, 0, 3\cos t)$,
$\mathbf{a}(t)=(-3\cos t, 0, -3\sin t)$, $\mathbf{s}(t)=3$
16 $\mathbf{v}(t)=2t\,\mathbf{i}-\dfrac{1}{t}\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t)=2\mathbf{i}+\dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$,
$\mathbf{s}(t)=\sqrt{4t^2+4+\dfrac{1}{t^2}}$
17 $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=(2t\cos t+2\sin t)\,\mathbf{i}$
$+(-2t\sin t+2\cos t)\,\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=(-2t\sin t+4\cos t)\,\mathbf{i}$
$+(-2t\cos t-4\sin t)\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{s}(t)=\|\mathbf{v}(t)\|$
$=\sqrt{(2t\cos t+2\sin t)^2+(-2t\sin t+2\cos t)^2+(4t)^2}$
$=\sqrt{20t^2+4}=2\sqrt{5t^2+1}$

18 $\mathrm{v}(t)=\mathrm{i}+\mathrm{j}-2t\,\mathrm{k}$, $\mathrm{r}(t)=t\,\mathrm{i}+t\,\mathrm{j}-t^2\,\mathrm{k}$

19 $\mathrm{v}(t)=\mathrm{i}+\mathrm{j}-(1-3t)\mathrm{k}$,
$\mathrm{r}(t)=(t+2)\mathrm{i}+(t+2)\mathrm{j}-(t-3t^2/2)\mathrm{k}$

【9.5 호의 길이와 곡률】

1 $8\sqrt{5}$

2 `3/2*sqrt(14) + 5/2*arcsinh(3/5*sqrt(5))`

3 연습문제 실습실을 참고하세요.

4 연습문제 실습실을 참고하세요.

5 연습문제 실습실을 참고하세요.

6 $\mathrm{T}(t)=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\sin t,\ \dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos t,\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$,
$\mathrm{N}(t)=(-\cos t, -\sin t, 0)$, $\kappa=\dfrac{3}{13}$

7 연습문제 실습실을 참고하세요.

8 $\kappa(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

9 $\kappa(1)=\dfrac{4\sqrt{2501}}{1681}$

10 연습문제 실습실을 참고하세요.

11 연습문제 실습실을 참고하세요.

【9.6 편도함수, 방향도함수, 기울기】

1 $f_x(x,y)=\dfrac{3x^2y+y^3}{x^2+y^2}-\dfrac{2(x^3y+xy^3)x}{(x^2+y^2)^2}$,
$f_x(x,y)=\dfrac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2(x^3y+xy^3)y}{(x^2+y^2)^2}$

2 생략

3 생략

4 $e^{s+t}(s-t-1)$, $e^{(s+t)}(s-t)$

5 $-\dfrac{z+x}{2z+y}$, $-\dfrac{2x-y}{2z+y}$

6 $-5\sqrt{2}$

7 $\dfrac{26}{\sqrt{13}}$

8 $-\dfrac{1}{3}\pi\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}\mathrm{j}$

9 $\nabla f(x, y, z)=e^{xyz}((yz+2x+z)yz+2,$
$(yz+2x+z)xz+z,$
$(yz+2x+z)xy+(y+1))$

【9.7 회전과 발산】

1 $-x^2\mathrm{i}+2xy(z+1)\mathrm{j}-xz^2\mathrm{k}$, yz^2

2 $(xz^2-x^2y^2,\ x^2y-yz^2,\ 2xy^2z-x^2z)$,
$4xyz+2x^2yz$

3 $(0, 0, 0)$, $2z$

4 $(e^z, 0, e^y)$, xe^y+ye^z

5 $(0, 0, 0)$, $\dfrac{12}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

6 $\left(2y\tan^{-1}(x/z)-e^{xy}\cos z,\ \dfrac{-y^2z}{x^2+z^2},\ ye^{xy}\sin z\right)$,
$\dfrac{x(e^{xy}z^2\sin z+e^{xy}x^2\sin z-y^2)}{x^2+z^2}$

7 $\left(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{2yz+xz+xy}{xyz}$

8 $(xze^{xyz}, -yze^{xyz}, -e^{xy}(x-y))$,
$ye^{xy}+xe^{xy}+xye^{xyz}$

9 생략

■