Chapter

02

행렬

Matrix

학습목표

- 행렬의 정의와 행렬 연산의 성질을 이해할 수 있다.
- 정사각행렬의 역행렬을 이해하고, 역행렬을 구할 수 있다.
- 특별한 행렬을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.
- 행렬을 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

이 장에서는 자연과학과 사회과학에서 나타나는 다양한 문제들을 해결하기 위한 수학적 모델링으로 행렬과 행렬 연산의 성질을 다룬다. 행렬의 개념은 수학, 과학, 공학뿐만 아니라 사회과학과 인문과학 등 모든 분야에 중요한 도구로 사용되고 있다. 특히 동양의 고전 수학책인 『구장산술』에는 여러 연립방정식 문제가 있는데, 이는 대부분 오늘날 행렬이라고 부르는 수학적 도구를 활용하여 해를 구하고 있다. 이미 1장에서 학습한 연립방정식의 첨가행렬과 더불어 행렬에 대한 기본적인 연산을 바탕으로 행렬 연산의 성질과 역행렬 그리고 특별한 행렬을 소개한다.

2.1 행렬과 행렬 연산

이 절에서는 행렬을 정의하고 행렬의 기본적인 연산인 행렬의 상등, 덧셈, 스칼라 배, 대각합, 그리고 전치에 대해 알아본다.

2.1.1 행렬의 정의

자연수 m, n에 대해 $m\times n$개의 실수 a_{11}, a_{12}, a_{13}, $\cdots$, $a_{m(n-1)}$, a_{mn}을 다음과 같이 직사각형 모양으로 배열한 것을 **행렬**matrix이라고 한다.[1]

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

행렬 A의 i번째 가로줄

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (1\le i\le m) \tag{2.2}$$

을 A의 i **행**ith row of A 또는 i번째 **행벡터**row vector라 한다. 또 j번째 세로줄

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (1\le j\le n) \tag{2.3}$$

을 A의 j **열**jth column of A 또는 j번째 **열벡터**column vector라고 한다. 또 m개의 행과 n개의 열을 갖는 행렬 A를 **크기**size가 $m\times n$인 행렬이라 하고, 'm by n 행렬' 또는 'm by n matrix'라고 읽는다. 특히 행렬 A의 행의 개수와 열의 개수가 같을 때, 즉 $m=n$일 때 행렬 A를 n차 **정사각행렬**square matrix이라고 한다. 행렬 A의 i행과 j열이 겹쳐지는 부분에 있는 a_{ij}를 행렬 A의 $(i,\ j)$ **성분**entry이라고 한다.[2]

n차 정사각행렬 A의 성분 중에서 행과 열의 번호가 같은 성분 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}을 **주대각선 성분**main diagonal entries이라고 한다. 행렬을 나타낸 식 (2.1)은 $(i,\ j)$ 성분으로 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

1 1장에서 다룬 연립방정식의 첨가행렬도 행렬이다.

2 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분

a_{ij}

행 번호 ← → 열 번호

3 일반적으로 주대각선 성분을 a_{ii}로 나타내고, 행렬을 나타내는 괄호는 대괄호 [ ] 뿐만 아니라 소괄호 ( )를 사용하기도 한다. 그러나 중괄호 { }를 사용하지는 않는다.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{또는} \quad A=[a_{ij}]$$ [3]

여러 가지 행렬 중에서 **영행렬**zero matrix은 모든 성분이 영인 행렬로 O 또는 0으로 나타내고, $n\times n$ **단위행렬**Identity matrix I_n은 주대각선 성분이 모두 1이고 나머지 다른 성분은 모두 0인 행렬이다. 다음 행렬들을 살펴보자.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E=[5], \quad F=[1 \quad -2 \quad 3]$$

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A는 2×3 행렬이고, $a_{13}=-1$, $a_{22}=3$이다. 또한 B는 2×2 행렬이고, $b_{11}=1$, $b_{22}=-3$이다. C, D, E, F는 각각 3×1, 3×3, 1×1, 1×3 행렬이다. D의 주대각선 성분은 각각 1, 0, 2이다. 특히 B와 D는 행의 개수와 열의 개수가 같으므로 정사각행렬이고, E와 같은 1×1 행렬은 흔히 $E=[5]=5$로 쓴다. 또 O은 2×3 영행렬이고, I_3은 3×3 단위행렬이다.

예제 2-1

행렬 A에 대해 다음 물음에 답하라.

$$A=\begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 \\ -2 & 11 & -3 \\ 31 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) 행렬 A의 크기를 구하라.
(b) 행렬 A의 (2, 3) 성분을 구하라.
(c) 행렬 A의 주대각선 성분을 모두 구하라.
(d) 행렬 A의 3번째 행벡터를 구하라.
(e) 행렬 A의 1번째 열벡터를 구하라.

풀이

(a) 행렬 A의 행의 수 3, 열의 수 3이므로 크기는 3×3이다.
(b) 행렬 A의 (2, 3) 성분은 2행 3열의 성분이므로 -3이다.
(c) 행렬 A의 주대각선 성분은 10, 11, 8이다.
(d) 행렬 A의 3번째 행벡터는 $[31 \quad 3 \quad 8]$이다.

(e) 행렬 A의 1번째 열벡터는 $\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 31 \end{bmatrix}$이다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[10 -3 5;-2 11 -3;31 3 8];        % 행렬 A 입력
>> size(A) 1                          % 행렬 A의 크기 계산
>> A(2,3) 2                           % 행렬 A의 2행 3열 성분 계산
>> diag(A) 3                          % 행렬 A의 주대각선 성분 계산
>> A(3,:) 4                           % 행렬 A의 3번째 행벡터 계산
>> A(:,1) 5                           % 행렬 A의 1번째 열벡터 계산
```

: 결과

```
ans =                                 % [예제 2-1(a)]의 결과와 동일
      3    3
ans =                                 % [예제 2-1(b)]의 결과와 동일
     -3
ans =                                 % [예제 2-1(c)]의 결과와 동일
     10
     11
      8
ans =                                 % [예제 2-1(d)]의 결과와 동일
     31    3    8
ans =                                 % [예제 2-1(e)]의 결과와 동일
     10
     -2
     31
```

MATLAB TIP!

1 size(A) : 행렬의 크기를 구한다.

2 A(m,n) : 행렬 A의 m행 n열 원소를 구한다.

3 diag(A) : 주대각선 성분을 구한다.

4 A(m,:) : m번째 행벡터를 구한다.

5 A(:,n) : n번째 열벡터를 구한다.

유제

MATLAB을 사용하여 행렬 A에 대해 다음 물음에 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 15 \\ 20 & 0 & -23 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) 행렬 A의 크기를 구하라.

(b) 행렬 A의 (3, 1) 성분을 구하라.

(c) 행렬 A의 주대각선 성분을 모두 구하라.

(d) 행렬 A의 2번째 행벡터를 구하라.

(e) 행렬 A의 3번째 열벡터를 구하라.

2.1.2 행렬 연산

두 다항식 $3a-5b$와 $-a-3b$를 더하거나 뺄 때, 다음과 같이 동류항끼리 계산한다.

$$(3a-5b)+(-a-3b)=(3-1)a+(-5-3)b=2a-8b$$
$$(3a-5b)-(-a-3b)=(3+1)a+(-5+3)b=4a-2b$$

행렬도 다항식과 마찬가지로 크기가 같은 행렬끼리 더하거나 뺄 수 있다.

먼저 행렬 연산 중 행렬이 서로 같다는 의미인 **상등**equality에 대해 알아보자. 크기가 같은 두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$가 모든 i, j에 대해 $a_{ij}=b_{ij}$를 만족할 때 두 행렬은 서로 **같다**equal고 하고, $A=B$로 나타낸다.[4]

4 두 행렬의 크기가 같을 때에만 행렬의 상등을 논할 수 있다.

예를 들어 다음과 같은 행렬 A, B, C가 있다고 하자.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & w\\ 2 & x & 4\\ y & -4 & z\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

이때 $A=B$라면 다음이 성립한다.

$$w=-1,\quad x=-3,\quad y=0,\quad z=5$$

한편 A와 C, B와 C는 크기가 서로 다르므로 상등을 논할 수 없다.

예제 2-2

다음 두 행렬 A, B가 $A=B$이기 위한 a, b, c, d의 값을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}a-b & b+c\\ c+3d & 2a-4d\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

풀이

두 행렬이 $A=B$이면 대응되는 모든 성분이 같아야 하므로 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a-\ \ b&=8\\ b+\ \ c&=1\\ c+3d&=7\\ 2a-4d&=6\end{aligned}$$

이 연립방정식의 첨가행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

주어진 첨가행렬의 REF를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{REF}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 $a=5$, $b=-3$, $c=4$, $d=1$이다.

두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$에 대해 행렬 A와 행렬 B의 **합**sum $A+B$를 다음과 같이 정의한다.

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{2.4}$$

두 행렬의 합은 대응되는 성분끼리의 합이다. 따라서 두 행렬의 크기가 서로 다르면 두 행렬을 합할 수 없다.[5]

5 두 행렬의 합은 상등과 마찬가지로 두 행렬의 크기가 같을 때에만 연산할 수 있다.

예를 들어 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

에 대해 두 행렬 A와 B의 합은 다음과 같다.

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & -4+4 \\ -2-1 & 1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

그러나 행렬 A와 C, B와 C는 크기가 다르므로 더할 수 없다.

또한 실수 k에 대해 행렬 A의 모든 성분에 k배하는 행렬 A의 **스칼라 배**scalar multiple kA는 다음과 같이 정의한다.

$$kA=[ka_{ij}]_{m\times n} \tag{2.5}$$

한편 두 실수 k, l에 대해 $(k+l)A=kA+lA$임을 쉽게 알 수 있다. 이때 행렬 A와 B의 스칼라 배 $2A$와 $(-1)B$[6]는 다음과 같다.

6 일반적으로 $(-1)B$는 간단히 $-B$로 쓴다.

$$2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad (-1)B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

예제 2-3

다음 두 행렬 A, B에 대해 $A-2B$를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

풀이

먼저 $A-2B$를 계산하면 다음과 같다.

$$A-2B=A+(-2)B,\quad (-2)B=\begin{bmatrix}0 & -4 & -14\\ -2 & 6 & -10\end{bmatrix}$$

이를 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}A-2B&=A+(-2)B\\ &=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -4 & -14\\ -2 & 6 & -10\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2+0 & 3-4 & 4-14\\ 1-2 & 2+6 & 1-10\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & -1 & -10\\ -1 & 8 & -9\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[2 3 4;1 2 1];B=[0 2 7;1 -3 5];      % 행렬 A, B 입력
>> A-2*B                                   % A-2B 계산
```

: 결과

```
ans =                                      % [예제 2-3]의 결과와 동일
     2   -1   -10
    -1    8    -9
```

MATLAB TIP!

- 행렬의 사칙연산 : +, −, *, /, ₩
- 행렬의 스칼라 곱 : *
- 행렬의 성분별 곱셈 : .*
- 행렬의 성분별 나눗셈 : ./, .₩
- 전치행렬 : A'

유제

MATLAB을 사용하여 다음 두 행렬 A, B에 대해 $2848A-4972B$를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}55 & -33 & 4444 & -999 & 990\\ 0 & -34567 & 111 & 9292 & -8949\\ -2424 & 2580 & 2580 & 1577 & 1577\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 2342 & -7777 & 1111 & -4567\\ 2345 & -3456 & 5555 & 9999 & -3333\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

일반적으로 모든 $m\times n$ 행렬을 모아놓은 집합을 M_{mn}으로 나타낸다. 이때 집합 M_{mn}은 행렬의 합과 스칼라 배에 대해 실수체계에서 성립하는 것과 유사한 대수적 성질을 만족한다. 다음 정리는 행렬의 합과 스칼라 배에서도 성립하는 대수적 성질에 대한 것이다.

정리 2-1 행렬의 합과 스칼라 배

A, B, C는 크기가 같은 행렬이고, a, b는 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A+B=B+A$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (덧셈의 결합법칙)

(3) $A+O=O+A=A$

(4) $A+(-A)=O$

(5) $a(B+C)=aB+aC$

(6) $(a+b)C=aC+bC$

(7) $(ab)C=a(bC)$

증명 각 성질은 양변의 행렬이 서로 같다는 것을 보이는 것으로 증명할 수 있다. 증명이 어렵지 않으므로, 여기서는 등식 (1), (3), (5)만 증명한다.

(1) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$이라 하면

$$\begin{aligned} A+B &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}] \\ &= [b_{ij}]+[a_{ij}] \\ &= B+A \end{aligned}$$

(3) $A+O=[a_{ij}]+[0]=[a_{ij}+0]=[0+a_{ij}]=[0]+[a_{ij}]=O+A=A$

(5) $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, $C=[c_{ij}]_{m\times n}$이라 하면 (1)에 의하여 $B+C=[(b_{ij}+c_{ij})]$이므로 $a(B+C)$는 행렬의 스칼라 배이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a(B+C) &= a[(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [a(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [(ab_{ij}+ac_{ij})] \\ &= [ab_{ij}]+[ac_{ij}] \\ &= a[b_{ij}]+a[c_{ij}] \\ &= aB+aC \end{aligned}$$

■

예제 2-4

두 행렬 A, B에 대해 다음이 성립함을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) $3(A+B)=3A+3B$

(b) $(3\cdot 2)A=3(2A)$

풀이

(a) $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$이므로 주어진 식의 좌변을 계산하면 다음과 같다.

$$3(A+B)=\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

한편, 주어진 식의 우변을 계산하면

$$3A=\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},\quad 3B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},\quad 3A+3B=\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

이므로 $3(A+B)=3A+3B$가 성립한다.

(b) $3\cdot 2=6$이므로 주어진 식의 좌변을 계산하면 다음과 같다.

$$(3\cdot 2)A=6A=\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

한편, 주어진 식의 우변을 계산하면

$$2A=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\quad 3(2A)=\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

이므로 $(3\cdot 2)A=3(2A)$가 성립한다.

Command Window

: 코딩
```
>> A=[3 2;-1 1];B=[1 0;-1 2];          % 행렬 A, B 입력
>> L_A=3*(A+B)                          % [예제 2-4(a)]의 좌변 계산
>> R_A=3*A+3*B                          % [예제 2-4(a)]의 우변 계산
>> L_B=(3*2)A                           % [예제 2-4(b)]의 좌변 계산
>> R_B=3*(2*A)                          % [예제 2-4(b)]의 우변 계산
```

: 결과
```
L_A = 1                                 % [예제 2-4(a)]의 결과와 동일
      12   6
      -6   9
R_A =
      12   6
      -6   9
L_B =                                   % [예제 2-4(b)]의 결과와 동일
      18  12
      -6   6
R_B =
      18  12
      -6   6
```

MATLAB TIP!

1 좌변과 우변의 계산 결과가 같으므로 성립함을 보일 수 있다.

유제

MATLAB을 사용하여 두 행렬 A, B에 대해 다음이 성립함을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 10 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \\ 9 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

(a) $-2(A+B)=-2A-2B$ (b) $(3\cdot 5)A=3(5A)$

2.1.3 행렬의 대각합과 전치행렬

행렬이 가지고 있는 특별한 성질을 알 수 있는 대각합과 전치에 대해 알아보자. 행렬의 특징을 나타내는 방법 중 하나는 행렬의 주대각선 성분의 합을 이용하는 것이다. n차 정사각행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

에 대해 주대각선 성분의 합을 **대각합**trace이라 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{k=1}^{n} a_{kk} \tag{2.6}$$

예를 들어 다음 행렬 A의 주대각선 성분은 1, 2, 3이므로 이들의 합은 $\mathrm{tr}(A)=1+2+3=6$이다.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

다음은 대각합의 성질을 정리한 것이다.

정리 2-2 대각합의 성질

n차 정사각행렬 A, B와 실수 k에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ (2) $\mathrm{tr}(kA)=k\cdot\mathrm{tr}(A)$

증명

(1) $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$라 하면 $A+B=[(a_{ij}+b_{ij})]$이므로 $(A+B)$의 대각합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A+B) &= \sum_{k=1}^{n}(a_{kk}+b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} \\ &= \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{tr}(kA) = \sum_{i=1}^{n} k a_{ii} = k\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\cdot \mathrm{tr}(A)$ ■

예제 2-5

다음 행렬 A, B에 대해 [정리 2-2]의 (1), (2)를 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&3\\2&3&-7\\0&3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-3&0&9\\3&0&-6\end{bmatrix}$$

풀이

$$A+B=\begin{bmatrix}-1&0&3\\2&3&-7\\0&3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&-2\\-3&0&9\\3&0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&3&2\\3&3&-6\end{bmatrix},\quad 3A=\begin{bmatrix}-3&0&9\\6&9&-21\\0&9&0\end{bmatrix}$$

이므로, 위의 결과에 따라 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{tr}(A+B)=0+3-6=(-1+3+0)+(1+0-6)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)=-3$

(2) $\mathrm{tr}(3A)=-3+9+0=6=3\mathrm{tr}(A)$

Command Window

```
: 코딩
>> A=[-1 0 3;2 3 -7;0 3 0];B=[1 2 -2;-3 0 9;3 0 -6];  % 행렬 A, B 입력
>> a=trace(A+B) 1                                      % tr(A+B) 계산
>> b=trace(3*A)                                        % tr(3A) 계산

: 결과
a =                                                    % [예제 2-5]의 결과와 동일
    -3
b =
    6
```

MATLAB TIP!

1 trace(A) : 행렬 A의 대각합을 구한다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬의 대각합을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&-4\\2&-1&1\\0&5&8\end{bmatrix}$$

이제 행렬 A의 행과 열을 바꾸어 만든 새로운 행렬에 대해 알아보자. 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 대해 A의 행을 열로 갖는 행렬을 A의 **전치행렬**transpose of A이라 하고 A^T으로 나타낸다. 따라서 A의 전치행렬 A^T은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A^T=[a_{ij}']_{n\times m},\ a_{ij}'=a_{ji}\quad(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$ [7]

7 행렬 A의 전치행렬 A^T은 A의 행과 열을 바꾸어 얻은 행렬이므로 a_{ij}는 첨자 ij가 ji로 바뀌어 a_{ji}가 된다. 즉 행을 열로 바꾼 것이다.

예제 2-6

다음 행렬의 전치행렬을 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}10 & -12 & 11\\ 24 & -25 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 8\\ -33 & 21\\ 25 & -10\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}30 & -10 & 20\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-25\\ 0\\ 37\end{bmatrix}$$

풀이

전치행렬은 행렬의 행과 열을 바꾼 것이다.

$$A^T=\begin{bmatrix}10 & 24\\ -12 & -25\\ 11 & 0\end{bmatrix},\quad B^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ -4 & 1 & 8\end{bmatrix},\quad C^T=\begin{bmatrix}0 & -33 & 25\\ 8 & 21 & -10\end{bmatrix}$$

$$D^T=\begin{bmatrix}30\\ -10\\ 20\end{bmatrix},\quad E^T=\begin{bmatrix}-25 & 0 & 37\end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[10 -12 11;24 -25 0];B=[-1 2 -4;2 -1 1;0 5 8]; % 행렬 A, B, C, D, E 입력
>> C=[0 8;-33 21;25 -10];D=[30 -10 20];E=[-25;0;37];
>> A',B',C',D',E' 1                                % 전치행렬 계산
```

: 결과

```
ans =                                              % [예제 2-6]의 결과와 동일
     10  24
    -12 -25
     11   0
ans =
    -1   2  0
     2  -1  5
    -4   1  8
ans =
    0  -33   25
    8   21  -10
```

MATLAB TIP!

1 A'(아포스트로피) : 행렬 A의 행과 열을 바꾸어 전치행렬을 구한다.

```
ans =
      30
     -10
      20
ans =
      -25 0 37
```

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬의 전치행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -4 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

전치행렬에 대해 다음과 같은 성질이 성립한다.

정리 2-3 전치행렬의 성질

두 행렬 A, B와 임의의 실수 k에 대해 다음이 성립한다.

(1) $(A^T)^T = A$ (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$ (4) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

증명

(1) $(A^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$

(2) $(A+B)^T = [a_{ij}+b_{ij}]^T = [a_{ji}+b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = [ka_{ij}]^T = [ka_{ji}] = k[a_{ji}] = kA^T$

(4) $\mathrm{tr}(A^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$[8] ■

8 정사각행렬 A를 전치시켜도 주대각선 성분은 변하지 않는다. 즉, A와 전치행렬 A^T의 주대각선 성분은 같다.

예제 2-7

다음 행렬 A에 대해 [정리 2-3]의 (3)과 (4)가 성립함을 보여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

풀이

(3) 실수 k에 대해 주어진 식의 좌변을 풀면 다음과 같다.

$$kA=\begin{bmatrix} k & 3k \\ 2k & -k \end{bmatrix},\quad (kA)^T=\begin{bmatrix} k & 2k \\ 3k & -k \end{bmatrix}$$

또 주어진 식의 우변을 풀면 다음과 같다.

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix},\quad kA^T=k\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 2k\\3k & -k\end{bmatrix}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$(kA)^T=\begin{bmatrix}k & 2k\\3k & -k\end{bmatrix}=kA^T$$

(4) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}$이고, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$이므로 $\mathrm{tr}(A)=1+(-1)=\mathrm{tr}(A^T)=0$이다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 3;2 -1];                    % 행렬 A 입력
>> k=sym('k', 'real'); 1            % 심볼릭 변수 k 지정
>> a=(k*A)'                         % a=(kA)^T 계산
>> b=k*A'                           % b=kA^T 계산
```

: 결과

```
a =                                 % [예제 2-7(a)]의 결과와 동일
    [  k, 2*k]
    [3*k,  -k]
b =                                 % [예제 2-7(b)]의 결과와 동일
    [  k, 2*k]
    [3*k,  -k]
```

MATLAB TIP!

1 k=sym('k', 'real') : k를 실수 심볼릭 변수 지정한다.

- 'real' 옵션을 추가하면 실수 변수로 지정할 수 있으며, 생략하면 유리수로 지정한다.
- 지정된 옵션을 취소하려면 sym('k', 'clear')을 사용한다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\-1 & 1 & 0\\-4 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\2 & -2 & 2\\0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

(a) $\mathrm{tr}(A^T)$ (b) $(A+B)^T$

2.2 행렬의 곱

앞 절에서 우리는 행렬의 합과 스칼라 배와 같은 행렬의 기본 연산에 대해 알아보았다. 이 절에서는 또 다른 중요한 연산인 행렬의 곱에 대해 알아보자. 특히 연립방정식은 행렬의 곱을 이용하여 표현할 수 있기 때문에 행렬의 곱은 가우스 소거법 이외에 연립방정식의 해를 구하는 새로운 방법을 제공한다.

2.2.1 행렬의 곱의 정의

행렬 연산은 실수와 유사한 점도 있고 다른 점도 있다. 이를테면 행렬의 합은 실수의 덧셈과 비슷하게 정의할 수 있고, 실수와 마찬가지로 교환법칙이 성립한다. 그렇다면 실수의 곱셈과 같이 실수가 직사각형 모양으로 배열되어 있는 행렬에 대해 곱셈도 정의할 수 있을까?

두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$에 대해 A와 B의 **곱**product AB가 다음과 같을 때,

$$AB=[c_{ij}]_{m\times n} \tag{2.7}$$

두 행렬을 곱한 행렬의 $(i,\ j)$ 성분 c_{ij}는 다음과 같다.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

위의 정의에서 AB의 $(i,\ j)$ 성분은 A의 i행에 있는 각 성분에 B의 j열에 있는 성분을 차례로 곱한 후 모두 더한 것을 의미한다. 따라서 A와 B의 곱은 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의되며, 그 결과는 다음과 같다.

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

예제 2-8

다음 행렬 A, B에 대해 AB와 BA를 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

먼저 AB를 구하면 다음과 같다.

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot 0+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+1\cdot 0+0\cdot 2 & 3\cdot 1+1\cdot(-3)+0\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

이제 BA를 구하면 다음과 같다.

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1+1\cdot 3 & (-2)\cdot 2+1\cdot 1 & (-2)\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 0\cdot 1+(-3)\cdot 3 & 0\cdot 2+(-3)\cdot 1 & 0\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 \\ 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -9 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 2 -1;3 1 0];B=[-2 1;0 -3;2 1];      % 행렬 A, B 입력
>> AB=A*B 1                                 % AB 계산
>> BA=B*A                                   % BA 계산
```

: 결과

```
AB =                                        % [예제 2-8]의 결과와 동일
    -4  -6
    -6   0
BA =
     1  -3  2
    -9  -3  0
     5   5 -2
```

MATLAB TIP!

1 * : 행렬의 곱과 행렬의 스칼라 곱 모두 "*"기호를 사용한다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬 A, B에 대해 AB와 BA를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

[예제 2-8]에서 알 수 있듯이, 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙 $AB = BA$는 성립하지 않는다. 즉 일반적으로 $AB \neq BA$이고, 행렬의 곱은 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

❶ ***AB*와 *BA*의 크기가 다른 경우**

[예제 2-8]에서 확인한 것과 같이 A의 크기는 2×3, B의 크기는 3×2일 때, AB는 2×2이고, BA는 3×3이다. 즉 AB와 BA는 크기가 다른 행렬이므로 $AB \neq BA$이다.

❷ ***AB*와 *BA*의 크기는 같으나 상등이 아닌 경우**

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$일 때, $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$,

$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$이다. 즉 AB와 BA는 크기는 같지만 대응하는 성분이 같지 않으므로 $AB \neq BA$이다.

❸ ***AB*와 *BA* 중 하나만 정의되는 경우**

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$이면 AB는 정의되지만 BA는 정의되지 않는다. 따라서 $AB \neq BA$이다.

2.2.2 연립일차방정식의 행렬 표현

행렬의 곱을 이용하면 연립방정식을 간단히 표현할 수 있다. n개의 미지수를 갖는 m개의 일차방정식으로 이루어진 다음과 같은 연립방정식이 있다고 하자.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.8}$$

이때 연립방정식의 계수와 미지수, 우변의 상수를 각각 성분으로 갖는 다음과 같은 행렬이 있다면,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

연립방정식 (2.8)은 행렬의 곱을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$AX = B$$

이때 행렬 A를 연립방정식 (2.8)의 **계수행렬**coefficient matrix이라고 하며, 계수행렬 A에 B를 덧붙여서 만든 행렬은 연립방정식 (2.8)의 첨가행렬이라고 한다.[9]

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

9 첨가행렬은 이미 1.2절에서 살펴보았다. 첨가행렬은 행렬의 한 종류이다.

예제 2-9

다음 연립방정식을 행렬의 곱을 이용하여 나타내라. 또 연립방정식의 첨가행렬을 구하라.

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 5 \\ -2x \qquad - z &= 6 \\ 3x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

풀이

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

이라 할 때,

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ -2x \qquad - z \\ 3x + 2y - z \end{bmatrix}$$

이므로 $AX = B$이고, 이를 첨가행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 5 \\ -2 & 0 & -1 & | & 6 \\ 3 & 2 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 3 4;-2 0 -1;3 2 -1];B=[5;6;3];          % 행렬 A, B 입력
>> C=[A B] 1                                     % 첨가행렬 만들기
```

: 결과

```
C =                                              % [예제 2-9]의 첨가행렬과 동일
     1   3   4   5
    -2   0  -1   6
     3   2  -1   3
```

MATLAB TIP!

1 [A B] : 행의 수가 같은 두 행렬을 연결한다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 연립방정식의 첨가행렬을 구하라.

$$\begin{aligned} u - 3v - 4x + 2y + 9z &= 55 \\ -4 + v - 2x \quad - z &= -16 \\ 7v + 3x + 2y \quad - z &= 13 \end{aligned}$$

2.2.3 행렬의 곱에 대한 성질

두 행렬의 곱에 대한 대각합의 성질을 정리하면 다음과 같다.

정리 2-4 행렬의 곱에 대한 대각합의 성질

n차 정사각행렬 A, B에 대해 다음이 성립한다.

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$ [10]

10 두 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않지만 대각합은 같다.

증명 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$라 하면

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\right) = \operatorname{tr}(BA)$$

따라서 n차 정사각행렬 A, B에 대해 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$이 성립한다. ■

예제 2-10

[예제 2-8]의 행렬 A, B에 대해 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$임을 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

행렬의 곱을 먼저 구하면

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -9 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

이므로 행렬의 곱의 대각합을 각각 구하면 다음과 같다.

$$\operatorname{tr}(AB) = (-4) + 0 = -4, \quad \operatorname{tr}(BA) = 1 + (-3) + (-2) = -4$$

따라서 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$이다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 2 -1;3 1 0];B=[-2 1;0 -3;2 1];          % 행렬 A, B 입력
>> AB=A*B;BA=B*A;                               % 행렬의 곱 계산
>> trace(AB),trace(BA)                          % 행렬의 곱의 대각합 계산
```

: 결과

```
ans =                                           % [예제 2-10]의 결과와 동일
     -4
ans =
     -4
```

유제

MATLAB을 사용하여 두 행렬 A, B에 대해 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$임을 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

이제 두 행렬의 곱에 대한 전치행렬의 성질에 대해 알아보자.

정리 2-5 행렬의 곱에 대한 전치행렬의 성질

두 행렬 A, B에 대해 다음이 성립한다.

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ [11]}$$

11 일반적으로 n개의 행렬의 곱에 대해 다음이 성립한다.
$(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$

증명 $A = [a_{ij}]_{m \times p}$, $B = [b_{ij}]_{p \times n}$, $AB = [c_{ij}]_{m \times n}$, $A^T = [a_{ij}{}']_{p \times m}$, $B^T = [b_{ij}{}']_{n \times p}$, $(AB)^T$의 (i, j) 성분을 $c_{ij}{}'$이라고 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_{ij}{}' = c_{ji} &= a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \cdots + a_{jp} b_{p\,i} \\ &= a_{1j}{}' b_{i1}{}' + a_{2j}{}' b_{i2}{}' + \cdots + a_{pj}{}' b_{ip}{}' \\ &= b_{i1}{}' a_{1j}{}' + b_{i2}{}' a_{2j}{}' + \cdots + b_{ip}{}' a_{pj}{}' \end{aligned}$$

그런데 $b_{i1}{}' a_{1j}{}' + b_{i2}{}' a_{2j}{}' + \cdots + b_{ip}{}' a_{pj}{}'$은 $B^T A^T$의 (i, j) 성분이므로 $(AB)^T = B^T A^T$이다. ■

예제 2-11

다음 행렬 A, B에 대해 [정리 2-5]가 성립함을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

풀이

먼저 행렬의 곱 AB를 구하면

$$\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}7 & 4 & 3\\0 & 1 & 6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

이고, AB의 전치행렬을 구하면 다음과 같다.

$$(AB)^T=\begin{bmatrix}7 & 0\\4 & 1\\3 & 6\end{bmatrix}$$

또한 주어진 식의 우변인 B^TA^T을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}B^TA^T&=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}7 & 0\\4 & 1\\3 & 6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(AB)^T=B^TA^T$이 성립함을 알 수 있다.

Command Window

```
: 코딩
>> A=[1 3;2 -1];B=[1 1 3;2 1 0];          % 행렬 A, B 입력
>> L=(A*B)'                               % 주어진 식의 좌변 계산
>> R=B'*A'                                % 주어진 식의 우변 계산

: 결과
L =                                       % [예제 2-11]의 결과와 동일
    7  0
    4  1
    3  6
R =
    7  0
    4  1
    3  6
```

유제

MATLAB을 사용하여 행렬의 곱을 계산하라.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) AB, BA (b) AC, CA (c) CD, DC

지금까지 살펴본 행렬의 곱의 성질에 대해 좀 더 자세히 알아보자. 행렬의 곱의 성질은 우리가 이미 알고 있는 실수의 곱셈의 성질과 유사한 점도 있지만 다른 점도 있다. 이를테면 $1 \cdot a = a$인 것과 마찬가지로 단위행렬 I_n에 대해 $I_n A = A$이다. 즉 1이 실수의 곱셈에 대한 항등원이듯이 단위행렬 I_n은 행렬의 곱에 대한 항등원이다. 한편, 실수 a, b에 대해 곱셈의 교환법칙 $ab = ba$는 항상 성립하지만, 행렬 A, B의 곱에 대한 교환법칙은 일반적으로 성립하지 않는다. 즉 행렬 A, B에 대해 항상 $AB = BA$가 성립한다고 할 수 없다.

행렬의 곱의 기본적인 성질을 정리하면 다음과 같다.

정리 2-6 행렬의 곱의 성질

A, B, C는 연산을 수행할 수 있는 크기의 행렬이고, a, b는 스칼라일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A(BC) = (AB)C$ (곱셈의 결합법칙)

(2) $A(B+C) = AB + AC$ (분배법칙)

(3) $(B+C)A = BA + CA$ (분배법칙)

(4) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

증명 각각의 성질은 양변의 행렬이 서로 같다는 것을 보여서 증명한다. 증명이 어렵지 않으므로 여기서는 등식 (1)과 (2)만 증명한다.

(1) $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$, $C=[c_{kl}]$이라 하고 $((AB)C)_{il}$을 $(AB)C$의 (i, l) 성분, $(AB)_{ik}$를 AB의 (i, k) 성분이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl}\right) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

마찬가지로 계산하면

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl} \quad \cdots\cdots ②$$

그런데 식 ①과 식 ②의 이중 합은 같으므로 $1 \le i \le m$, $1 \le l \le p$에 대해 $((AB)C)_{il} = (A(BC))_{il}$이다. 따라서 $(AB)C = A(BC)$이다.

(2) $A = [a_{ij}]_{k\times m}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $C = [c_{ij}]_{m\times n}$이라 하면 행렬의 합에 의해 $B+C = [(b_{ij}+c_{ij})]$이다. 행렬의 곱의 정의에 의하여 $A(B+C)$의 (i, j) 성분은 A의 i행의 성분과 $(B+C)$의 j열 성분 각각에 대한 곱의 합이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} A(B+C) &= [a_{ij}][(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= \sum_{p=1}^{m} a_{ip}(b_{pj}+c_{pj}) \\ &= \sum_{p=1}^{m}(a_{ip}b_{pj}+a_{ip}c_{pj}) \\ &= \sum_{p=1}^{m} a_{ip}b_{pj} + \sum_{p=1}^{m} a_{ip}c_{pj} \\ &= AB+AC \end{aligned}$$

■

예제 2-12

다음 행렬에 대해 곱셈의 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$를 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

풀이

먼저 $A(BC)$를 계산하기 위해 BC를 계산하면 다음과 같다.

$$BC = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 & 6 \\ -3 & -33 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

또 $(AB)C$를 계산하기 위해 AB를 계산하면 다음과 같다.

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & -2 \\ -25 & 11 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 110 & -2 \\ 25 & 1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 & 6 \\ -3 & -33 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

위의 두 결과로부터 $A(BC) = (AB)C$임을 알 수 있다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[10 2;3 -11;0 2];B=[10 0;5 -1];C=[1 0;2 -3];   % 행렬 A, B, C 입력
>> L=(A*B)*C                                        % 주어진 식의 좌변 계산
>> R=A*(B*C)                                        % 주어진 식의 우변 계산
```

: 결과

```
L =                                                 % [예제 2-12]의 결과와 동일
   106     6
    -3   -33
     6     6
R =
   106     6
    -3   -33
     6     6
```

유제

MATLAB을 사용하여 행렬 A, B, C에 대해 다음을 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1234 & 2222 \\ 3333 & 4444 \\ 0 & 1111 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4321 & 3456 \\ -2345 & -12345 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1000 & -200 \\ 777 & 9999 \end{bmatrix}$$

(a) $A(BC) = (AB)C$ (곱셈의 결합법칙) (b) $A(B+C) = AB + AC$ (분배법칙)

앞의 내용을 통해 행렬의 곱이 실수의 곱셈과 다름을 알았다. 이제 행렬의 곱과 관련하여 몇 가지 특별한 성질을 더 알아보자. 먼저 단위행렬을 곱하는 경우를 살펴보면, A가 $m \times n$ 행렬일 때 단위행렬 I_m, I_n에 대해 다음이 성립한다.

$$I_m A = A I_n = A$$ [12]

12 A가 $m \times n$ 행렬일 때 A의 왼쪽에는 m차 단위행렬 I_m, 오른쪽에는 n차 단위행렬 I_n을 곱해야 행렬의 곱이 성립한다.

예제 2-13

다음 행렬 A에 대해 $I_2 A = A I_3 = A$임을 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

풀이

주어진 식의 좌변을 계산하면

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11&22&33\\22&0&-22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&22&33\\22&0&-22\end{bmatrix}=A$$

이고, 주어진 식의 우변을 계산하면

$$AI_3=\begin{bmatrix}11&22&33\\22&0&-22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&22&33\\22&0&-22\end{bmatrix}=A$$

이다. 따라서 $I_2A=AI_3=A$임을 알 수 있다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[11 22 33;22 0 -22];          % 행렬 A 입력
>> I2=eye(2);I3=eye(3); 1          % 2, 3차 단위행렬 입력
>> B=I2*A                          % B=I2A 계산
>> C=A*I3                          % C=AI3 계산
```

: 결과

```
B =                                % [예제 2-13]의 결과와 동일
    11   22    33
    22    0   -22
C =
    11   22    33
    22    0   -22
```

MATLAB TIP!

1 eye(n) : n차 단위행렬을 생성한다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬 A에 대해 $I_4A=AI_4=A$임을 보여라.

$$A=\begin{bmatrix}21&22&32&42\\22&0&-33&-44\\98&10&-48&92\\76&78&94&-100\end{bmatrix}$$

영이 아닌 실수 a에 대해 a의 거듭제곱은 다음과 같다.

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n}$$

같은 방법으로 행렬의 거듭제곱을 생각할 수 있다. A가 n차 정사각행렬일 때, A의 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

$$A^0 = I_n, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k} \tag{2.9}$$

식 (2.9)로부터 다음 정리를 얻을 수 있으며, 증명은 실수에 대한 지수법칙과 유사하다.

정리 2-7 행렬의 거듭제곱의 지수법칙

A가 정사각행렬이고 r, s가 음이 아닌 정수일 때, 다음이 성립한다.

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs} \tag{2.10}$$

증명 증명이 어렵지 않으므로 여기서는 $A^r A^s = A^{r+s}$만 증명한다. 먼저 $s = 1$이면 $A^{r+1} = A^r A$이다. 이제 $A^r A^s = A^{r+s}$라고 가정하면

$$A^{r+(s+1)} = A^{(r+s)+1} = A^{r+s}A = (A^r A^s)A = A^r(A^s A) = A^r A^{s+1}$$

이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $A^r A^s = A^{r+s}$이 성립한다.[13] ■

13 **수학적 귀납법**
만일 $n \geq 1$에 대해 명제 P_n이 다음을 만족한다고 하자.
❶ P_1은 참이다.
❷ P_n이 참이라고 할 때, P_{n+1}도 참이다.
그러면 명제 P_n은 모든 $n \geq 1$에 대해 참인 명제이다.

예제 2-14

1보다 큰 양의 정수 n과 행렬 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$에 대해 다음이 성립함을 보여라.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

풀이

수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $n = 1$이면

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1+6\times1 & 4\times1 \\ -9\times1 & 1-6\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} = A$$

이므로 $n = 1$일 때 참이다. 이제 A^n이 주어진 행렬과 같다고 가정하고 $n+1$인 경우를 알아보자.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+6n)7+(4n)(-9) & (1+6n)4+(4n)(-5) \\ (-9n)7+(1-6n)(-9) & (-9n)4+(1-6n)(-5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7+6n & 4n+4 \\ -9n-9 & -5-6n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+6(n+1) & 4(n+1) \\ -9(n+1) & 1-6(n+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

즉 $n+1$인 경우도 n인 경우와 같은 형식으로 표현된다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 다음이 성립한다.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

예제 2-15

$n \geq 0$에 대해 다음 점화식이 성립할 때, x_n, y_n을 x_0, y_0로 나타내라.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 7x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= -9x_n - 5y_n \end{aligned}$$

풀이

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$$

라 할 때, 주어진 식을 행렬의 곱을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow X_{n+1} = AX_n$$

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$인 경우를 차례로 나타내면

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 \\ X_2 &= AX_1 = A(AX_0) = A^2X_0 \\ X_3 &= AX_2 = A(A^2X_0) = A^3X_0 \\ &\vdots \\ X_n &= AX_{n-1} = A(A^{n-1}X_0) = A^nX_0 \end{aligned}$$

[예제 2-14]로부터

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^nX_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+6n)x_0 + (4n)y_0 \\ (-9n)x_0 + (1-6n)y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $n \geq 1$에 대해

$$x_n = (1+6n)x_0 + 4ny_0, \quad y_0 = (-9n)x_0 + (1-6n)y_0$$

이다.

```
Command Window
: 코딩
>> n=sym('n');                          % 심볼릭 변수 n 지정
>> An=[1+6*n 4*n;-9*n 1-6*n];           % 행렬 A^n 입력
>> syms x0 y0                           % 심볼릭 변수 x0, y0 지정
>> X0=[x0;y0];
>> An*X0                                % A^n X_0 계산

: 결과
ans =                                   % [예제 2-15]의 결과와 동일
       x0*(6*n + 1) + 4*n*y0
     - y0*(6*n - 1) - 9*n*x0
```

유제

MATLAB을 사용하여 [예제 2-14]의 행렬 A에 대해 다음을 구하라.

$$A^{10}, \quad A^{20}, \quad A^{2015}$$

2.3 역행렬

실수 $a(a \neq 0)$의 역수 $\frac{1}{a}$은 $\frac{1}{a}a = a\frac{1}{a} = 1$이므로 $\frac{1}{a}$을 a의 **곱셈의 역원**inverse이라 하고, $\frac{1}{a} = a^{-1}$과 같이 쓴다. 이 절에서는 정사각행렬에 대해 실수에서 곱셈의 역원과 같은 역할을 하는 행렬에 대해 알아본다.

2.3.1 역행렬의 정의와 기본 성질

n차 정사각행렬 A에 대해 다음을 만족하는 행렬 B가 존재하면 A는 **가역행렬**invertible matrix이라고 한다.

$$AB = I_n = BA$$

이때 B를 A의 **역행렬**inverse matrix이라고 하며, 이러한 B가 존재하지 않으면 A를 **비가역행렬**noninvertible matrix이라고 한다.[14]

위의 정의에서 $AB = I_n = BA$는 A와 B의 역할을 바꿔도 마찬가지임을 의미

14 비가역행렬을 특이행렬singular matrix이라고도 한다. 반대로 가역행렬을 비특이행렬nonsingular matrix이라고도 한다.

한다. 즉 A가 가역행렬이면 B도 가역행렬이고, B가 A의 역행렬이면 A는 B의 역행렬이다.

예제 2-16

다음 행렬 A, B에 대해 B가 A의 역행렬임을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

풀이

B가 A의 역행렬이면 $AB=I_2=BA$가 성립한다.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$BA=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

따라서 B는 A의 역행렬이다.

Command Window

```
: 코딩
>> A=[1 2;3 4];B=[-2 1;3/2 -1/2];          % 행렬 A, B 입력
>> AB=A*B                                   % AB 계산
>> BA=B*A                                   % BA 계산

: 결과
AB =                                        % [예제 2-16]의 결과와 동일
     1  0
     0  1
BA =
     1  0
     0  1
```

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬 B가 A의 역행렬임을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & -4 & 1 & -1 & 0\\ -9 & 0 & 9 & 0 & -9\\ 0 & 6 & -6 & -3 & 9\\ -12 & 2 & 4 & 5 & 0\\ 6 & 5 & -8 & -1 & 9\end{bmatrix}$$

예제 2-17

다음 행렬이 비가역행렬임을 보여라.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

풀이

A가 가역행렬이려면 $AB=BA=I_3$인 3×3 행렬 $B=[b_{ij}]$가 존재해야 한다. 그런데

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&0\\b_{21}&b_{22}&0\\b_{31}&b_{32}&0\end{bmatrix}$$

이므로 BA의 (3, 3) 성분은 0이지만 I_3의 (3, 3) 성분은 1이다. 따라서 $BA=I_3$를 만족하는 행렬 B는 존재하지 않으므로 행렬 A는 가역행렬이 아니다.

Command Window

: 코딩

```
>> syms a b c d e f g h i;             % 심볼릭 변수 지정
>> A=[1 0 0;0 1 0;0 0 0];              % 행렬 A 입력
>> B=[a b c;d e f;g h i]; 1            % 행렬 B 입력
>> AB=A*B                              % AB 계산
>> BA=B*A                              % BA 계산
```

: 결과

```
AB =                                   % [예제 2-17]의 결과와 동일
    [a, b, c]
    [d, e, f]
    [0, 0, 0]
BA =
    [a, b, 0]
    [d, e, 0]
    [g, h, 0]
```

MATLAB TIP!

1 행렬의 원소를 심볼릭 변수로 지정해야 일반적인 수 행렬과의 계산이 가능하다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬이 비가역행렬임을 보여라.

$$A=\begin{bmatrix}7&1&1&-1\\-1&0&2&-1\\0&3&2&0\\-2&0&4&-2\end{bmatrix}$$

$AB=I_n=BA$를 만족하는 정사각행렬 B가 존재할 때 정사각행렬 A는 가역행렬이다. 따라서 A가 정사각행렬이면 $AB=I_n$ 또는 $BA=I_n$ 중에서 한 가

지만 성립하는지 확인하면 된다. 특히 가역행렬은 정사각행렬에 대해서만 생각한다. 만약 A가 $m\times n$이고 B가 $n\times m$이며 $AB=I_m$을 만족한다면 B가 A의 역행렬이라는 잘못된 개념을 가질 수 있다. 예를 들어 A는 2×3 행렬, B는 3×2 행렬이므로 AB는 2×2 행렬이 되고 BA는 3×3 행렬이 된다. 일반적으로 A가 정사각행렬이 아니면 가역성을 생각할 필요가 없다.

예제 2-18

다음 행렬 A, B에 대해 $AB=I_2$임을 확인하라. 이때 B는 A의 역행렬이라고 할 수 있는가?

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

풀이

행렬의 곱으로부터 간단히 다음을 확인할 수 있다.

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$$

그러나 B는 A의 역행렬이 아니다. 왜냐하면 $AB=I_2$이지만

$$BA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq I_2$$

이기 때문이다. 즉 $BA\neq I_2$이므로 B는 A의 역행렬이 아니다.

0이 아닌 실수 a에 대해 a의 역수 $\dfrac{1}{a}=a^{-1}$은 단 하나만 존재한다. 행렬의 역행렬도 실수와 같은 성질을 갖는지 다음 정리로 확인해보자.

정리 2-8 역행렬의 성질 I

n차 정사각행렬 A가 가역행렬이면 A의 역행렬은 유일하다.

증명 행렬 B, C가 모두 A의 역행렬이라고 하면

$$AB=I_n=BA,\quad AC=I_n=CA$$

이므로

$$B=BI_n=B(AC)=(BA)C=I_nC=C$$

이다. 따라서 A의 역행렬은 유일하다. ■

n차 정사각행렬 A가 가역행렬일 때, A의 역행렬이 유일하게 존재하므로 이것을 A^{-1}으로 나타낸다. 즉 다음과 같다.

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

예제 2-19

다음 행렬 A에 대해 $A^3 = 5I_3$임을 확인하라. 또 이 결과를 이용하여 A^{-1}을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

풀이

행렬의 곱에 의해 주어진 식의 좌변을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A^3 &= (A^2)A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 5I_3 \end{aligned}$$

즉 $A^3 = 5I_3$이므로 $A\left(\frac{1}{5}A^2\right) = I_3 = \left(\frac{1}{5}A^2\right)A$이다. 따라서 A는 가역행렬이고 $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2$이다.

Command Window

: 코딩

```
>> format rat
>> A=[0 1 0;0 0 1;5 0 0];        % 행렬 A 입력
>> B=1/5*A^2 1                   % 주어진 조건에서 계산
>> C=inv(A) 2                    % A^-1 계산
```

: 결과

```
B =                              % [예제 2-19]의 결과와 동일
      0   0   1/5
      1   0   0
      0   1   0
C =
      0   0   1/5
      1   0   0
      0   1   0
```

MATLAB TIP!

1 $A^3 = 5I_3$이므로 $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2$을 이용한다.

2 inv(A) : n차 가역행렬 A의 역행렬을 구한다.

유제

MATLAB을 사용하여 행렬 A에 대해 $A^5=7I_5$임을 확인하라. 또 이 결과를 이용하여 A^{-1}을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이제 역행렬의 성질을 좀 더 알아보자.

정리 2-9 역행렬의 성질 II

n차 정사각행렬 A, B가 가역행렬이고 k가 0이 아닌 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) A^{-1}은 가역행렬이고, $(A^{-1})^{-1}=A$ 이다.

(2) AB는 가역행렬이고, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 이다.[15]

(3) A^T은 가역행렬이고, $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 이다.

(4) kA는 가역행렬이고, $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$ 이다.

(5) A^k은 가역행렬이고, $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$이다. $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

15 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$은 두 가역행렬의 곱은 다시 가역행렬임을 뜻한다. 일반적으로 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$이 성립한다.

증명

(1) A^{-1}이 가역행렬인 것은 $A^{-1}B=I_n=BA^{-1}$을 만족하는 행렬 B가 존재함을 보이면 된다. 이때 다음이 성립하므로,

$$A^{-1}A=I_n=AA^{-1}$$

A^{-1}은 가역행렬이고 A가 A^{-1}의 역행렬이다. 따라서 $(A^{-1})^{-1}=A$이다.

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n$,

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}I_nB=BB^{-1}=I_n$

이므로 AB는 가역행렬이고 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이다.

(3) $AA^{-1}=I_n=A^{-1}A$이므로

$$I_n=I_n^T=(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T,$$
$$I_n=I_n^T=(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T$$

이다. 따라서 A^T은 가역행렬이고 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$이다.

(4) $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=\frac{1}{k}(kA)A^{-1}=\left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1}=I_n$,

$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA)=k\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)A=\left(k\frac{1}{k}\right)A^{-1}A=I_n$

이므로 kA는 가역행렬이고 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$이다.

(5) (2)에 의해 $(A^2)^{-1}=(AA)^{-1}=A^{-1}A^{-1}=(A^{-1})^2$이다. 이때 $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$이 성립한다면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(A^{k+1})^{-1}&=(A^kA)^{-1}\\&=A^{-1}(A^k)^{-1}\\&=A^{-1}(A^{-1})^k\\&=(A^{-1})^{k+1}\end{aligned}$$

따라서 수학적 귀납법에 의해 $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$이 성립한다. ■

일반적으로 가역행렬의 역행렬을 구하는 것은 쉽지 않다. 그러나 2×2 행렬 A의 역행렬 A^{-1}은 쉽게 구할 수 있다. 즉 행렬 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$에서 $\Delta=ad-bc\neq 0$이라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

따라서 행렬 A의 역행렬 A^{-1}은 다음과 같다.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta}\end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

예제 2-20

두 행렬 A, B에 대해 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$임을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

풀이

먼저 $AB=\begin{bmatrix}16 & -5\\ 42 & -13\end{bmatrix}$이므로 AB의 역행렬 $(AB)^{-1}$을 구하면 다음과 같다.

$$(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{13}{2} & \dfrac{5}{2}\\ -21 & 8\end{bmatrix}$$

한편 식 (2.11)로부터 A, B의 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

이를 이용하여 주어진 식의 우변을 계산하면 다음과 같다.

$$B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{13}{2} & \dfrac{5}{2}\\ -21 & 8\end{bmatrix}$$

따라서 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이 성립함을 알 수 있다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[2 1;5 3];B=[6 -2;4 -1];          % 행렬 A, B 입력
>> InvA=inv(A);InvB=inv(B); [1]        % 행렬 A, B의 역행렬 계산
>> AB=A*B;                             % AB 계산
>> L=inv(AB)                           % 주어진 식의 좌변 계산
>> R=InvB*InvA                         % 주어진 식의 우변 계산
```

: 결과

```
L =                                    % [예제 2-20]의 결과와 동일
    -13/2    5/2
    -21      8
R =
    -13/2    5/2
    -21      8
```

MATLAB TIP!

[1] $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이 성립함을 "inv(A*B)"와 "inv(B)*inv(A)"를 직접 계산하여 확인한다.

유제

MATLAB을 사용하여 두 행렬 A, B에 대해 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}7 & -4\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-24 & 12\\ 14 & -20\end{bmatrix}$$

2.3.2 기본행렬과 역행렬

계수행렬 A가 가역행렬인지 아닌지에 따라서 A를 계수행렬로 갖는 연립방정식이나 동차연립방정식의 해의 종류를 알 수 있다. 즉 가역행렬을 계수행렬로

갖는 연립방정식은 유일한 해를 가지므로 가역행렬을 특별한 종류로 분류하는 것은 매우 중요하다. 가역행렬 중에서 가장 특별한 것은 기본행렬이다. 특히 기본행렬은 연립방정식의 해뿐만 아니라 역행렬을 구할 때도 중요한 역할을 한다. 이제 기본행렬에 대해 알아보고, 기본행렬을 이용하여 n차 정사각행렬의 역행렬을 구하는 원리를 알아보자.

n차 단위행렬 I_n에 대해 세 가지 기본 행 연산 중 단 한 번 기본 행 연산을 시행하여 얻어지는 행렬을 **기본행렬**Elementary matrix이라고 한다.[16]

16 기본 행 연산에는 세 가지 방법이 있다.
❶ E_{ij} : i번째 행과 j번째 행을 교환한다.
❷ $E_i(c)$: i행에 0이 아닌 상수 c를 곱한다.
❸ $E_{ij}(c)$: i행에 0이 아닌 상수 c를 곱하여 j행에 더한다.
기본 행 연산에 대한 자세한 내용은 1.3절을 참고하기 바란다.

기본행렬은 단위행렬에 대해 기본 행 연산을 한 번 시행하여 얻은 것이므로 시행한 기본 행 연산 기호를 똑같이 사용하여 기본행렬을 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

❶ E_{23} : I_3의 2행과 3행을 교환한다.

$$E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

❷ $E_3(-3)$: I_3의 3행에 -3배한다.

$$E_3(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

❸ $E_{13}(-2)$: I_3의 1행에 -2배한 후 3행에 더한다.

$$E_{13}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

일반적으로 기본 행 연산으로부터 얻을 수 있는 기본행렬은 다음 세 가지이다.

❶ i행과 j행을 교환한다. $\longrightarrow$ E_{ij}
❷ i행에 0이 아닌 상수 c를 곱한다. $\longrightarrow$ $E_i(c)$
❸ i행에 0이 아닌 상수 c를 곱하여 j행에 더한다. $\longrightarrow$ $E_{ij}(c)$

이제 3차 정사각행렬을 이용하여 기본행렬의 곱셈 연산의 특징을 살펴보기 위해 3차 정사각행렬 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$에 대해 세 가지 기본행렬들을 A의

왼쪽에 각각 곱해보자.

❶ $$E_{23}A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

❷ $$E_3(-3)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\-3a_{31}&-3a_{32}&-3a_{33}\end{bmatrix}$$

❸ $$E_{13}(-2)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\-2a_{11}+a_{31}&-2a_{12}+a_{32}&-2a_{13}+a_{33}\end{bmatrix}$$

위의 결과로부터 A의 왼쪽에 기본행렬을 곱하는 것은 기본행렬을 만들 때 사용된 기본 행 연산을 행렬 A에 시행한 것과 같음을 알 수 있다. 한편, 기본행렬을 단위행렬로 바꾸는 데 사용된 기본 행 연산은 단위행렬을 기본행렬로 바꿀 때 사용된 기본 행 연산의 역과정이다. 그런데 단위행렬은 가역행렬이므로 기본행렬은 가역행렬이고 그 역행렬 또한 기본행렬임을 알 수 있다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

정리 2-10 기본행렬의 역행렬

(1) $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$

(2) $E_i(c)^{-1}=E_i\left(\dfrac{1}{c}\right)$

(3) $E_{ij}(c)^{-1}=E_{ij}(-c)$[17]

17 $E_{ij}=E_{ji}$ 이지만 $E_{ij}(c)\neq E_{ji}(c)$

증명

(1) $E_{ij}E_{ji}=I_n$

(2) $c\neq 0$에 대해 $E_i(c)E_i\left(\dfrac{1}{c}\right)=I_n=E_i\left(\dfrac{1}{c}\right)E_i(c)$

(3) $E_{ij}(c)E_{ij}(-c)=I_n=E_{ij}(-c)E_{ij}(c)$ ■

예를 들어 $E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$의 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$E_{23}^{-1}=E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

같은 방법으로 $E_2(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$, $E_{13}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$의 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$E_3(-3)^{-1}=E_3\left(-\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$E_{13}(-2)^{-1}=E_{13}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

예제 2-21

3차 기본행렬에 대해 $A=E_3(5)E_{23}(2)E_{12}$라고 할 때, A와 A^{-1}을 각각 구하라.

풀이

기본행렬의 성질에 의하여 행렬 A를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A&=E_3(5)E_{23}(2)\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=E_3(5)\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&2\\0&0&5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

한편 A^{-1}은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A^{-1}&=(E_3(5)E_{23}(2)E_{12})^{-1}\\&=E_{12}^{-1}(E_{23}(2))^{-1}(E_3(5))^{-1}\\&=E_{12}E_{23}(-2)E_3\left(\frac{1}{5}\right)\\&=E_{12}E_{23}(-2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= E_{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

우리는 1.3절에서 행동치에 대해 알아보았다. 즉 행렬 A에 연속적으로 기본 행 연산을 하여 얻어지는 행렬을 B라 하면 A와 B는 행동치이다. 이때 E_1, E_2, $\cdots$, E_k가 그에 대응하는 기본행렬이라고 하면 B를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B = E_k(\cdots(E_2(E_1A))\cdots) = (E_k \cdots E_2E_1)A = PA$$

그러면 $P = E_k \cdots E_2E_1$은 기본행렬의 곱이므로 가역행렬이다. 역으로 가역행렬 P에 대해 $B = PA$이면 A는 B와 행동치이다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

정리 2-11 행동치와 기본행렬

$n \times n$ 정사각행렬 A가 가역행렬이면 다음이 성립한다.

(1) A는 단위행렬 I_n과 행동치이다.

(2) A는 기본행렬의 곱이다.

증명 B를 A의 RREF라고 하자. 즉 RREF $A = B$이면 B는 모든 성분이 0인 행은 없다. 바꾸어 말하면 $AX = O$은 자명한 해만을 갖는다. 따라서 $B = I_n$이다. 그런데 B가 A의 RREF이므로 $E_k(\cdots(E_2(E_1A))\cdots) = B = I_n$인 기본행렬 E_1, E_2, $\cdots$, E_k가 존재한다. 즉 $B = I_n = (E_k \cdots E_2E_1)A$이므로 $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$이고, 기본행렬의 역행렬은 다시 기본행렬이므로 A는 기본행렬의 곱이다. ■

예제 2-22

다음 행렬 A가 단위행렬 I_4와 행동치임을 보이고, A를 기본행렬의 곱으로 나타내라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

정사각행렬 A의 왼쪽에 기본행렬 $E_{13}(-1)$, $E_{14}(-1)$, $E_4(-1)$을 차례로 곱하면 다음과 같다.

$$E_4(-1)E_{14}(-1)E_{13}(-1)A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots ①$$

식 ①에 기본행렬 $E_{41}(-1)$, $E_{32}(-1)$, $E_{21}(-1)$을 차례로 곱하면 다음과 같다.

$$E_{21}(-1)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_4(-1)E_{14}(-1)E_{13}(-1)A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots ②$$

식 ②의 왼쪽에 기본행렬 E_{24}를 곱하면 다음과 같다.

$$E_{24}E_{21}(-1)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_4(-1)E_{14}(-1)E_{13}(-1)A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4$$

따라서 A는 I_4와 행동치이다. 한편

$$E_{24}E_{21}(-1)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_4(-1)E_{14}(-1)E_{13}(-1)A=I_4$$

이므로 행렬 A는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}A&=(E_{24}E_{21}(-1)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_4(-1)E_{14}(-1)E_{13}(-1))^{-1}\\&=(E_{13}(-1))^{-1}(E_{14}(-1))^{-1}(E_4(-1))^{-1}(E_{41}(-1))^{-1}(E_{32}(-1))^{-1}(E_{21}(-1))^{-1}(E_{24})^{-1}\\&=E_{13}(1)E_{14}(1)E_4(-1)E_{41}(1)E_{32}(1)E_{21}(1)E_{42}\end{aligned}$$

2.3.3 역행렬 구하기

주어진 행렬에 기본 행 연산을 시행하여 RREF를 구하는 과정에서 주어진 행렬의 역행렬을 얻을 수 있다. 즉 A^{-1}은 A의 RREF를 구하는 과정에서 단위행렬에 기본 행 연산을 연달아 시행하면 얻을 수 있음을 뜻한다. 따라서 n차 정사각행렬 A가 가역행렬일 때 다음과 같은 단계로 A의 역행렬을 구할 수 있다.

❶ 주어진 행렬 A에 단위행렬 I_n을 첨가하여 $n\times 2n$ 행렬 $[\,A\mid I_n\,]$을 만든다.

❷ $[\,A\mid I_n\,]$의 RREF를 구한다.

$$[\,A\mid I_n\,]\longrightarrow[\,E_k\cdots E_2E_1A\mid E_k\cdots E_2E_1I_n\,]$$

❸ 구한 RREF를 $[C \mid D]$라고 하면 다음이 성립한다.

(i) $C=I_n$이면 $D=A^{-1}$이다.

(ii) $C \neq I_n$이면 A는 가역행렬이 아니고 A^{-1}은 존재하지 않는다.

예제 2-23

다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

풀이

$[A \mid I_3]$를 만든 후, 이 행렬의 RREF를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$[A \mid I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{13}(-1)]{E_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

따라서 주어진 행렬의 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 1 1;1 2 2;1 2 3];          % 행렬 A 입력
>> I3=eye(3);                      % 3차 단위행렬 입력
>> rref([A,I3])                    % [A|I3]의 RREF 계산
>> Ainv=inv(A)                     % 역행렬 계산
```

: 결과

```
ans =                              % [예제 2-23]의 결과와 동일
     1    0    0    2   -1    0
     0    1    0   -1    2   -1
     0    0    1    0   -1    1
Ainv =
      2   -1    0
     -1    2   -1
      0   -1    1
```

유제

MATLAB에서 RREF를 사용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

[예제 2-23]과 같은 방법으로 주어진 행렬의 역행렬을 구할 때, 역행렬이 존재하지 않으면 어떤 현상이 일어나는지 다음 예제를 통해 알아보자.

예제 2-24

다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & -3 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

풀이

[예제 2-23]과 같은 과정을 거치면 다음과 같다. 이때 $[A \mid I_n]$의 RREF를 구하는 과정에서 왼쪽에 전부 0인 행이 만들어지면 더 이상 역행렬을 구할 필요가 없다.

$$[A \mid I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{13}(2)]{E_{12}(-6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -27 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 18 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{2}\right)]{E_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

이때 왼쪽 행렬은 마지막 행의 성분이 모두 0이므로 단위행렬이 될 수 없다. 즉 $C \neq I_3$이므로 A^{-1}은 존재하지 않는다.

Command Window

: 코딩

```
>> format 'rat' [1]                      % 출력 형태 지정
>> A=[1 6 4;6 12 -3;-2 4 10];            % 행렬 A 입력
>> I3=eye(3);                            % 단위행렬 지정
>> rref([A,I3]) [2]                      % 행렬 [A | I_n]의 RREF 계산
>> Ainv=inv(A)                           % 역행렬 계산
```

: 결과

```
ans =
      1    0    -11/4    0    1/4    -1/2
      0    1      9/8    0    1/8     1/4
      0    0        0    1     -1      -1
경고: 행렬이 작업 정밀도에 대해 특이 행렬입니다. [3]
Ainv =                                   % [예제 2-24]의 결과와 동일
       1/0    1/0   1/0
       1/0    1/0   1/0
       1/0    1/0   1/0
```

MATLAB TIP!

1. `format 'rat'` : 분수 형태로 출력하도록 지정한다.
2. `[A, B]` : 행의 크기가 같은 행렬 A, B를 붙여서 새로운 행렬을 만들 수 있다.
3. 역행렬이 없을 때에는 오류 메시지가 나타난다. 영어 버전을 사용하면 'Warning: Matrix is singular to working precision.'이라는 메시지가 나타난다.

유제

MATLAB을 사용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

[예제 2-24]와 같이 RREF를 이용하여 역행렬의 존재를 확인하거나 역행렬을 구하는 방법은 단순한 계산을 반복하는 것이다. 그러므로 계산과정을 컴퓨터를 이용하여 프로그램화하면 쉽게 구할 수 있다.

2.3.4 역행렬을 이용한 연립일차방정식의 풀이

우리는 1장에서 연립방정식을 행렬로 표현하여 해를 구하는 방법에 대해 알아보았다. 또 [정리 2-8]에서 행렬의 역행렬은 유일하다는 것을 알아보았다. 이제 행렬의 가역성과 연립방정식의 해와의 관계에 대해 알아보자.

실수 a, $b(a\neq 0)$에 대해 일차방정식 $ax=b$의 해는 $x=\dfrac{b}{a}=a^{-1}b$와 같이 구할 수 있다. 이와 비슷한 방법으로 연립방정식 $AX=B$의 해를 구해보자.

정리 2-12 역행렬을 이용한 연립방정식의 해

n차 정사각행렬 A가 가역행렬이고 B가 $n\times 1$ 행렬일 때, 연립방정식 $AX=B$는 유일한 해 $X=A^{-1}B$를 갖는다.

증명 먼저 연립방정식 $AX=B$가 해를 갖는다는 것을 증명하자.
A가 가역행렬이므로 A^{-1}이 존재하고, $AX=B$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &A^{-1}(AX)=A^{-1}B \\ \rightarrow\ &(A^{-1}A)X=A^{-1}B \\ \rightarrow\ &X=A^{-1}B \end{aligned}$$

따라서 연립방정식 $AX=B$는 해 $X=A^{-1}B$를 갖는다.
이제 연립방정식의 해가 유일하다는 것을 증명하자.
X_1, X_2가 $AX=B$의 해라 가정하면

$$AX_1=B, \quad AX_2=B$$

이다. 이 식의 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$X_1=A^{-1}B, \quad X_2=A^{-1}B$$

이므로 $X_1=X_2=A^{-1}B$이다. 따라서 연립방정식 $AX=B$는 유일한 해 $X=X_1=X_2$를 갖는다. ■

예제 2-25

다음 연립방정식은 $\Delta=ad-bc\neq 0$, $\Delta_1=ed-bf$, $\Delta_2=af-ce$일 때, 유일한 해 $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$를 갖는다는 것을 보여라.

$$\begin{aligned} ax+by&=e \\ cx+dy&=f \end{aligned}$$

풀이

$\Delta=ad-bc\neq 0$이므로 식 (2.11)을 이용하여 계수행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

계수행렬의 역행렬은

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

이며, 주어진 연립방정식

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

는 다음과 같은 유일한 해를 갖는다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A^{-1}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 주어진 연립방정식은 유일한 해 $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$를 갖는다.

예제 2-26

다음 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{aligned} 7x + 8y &= 100 \\ 2x - 9y &= 10 \end{aligned}$$

풀이

[예제 2-25]로부터 $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$이다. 여기서 $\Delta = -79$, $\Delta_1 = -980$, $\Delta_2 = -130$이므로 x, y는 다음과 같다.

$$x = \frac{980}{79}, \quad y = \frac{130}{79}$$

한편 [정리 2-10]으로부터 동차연립일차방정식에 관한 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 2-13 역행렬을 이용한 동차연립일차방정식의 해

n차 정사각행렬 A가 가역행렬이고 B가 $n \times 1$ 행렬일 때, 동차연립방정식 $AX = O$는 자명한 해만을 갖는다.[18]

18 [정리 2-13]은 동차연립방정식 $AX = O$가 자명하지 않은 해를 갖는다면 A는 비가역행렬이라는 것과 같은 의미이다.

증명 계수행렬 A가 가역행렬이고 $AX = O$이라면 가역행렬의 역행렬은 유일하므로 $X = A^{-1}O = O$이 주어진 동차연립방정식의 유일한 해이다. 즉, 동차연립방정식 $AX = O$는 자명한 해만을 갖는다. ■

예제 2-27

다음 비가역행렬 A를 계수행렬로 갖는 동차연립방정식의 해를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\3&4&7\end{bmatrix}$$

풀이

주어진 행렬은 비가역행렬이므로 [정리 2-11]로부터 이 행렬을 계수행렬로 갖는 동차연립방정식 $AX=O$은 자명하지 않은 해를 갖는다. 주어진 행렬을 계수행렬로 갖는 동차연립방정식의 첨가행렬의 RREF를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{RREF}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\1&0&1&0\\3&4&7&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

이 첨가행렬에 대응하는 동차연립방정식은 다음과 같다.

$$x+z=0$$
$$y+z=0$$

연립방정식을 풀면 $z=s\,(s\in\mathbb{R})$에 대해 $x=-s$, $y=-s$이다. 즉, 주어진 동차연립방정식은 자명하지 않은 해를 갖는다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 2 3 0;1 0 1 0;3 4 7 0];      % 계수행렬 A 입력
>> B=rref(A)                          % A의 RREF 계산
>> s=sym('s');                        % 심볼릭 변수 s 지정
>> z=s;                               % z=s로 임의의 실수 지정
>> x=-z;y=-z;                         % 변수 x, y의 z에 대한 풀이
>> sol[x, y, z] 1
```

: 결과

```
B =                                   % [예제 2-27]의 결과와 동일
    1  0  1  0
    0  1  1  0
    0  0  0  0
sol =
      [ -s, -s, s]
```

MATLAB TIP!

1 sol[x, y, z] : 심볼릭 변수로 지정된 문자들을 풀이하여 x, y, z를 모두 하나의 변수로 표현하여, x, y, z의 관계를 나타낸다.

유제

다음 행렬 A가 비가역행렬일 때, MATLAB을 사용하여 이 행렬을 계수행렬로 갖는 동차연립방정식의 해를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0\\ -2 & 4 & -6 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2\end{bmatrix}$$

[예제 2-27]로부터 A가 한 행이 모두 0인 행렬과 행동치이면 A는 비가역임을 알 수 있다.[19] 또 A가 비가역행렬이면 동차연립방정식 $AX=O$은 자명하지 않은 해를 갖는다.

19 행렬 A에 기본 행 연산을 시행하여 얻은 행렬을 B라 하면 A와 B는 행동치라고 한다. 행동치에 관한 자세한 내용은 1.3절에서 다루었다.

우리는 이미 [정리 2-11]에서 n차 정사각행렬 A가 가역행렬이고 B가 $n\times 1$ 행렬일 때, 연립방정식 $AX=B$는 유일한 해 $X=A^{-1}B$를 갖는다는 것을 알았다. 이제 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해를 구해 보자.

예제 2-28

다음 연립방정식이 유일한 해를 갖는지 확인하라. 또 주어진 연립방정식의 해를 역행렬을 이용하여 구하라.

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ x-\ y+\ z&=-5\\ -2x+\ y-3z&=9\end{aligned}$$

풀이

주어진 연립방정식의 계수행렬은 다음과 같다.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ -5\\ 9\end{bmatrix}$$

계수행렬의 역행렬이 존재한다면 주어진 연립방정식은 유일한 해 $X=A^{-1}B$를 갖는다. 계수행렬 A의 역행렬을 구하기 위해 $[A \mid I_3]$를 나타낸 다음 RREF $[A \mid I_3]=[I_3 \mid A^{-1}]$을 구하는 과정은 다음과 같다.

$$[A \mid I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{13}(2)]{E_{12}(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{23}\left(\frac{5}{3}\right)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_3(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{31}(-3)]{E_{32}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 15 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$= [\, I_3 \mid A^{-1} \,]$$

따라서 계수행렬이 역행렬을 가지므로 주어진 연립방정식은 유일한 해 $X = A^{-1}B$를 갖는다. 즉,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

이므로 연립방정식의 해는 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> S1=inv(A)*B 1                    % inv 명령어를 이용하여 역행렬 계산
>> S2=A\B 2                         % 오른쪽 나눗셈을 이용하여 역행렬 계산
```

: 결과

```
S1 =                                % [예제 2-28]의 결과와 동일
       2
       4
      -3
S2=
       2
       4
      -3
```

MATLAB TIP!

1 X=inv(A)*B : 역행렬을 구하는 inv 명령어를 이용하여 해를 구한다.

2 X=A\B : 행렬의 왼쪽 나눗셈을 계산하는 명령어 "\"를 이용하여 해를 구한다.

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 2 3;1 -1 1;-2 1 -3];        % 행렬 A 입력
>> I3=eye(3);                       % 단위행렬 지정
>> rref([A,I3])                     % [A|I3]의 RREF 계산
>> Ainv=inv(A)                      % 역행렬 계산
>> B=[1 -5 9]';                     % 행벡터를 전치하여 열벡터 정의
>> X=Ainv*B                         % 연립방정식의 해 계산
```

: 결과

```
ans =                               % [예제 2-28]의 결과와 동일
       1    0    0    2    9    5
       0    1    0    1    3    2
       0    0    1   -1   -5   -3
```

```
Ainv =
      2    9    5
      1    3    2
     -1   -5   -3
X =
    2
    4
   -3
```

유제

MATLAB에서 역행렬을 사용하여 다음 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2.4 특별한 행렬

행렬 중에서도 정사각행렬은 여러 가지 유용한 성질을 가지고 있으며, 모양이 특별한 행렬들이 많기 때문에 특별한 이름을 붙여 사용한다. 이 절에서는 행렬에서 중요한 역할을 하는 특별한 행렬에 대해 살펴본다.

2.4.1 대칭행렬

정사각행렬 A가 $A^T = A$를 만족하면 A를 **대칭행렬**symmetric matrix이라 하고, $A^T = -A$를 만족하면 **반대칭행렬**skew-symmetric matrix이라고 한다. 이 정의로부터 정사각행렬 $A = [a_{ij}]$가 대칭행렬이면 모든 i, j에 대해

$$a_{ij} = a_{ji}$$

임을 알 수 있다. 즉 대칭행렬은 주대각선 성분을 기준으로 대칭인 위치의 성분이 서로 같음을 의미한다. 또한, $A = [a_{ij}]$가 반대칭행렬이면 모든 i, j에 대해

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

이다. 반대칭행렬은 주대각선 성분이 모두 0이고, 주대각선 성분을 기준으로

대칭인 위치의 성분이 부호가 서로 반대임을 의미한다.[20]

예를 들어 다음 행렬 A, B, I_3에 대해 $A=A^T$, $I_3^T=I_3$이므로 A, I_3는 대칭행렬이고, $B^T=-B$이므로 B는 반대칭행렬이다.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&7&-2\\-7&0&5\\2&-5&0\end{bmatrix},\quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

다음 정리에서 알 수 있듯이 일반적으로 정사각행렬은 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타낼 수 있다.

20 $A=[a_{ij}]$가 반대칭행렬이면 모든 i에 대해 $a_{ii}=-a_{ii}$이므로 주대각선성분은 모두 영임을 알 수 있다. 한편 반대칭행렬을 교대행렬alternating matrix이라고도 한다.

정리 2-14 대칭행렬과 반대칭행렬

행렬 A가 임의의 정사각행렬일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A+A^T$은 대칭행렬이고, $A-A^T$은 반대칭행렬이다.

(2) A는 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타낼 수 있다.

$$A=\frac{(A+A^T)}{2}+\frac{(A-A^T)}{2}$$

증명

(1) $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$이므로 $A+A^T$은 대칭행렬이다. 또 $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$이므로 $A-A^T$은 반대칭행렬이다.

(2) (1)로부터 $A+A^T$은 대칭행렬이고, $A-A^T$은 반대칭행렬이다. 따라서 $\frac{1}{2}(A+A^T)$은 대칭행렬이고, $\frac{1}{2}(A-A^T)$은 반대칭행렬이므로

$$A=\frac{(A+A^T)}{2}+\frac{(A-A^T)}{2}$$

이다. 그러므로 A는 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타낼 수 있다. ■

예제 2-29

행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타내라.

풀이

[정리 2−14]로부터 다음이 성립한다.

$$A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$$

따라서 행렬 A를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타내면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> format 'rat'                          % 분수 형태로 출력
>> A=[1 2;3 4];                          % 행렬 A 입력
>> B=1/2*(A+A');                         % 대칭행렬 계산
>> C=1/2*(A-A');                         % 반대칭행렬 계산
>> B+C
```

: 결과

```
ans =                                    % [예제 2-29]의 결과와 동일
      1     2
      3     4
```

유제

MATLAB을 사용하여 행렬 A를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합($A = P + Q$, $P^T = P$, $Q^T = -Q$)으로 나타낼 때 P, Q를 각각 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2 대각행렬

정사각행렬 A의 주대각선 성분 이외의 성분이 모두 0일 때, A를 **대각행렬**diagonal matrix이라 하고, 주대각선 성분이 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}인 대각행렬을 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$으로 나타낸다. 특히 대각행렬 중에서 주대각선 성분이 모두 같은 행렬을 **스칼라행렬**scalar matrix이라고 한다.[21]

21 단위행렬 I_n은 주대각선 성분이 모두 1인 대각행렬이고, 영행렬 O은 주대각선 성분이 모두 0인 대각행렬이다. 특히 단위행렬과 영행렬은 주대각선 성분이 모두 같기 때문에 스칼라행렬이다.

$$A=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

예를 들어 다음은 모두 대각행렬이다. 특히 행렬 I와 행렬 J는 주대각선 성분이 모두 같으므로 스칼라행렬이다.

$$G=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

위 대각행렬은 $G=\mathrm{diag}(-5,7)$, $H=\mathrm{diag}(8,-4,2)$, $I=\mathrm{diag}(1,1,1)$, $J=\mathrm{diag}(-3,-3)$과 같이 나타낼 수 있다.

다음과 같은 $m\times n$ 행렬 A에 대해 두 대각행렬 $D_1=\mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m)$, $D_2=\mathrm{diag}(d_1',\ d_2',\ \cdots,\ d_n')$을 A의 왼쪽과 오른쪽에 곱하면 어떻게 되는지 알아보자.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

두 대각행렬 $D_1=\mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m)$, $D_2=\mathrm{diag}(d_1',\ d_2',\ \cdots,\ d_n')$을 A의 왼쪽과 오른쪽에 각각 곱하면 다음과 같다.[22]

22 대각행렬 D_1, D_2는 각각 m, n차 정사각행렬이다. 대각행렬을 오른쪽에 곱하면 열, 왼쪽에 곱하면 행에 영향을 미친다.

$$\begin{aligned} D_1A &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots\cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots\cdots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots\cdots & d_ma_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD_2 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1'a_{11} & d_2'a_{12} & \cdots\cdots & d_n'a_{1n} \\ d_1'a_{21} & d_2'a_{22} & \cdots\cdots & d_n'a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1'a_{m1} & d_2'a_{m2} & \cdots\cdots & d_n'a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위 식에서 알 수 있듯이 대각행렬 $D_1 = \mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m)$을 행렬 A의 왼쪽에 곱하면 행렬 A의 i행의 각 성분에 대각행렬의 성분 d_i배하는 것과 같다. 또 대각행렬 $D_2 = \mathrm{diag}(d_1',\ d_2',\ \cdots,\ d_n')$을 오른쪽에 곱하면 행렬 A의 j열의 각 성분에 대각행렬의 성분 d_j'배하는 것과 같음을 알 수 있다.

예제 2-30

행렬 A, D에 대해 DA, AD를 각각 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(2,\ -10,\ 100)$$

풀이

DA는 행렬 A의 왼쪽에 대각행렬을 곱하는 것이므로 행렬 A의 각 행에 대각행렬의 해당 성분을 곱해주는 것과 같다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$DA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 16 \\ 0 & -20 & 10 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix}$$

또 AD는 행렬 A의 오른쪽에 대각행렬을 곱하는 것이므로 행렬 A의 각 열에 대각행렬의 해당 성분을 곱해주는 것과 같다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 20 & 800 \\ 0 & -20 & -100 \\ 2 & -20 & 300 \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[1 -2 8;0 2 -1;1 2 3];D=diag([2 -10 100]); 1   % 행렬 A와 대각행렬 D 생성
>> DA=D*A                                            % DA 계산
>> AD=A*D                                            % AD 계산
```

: 결과

```
DA =                                                 % [예제 2-30]의 결과와 동일
     2    -4    16
     0   -20    10
   100   200   300
AD =
     2    20   800
     0   -20  -100
   100   200   300
```

MATLAB TIP!

1 diag([r s t])
- 3차 대각행렬을 생성한다.
- 주대각선 성분을 차례로 적으면 자동으로 행렬의 크기가 결정되어 대각행렬이 생성된다.

유제

MATLAB을 사용하여 행렬 A, D에 대해 DA, AD를 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 8 \\ 5 & 9 & 7 & -10 \\ 0 & -13 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 22 & 45 \end{bmatrix}, \quad D=\operatorname{diag}(-7,\ 30,\ 150)$$

2.4.3 삼각행렬

영이 아닌 성분의 전체 모양이 삼각형인 행렬에 대해 알아보자. 주대각선 성분 아래의 성분이 모두 0인 정사각행렬을 **상 삼각행렬**upper triangular matrix, 위의 성분이 모두 0인 정사각행렬을 **하 삼각행렬**lower triangular matrix이라고 한다. 또 상 삼각행렬과 하 삼각행렬을 통틀어 **삼각행렬**이라고 한다. 즉 상 삼각행렬은 주대각선 성분 위쪽을 제외한 모든 성분이 0이고, 하 삼각행렬은 주대각선 성분 아래쪽을 제외한 모든 성분이 0이다.

예를 들어 주어진 행렬에서 U_4는 주대각선 아래의 모든 성분이 0이므로 상 삼각행렬이고, L_4는 주대각선 위쪽의 모든 성분이 0이므로 하 삼각행렬이다.[23]

$$U_4=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}, \quad L_4=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

삼각행렬의 정의로부터 행렬의 성분을 이용하여 상 삼각행렬과 하 삼각행렬을 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- $U_n=[u_{ij}]_{n\times n}$가 상 삼각행렬이라면 $i>j$일 때, $u_{ij}=0$이다.
- $L_n=[l_{ij}]_{n\times n}$가 하 삼각행렬이라면 $i<j$일 때, $l_{ij}=0$이다.

다음 정리는 삼각행렬의 곱과 역행렬에 관한 성질이다.

정리 2-15 삼각행렬의 성질

(1) 하(상) 삼각행렬들의 곱은 하(상) 삼각행렬이다.

(2) 가역행렬인 하(상) 삼각행렬의 역행렬은 하(상) 삼각행렬이다.

23 상 삼각행렬에서 주대각선 위쪽의 성분 u_{ij}는 0이 아닐 필요는 없다. 마찬가지로 하 삼각행렬에서 주대각선 아래쪽의 성분 l_{ij}도 0이 아닐 필요는 없다. 즉 u_{ij}와 l_{ij}는 0일 수도 있다.

증명

(1) n차 하 삼각행렬 A, B에 대해 $AB=C$라 하면 다음이 성립한다.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i,\ j \le n)$$

$i<j$이면 $a_{ik}=0$ 또는 $b_{kj}=0$이므로 $c_{ij}(i<j)=0$이다. 따라서 C는 하 삼각행렬이다.

(2) 행렬 A가 가역행렬이면 기본행렬 E_1, E_2, $\cdots$, E_k에 대해 다음이 성립한다.

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I_n$$

A가 하 삼각행렬이므로 $E_i\,(1 \le i \le k)$는 I_n에서 기본 행 연산을 할 때 $E_i(c)$와 $E_{ij}(c)$ $(i<j)$일 수밖에 없으므로 하 삼각행렬이다. 즉 $A^{-1}=E_k E_{k-1} \cdots E_1$이고 이들은 하 삼각행렬들의 곱이다. 따라서 하 삼각행렬의 곱은 하 삼각행렬이 되므로 A^{-1}은 하 삼각행렬이다. ■

예제 2-31

다음 삼각행렬 A, B, C, D에 대해 (a), (b), (c), (d)를 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3&2&1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&3&0\\2&1&-5\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2&0&0\\2&1&0\\1&2&-3\end{bmatrix}$$

(a) 두 상 삼각행렬의 곱 AB

(b) 두 하 삼각행렬의 곱 CD

(c) 상 삼각행렬과 하 삼각행렬의 곱 AC

(d) 하 삼각행렬과 상 삼각행렬의 곱 DB

풀이

(a) $$AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2&1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&6&-4\\0&2&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

(b) $$CD=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&3&0\\2&1&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&1&0\\1&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\4&3&0\\1&-9&15\end{bmatrix}$$

(c) $$AC=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&3&0\\2&1&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&9&-15\\3&5&-10\\2&1&-5\end{bmatrix}$$

(d) $$DB=\begin{bmatrix}2&0&0\\2&1&0\\1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2&1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&4&2\\-6&6&1\\-3&6&2\end{bmatrix}$$

```
: 코딩
>> A=[1 2 3;0 1 2;0 0 1];B=[-3 2 1;0 2 -1;0 0 -1];  % 행렬 A, B, C, D 생성
>> C=[1 0 0;-1 3 0;2 1 -5];D=[2 0 0;2 1 0;1 2 -3];
>> AB=A*B                                           % AB, CD, AC, DB 계산
>> CD=C*D
>> AC=A*C
>> DB=D*B

: 결과
AB =                                                % [예제 2-31]의 결과와 동일
    -3   6  -4
     0   2  -3
     0   0  -1
CD =
     2   0   0
     4   3   0
     1  -9  15
AC =
     5   9  -15
     3   5  -10
     2   1   -5
DB =
    -6   4   2
    -6   6   1
    -3   6   2
```

유제

MATLAB을 사용하여 다음 삼각행렬 A, B, C, D에 대해 (a), (b), (c), (d)를 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 0 & 0 & 100 & 42\\ 0 & 0 & 15 & 72\\ 0 & 0 & 0 & -92\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-38 & 2 & -71 & 0\\ 0 & 27 & -51 & 77\\ 0 & 0 & -41 & 80\\ 0 & 0 & 0 & 23\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

(a) 두 상 삼각행렬의 곱 AB
(b) 두 하 삼각행렬의 곱 CD
(c) 상 삼각행렬과 하 삼각행렬의 곱 AC
(d) 하 삼각행렬과 상 삼각행렬의 곱 DB

예제 2-32

다음 하 삼각행렬의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

풀이

역행렬을 구하기 위해 $[A \mid I_3]$라 놓고 기본 행 연산을 시행하면 다음과 같다.

$$[A \mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{13}(-1)]{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{3}{2} & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_3\left(-\frac{1}{3}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

따라서 하 삼각행렬 A의 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Command Window

: 코딩

```
>> format 'rat'                          % 분수 형태로 출력
>> A=[2 0 0;2 1 0;1 2 -3];               % 행렬 A 입력
>> Ainv=inv(A)                           % A의 역행렬 계산
```

: 결과

```
Ainv =                                   % [예제 2-32]의 결과와 동일
        1/2   0     0
        -1    1     0
        -1/2  2/3  -1/3
```

유제

MATLAB을 사용하여 다음 삼각행렬 A, B의 역행렬을 각각 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 17 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

2.4.4 멱영원행렬

양의 정수 k와 영이 아닌 실수 a에 대해 a의 k 거듭제곱은 0이 아니므로, $a^k \neq 0$이다. 그러나 행렬의 거듭제곱에서는 이와 같은 실수의 성질이 성립하지 않는 경우가 있어, $A^k = O$인 행렬이 존재한다.

양의 정수 k와 영행렬이 아닌 n차 정사각행렬 A에 대해 $A^k = O$을 만족하면 행렬 A를 **멱영원행렬**nilpotent matrix[24]이라고 한다. 이때 $A^k = O$를 만족시키는 최소 양의 정수 k를 행렬 A의 **닐포텐시**nilpotency라 한다.

24 멱영원행렬은 '거듭제곱이 영인 행렬'이라고도 한다.

예제 2-33

행렬 A가 멱영원행렬임을 확인하고, 닐포텐시를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

풀이

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이므로 A는 멱영원행렬이고, 닐포텐시는 3이다.

멱영원행렬은 다음과 같은 성질을 갖는다.

정리 2-16 멱영원행렬의 성질

n차 정사각행렬 A가 닐포텐시가 k인 멱영원행렬이면 행렬 $I - A$는 가역행렬이고 다음이 성립한다.

$$(I_n - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} \quad (2.13)$$

증명

$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I - A^k$이고 $A^k = 0$이므로

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I$$ [25]

이다. 즉 다음과 같다.

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$ ■

25 $1-a^k = (1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{k-1})$

예제 2-34

다음 행렬 A의 닐포텐시를 이용하여 $(I-A)^{-1}$을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

풀이

$A^3=O$이므로 행렬 A의 닐포텐시는 3이고, [정리 2-17]에 의하여 $I-A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$은 가역행렬이다. 즉 $(I-A)^{-1}$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(I-A)^{-1}&=I+A+A^2\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Command Window

: 코딩

```
>> A=[0 1 2;0 0 1;0 0 0];          % 행렬 A 입력
>> I=eye(3);                        % 3차 단위행렬 생성
>> IAinv=inv(I-A)                   % (I−A)^-1 계산
>> B=I+A+A^2 1                      % I+A+A^2 계산
```

: 결과

```
IAinv =                             % [예제 2-34]의 결과와 동일
     1     1     3
     0     1     1
     0     0     1
B =
     1     1     3
     0     1     1
     0     0     1
```

MATLAB TIP!

1 A^n : 행렬 A를 n번 거듭제곱한 결과를 계산한다.

유제

MATLAB에서 행렬의 거듭제곱을 사용하여 다음 행렬의 닐포텐시가 3임을 확인하고 $I-A$의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 8 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

2.5 행렬의 활용

정보화 사회에서는 정보보안이 무엇보다도 중요하다. 따라서 군사목적으로 만들어진 암호가 이제는 모든 정보를 보호하는 데 사용되고 있다. 또한 정보를 보호하기 위해 암호문을 만들고 복호 또는 해독하는 기술은 선형대수학을 이용하고 있다. 이 절에서는 암호에 활용되는 선형대수학에 대해 알아보도록 한다. 선형대수학은 암호에서 다양하게 활용되지만 여기서는 문자를 행렬 모양으로 늘어놓았던 플레이페어Playfair 암호와 행렬을 이용하는 암호인 힐Hill 암호에 대해 알아보자.

2.5.1 플레이페어 암호

제1차세계대전에서 영국군이 사용했던 **플레이페어 암호**는 영국의 킹스 대학의 철학 교수인 위트스톤C. Wheatstone에 의해 개발되어 그의 친구인 플레이페어Baron Playfair에 의해 발표된 암호 방식이다. 플레이페어 암호 방식은 [표 2-1]과 같이 5×5의 행렬에 25자의 영문자를 임의로 나열하여 평문을 암호화한다. 이때 J는 I와 동일시한다.

[표 2-1] 플레이페어 암호표

T	I	G	E	R
S	A	B	C	D
F	H	K	L	M
N	O	P	Q	U
V	W	X	Y	Z

암호화하기 전에 먼저 평문 문자를 두 문자씩 나누고 동일한 문자가 연속될 때는 연속되는 동일한 문자 사이에 모조 문자(예를 들어 X)를 삽입한다. 또 이러한 과정을 거친 평문의 문자 수가 홀수이면 임의의 문자 하나를 첨가한다. 암호화는 평문 $M=(m_1,\ m_2)$의 두 문자 m_1, m_2를 암호문 $C=(c_1,\ c_2)$의 두 문자 c_1, c_2로 변환하는 것으로 다음 단계를 거친다.

❶ 평문 m_1과 m_2가 플레이페어 암호표의 같은 행에 있으면 c_1, c_2는 각각 m_1, m_2의 오른쪽의 문자로 대치되며, 이때 첫 번째 열은 마지막 열의

오른쪽 문자로 한다.

U $M = (\mathrm{AD}) \longrightarrow C = (\mathrm{BS})$

❷ 평문 m_1과 m_2가 플레이페어 암호표의 같은 열에 있으면 c_1, c_2는 각각 m_1, m_2의 아래쪽 문자로 대치하며 첫 번째 행은 마지막 행 아래의 문자로 간주한다.

U $M = (\mathrm{KG}) \longrightarrow C = (\mathrm{PB})$

❸ 평문 m_1과 m_2가 플레이페어 암호표의 서로 다른 행 또는 다른 열에 있으면 c_1, c_2는 m_1과 m_2를 포함하는 사각형의 모퉁이 문자로 하되 c_1은 m_1과 같은 행에, c_2는 m_2와 같은 행의 문자로 한다.

U $M = (\mathrm{RK}) \longrightarrow C = (\mathrm{GM})$

❹ 만일 $m_1 = m_2$이면 m_1과 m_2 사이에 모조 문자 X를 넣는다.

U $M = (\mathrm{SS}) \longrightarrow M = (\mathrm{SXS})$

❺ 만일 문자의 수가 홀수이면, 평문의 끝에 모조 문자 X를 넣는다.

U $M = (\mathrm{SXS}) \longrightarrow M = (\mathrm{SXSX}) \longrightarrow C = (\mathrm{BVBV})$

예제 2-35

[표 2-1]과 같은 키를 갖는 플레이페어 암호에서 평문 'information security'를 암호화하라.

풀이

주어진 평문을 두 개씩 짝지으면 다음과 같다.

$$M = (\mathrm{in})(\mathrm{fo})(\mathrm{rm})(\mathrm{at})(\mathrm{io})(\mathrm{ns})(\mathrm{ec})(\mathrm{ur})(\mathrm{it})(\mathrm{y})$$

위 평문에서 문자가 홀수 개이므로 마지막에 모조 문자 X를 첨가하면 암호화하고자 하는 평문과 암호화한 암호문은 다음과 같다.

M	i	n	f	o	r	m	a	t	i	o	n	s	e	c	u	r	i	t	y	x
C	T	O	H	N	D	U	S	I	A	W	V	F	C	L	Z	D	G	I	Z	Y

이와 같은 플레이페어 암호는 평문 단문자의 통계적 특성이 암호문에서는 나타나지 않지만, 평문의 중복문자 등의 통계적 특성은 암호문에서도 여전히 나타나므로 해독 가능하다.

2.5.2 힐 암호

힐 암호는 힐Lester S. Hill이 1929년에 제안한 암호로서 제2차세계대전 때 이용되었다. 힐 암호는 평문 n개의 문자를 n개의 암호 문자로 대치하는 것이다.

먼저 힐 암호에서 영문을 암호화하는 방법에 대해 알아보자. 영어의 알파벳은 다음 표에 따라 숫자화할 수 있다.

[표 2-2] **알파벳의 숫자화**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

예를 들어 $n=2$라 하고 $M=(m_1,\ m_2)$를 평문, $C=(c_1,\ c_2)$를 암호문이라 하면 c_1과 c_2는 m_1과 m_2를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$c_1 = am_1 + bm_2$$
$$c_2 = cm_1 + dm_2$$

여기서 일반적으로 평문을 $M=(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n)$로 암호문을 $C=(c_1\ ,c_2,\ \cdots,\ c_n)$라 하고 행렬 $K=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$를 힐 암호의 열쇠 행렬이라 하면, 힐 암호는 다음과 같이 표시된다.

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = KM$$

힐 암호에서 암호를 복호하려면 $C=KM$의 양변에 행렬 K의 역행렬 K^{-1}을 곱해주면 된다.[25]

즉 일반적인 경우 힐 암호 체계는 다음과 같다.

$$K^{-1}C = K^{-1}KM = M$$

25 송신자가 수신자에게 보내고 싶은 보통의 통신문을 **평문**plaintext이라고 하고 평문을 이해할 수 없는 형태의 **암호문**ciphertext으로 변화하는 과정을 **암호화**encryption라 한다. 또 암호문을 본래의 평문으로 바꾸는 과정을 **복호화**decryption라 한다.

정리 2-17 힐 암호 체계

양의 정수 n 과 가역행렬 K 에 대해 힐 암호는 다음과 같이 나타낸다.

- 열쇠 : K
- 암호화 함수 E_K : $(y_1, \cdots, y_n) = E_K(x_1, \cdots, x_n)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 복호 함수 D_K : $D_K(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n)$

$$K^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

예제 2-36

[표 2-2]와 행렬 $K = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$을 이용하여 평문 $M = (NO)$의 힐 암호를 구성하고, 복호하라.

풀이

[표 2-2]를 이용하여 평문 $M = NO$를 숫자로 대치하면 $M = (14,\ 15)$이므로 다음과 같이 힐 암호를 구성한다.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 43 \end{bmatrix}$$

또 이를 복호하면 $K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$이므로 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} M &= K^{-1}C \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57 \\ 43 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $M = (NO)$를 얻을 수 있다.

Command Window

: 코딩

```
>> K=[3 1;2 1];M=[14;15];          % 행렬 K, M 입력
>> C=K*M                           % 행렬 C 계산
>> M=inv(K)*C                      % 행렬 M 계산
```

```
: 결과
C =                                            % [예제 2-36]의 결과와 동일
    57
    43
M =
    14
    15
```

유제

MATLAB에서 [표 2−2]와 행렬 $K=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}$을 사용하여 평문 $M=(GO)$의 힐 암호를 구성하고, 복호하라.

이와 같은 암호방식은 긴 문장을 암호화하는 경우에도 이용할 수 있다.

예제 2-37

[표 2−2]와 행렬 $K=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 단어 사이를 띄우는 기호 *에 27을 부여한 후 다음 문장을 암호화했다가 복호하라.

FOR YOUR EYES ONLY

풀이

[표 2−2]를 이용하여 주어진 문장을 숫자화하면 다음과 같다.

F	O	R	*	Y	O	U	R	*	E	Y	E	S	*	O	N	L	Y
6	15	18	27	25	15	21	18	27	5	25	5	19	27	15	14	12	25

K가 2×2 행렬이므로 다음과 같이 두 행을 가지는 행렬 M으로 만든다. 이때 숫자의 개수가 홀수이면 마지막에 *에 해당되는 숫자 27을 첨가한다.

$$M=\begin{bmatrix}6 & 15 & 18 & 27 & 25 & 15 & 21 & 18 & 27\\ 5 & 25 & 5 & 19 & 27 & 15 & 14 & 12 & 25\end{bmatrix}$$

이를 암호화하기 위해 M의 왼쪽에 K를 곱하여 N을 만든다.

$$\begin{aligned}N=KM&=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 15 & 18 & 27 & 25 & 15 & 21 & 18 & 27\\ 5 & 25 & 5 & 19 & 27 & 15 & 14 & 12 & 25\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}23 & 70 & 59 & 100 & 102 & 60 & 77 & 66 & 106\\ 17 & 55 & 41 & 73 & 77 & 45 & 56 & 48 & 79\end{bmatrix}\end{aligned}$$

행렬 N으로부터 숫자화된 암호문을 만든다.

23, 70, 59, 100, 102, 60, 77, 66, 106, 17, 55, 41, 73, 77, 45, 56, 48, 79

이제, 이 암호문을 행렬 K^{-1}을 이용하여 복호하면 다음이 성립한다.

$$K^{-1}N = M$$

따라서 암호문을 두 행을 가지는 행렬로 만들고, 왼쪽에 K^{-1}을 곱하면 복호할 수 있다.

$$K^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 & 70 & 59 & 100 & 102 & 60 & 77 & 66 & 106 \\ 17 & 55 & 41 & 73 & 77 & 45 & 56 & 48 & 79 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 18 & 27 & 25 & 15 & 21 & 18 & 27 \\ 5 & 25 & 5 & 19 & 27 & 15 & 14 & 12 & 25 \end{bmatrix}$$

[표 2-2]로부터 다음 문장을 얻는다.

6	15	18	27	25	15	21	18	27	5	25	5	19	27	15	14	12	25
F	O	R	*	Y	O	U	R	*	E	Y	E	S	*	O	N	L	Y

Command Window

```
: 코딩
>> M=[6  15  18  27  25  15  21  18  27;5  25  5  19  27  15  14  12  25];
                                                   % 행렬 M 입력
>> K=[3 1;2 1];                                    % 행렬 K 입력
>> N=K*M;                                          % 행렬 N 계산
>> C=inv(K)*N                                      % 행렬 C 계산

: 결과
C =                                                % [예제 2-37]의 결과와 동일
    6   15   18   27   25   15   21   18   27
    5   25    5   19   27   15   14   12   25
```

유제

MATLAB으로 행렬 $K = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$을 사용하여 다음 문장을 암호화했다가 복호하라.

PRACTICE MAKES PERFECT

이제 한글을 암호화하는 방법에 대해 알아보자. 한글로 작성된 문장도 영어로 작성된 경우와 마찬가지로 암호화할 수 있다. 다음 예제를 통하여 한글로 암호화하는 경우를 알아보자.

예제 2-38

[표 2-3]은 한글의 자음과 모음 그리고 특별한 기호를 숫자화하기 위한 것이다. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$을 이용하여 다음 문장을 암호화하라.

'내일 그곳에서 만나자.'

[표 2-3] 한글의 숫자화

ㄱ	ㄴ	ㄷ	ㄹ	ㅁ	ㅂ	ㅅ	ㅇ	ㅈ	ㅊ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ㅋ	ㅌ	ㅍ	ㅎ	ㅏ	ㅑ	ㅓ	ㅕ	ㅗ	ㅛ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ㅜ	ㅠ	ㅡ	ㅣ	ㅐ	ㅒ	ㅔ	ㅖ	*	?
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

풀이

주어진 표를 이용하여 문장을 숫자화하면 다음과 같다.

ㄴ ㅐ ㅇ ㅣ ㄹ * ㄱ ㅡ ㄱ ㅗ ㅅ ㅇ ㅔ ㅅ ㅓ * ㅁ ㅏ ㄴ ㄴ ㅏ ㅈ ㅏ
2 25 8 24 4 29 1 23 1 19 7 8 27 7 17 29 5 15 2 2 15 9 15

A가 3×3 행렬이므로 다음과 같이 3개의 행을 갖는 행렬 M으로 만든다. 숫자의 개수가 3의 배수가 아니면 마지막에 *에 해당하는 29를 계속 첨가한다.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 25 & 8 & 24 & 4 & 29 & 1 & 23 \\ 1 & 19 & 7 & 8 & 27 & 7 & 17 & 29 \\ 5 & 15 & 2 & 2 & 15 & 9 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

같은 방법으로 다음과 같이 숫자화된 암호문을 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} N=AM &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 25 & 8 & 24 & 4 & 29 & 1 & 23 \\ 1 & 19 & 7 & 8 & 27 & 7 & 17 & 29 \\ 5 & 15 & 2 & 2 & 15 & 9 & 15 & 29 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 124 & 35 & 84 & 69 & 132 & 50 & 156 \\ 0 & 54 & 21 & 54 & 20 & 46 & 4 & 46 \\ 22 & 139 & 37 & 86 & 84 & 121 & 65 & 185 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

즉 '내일 그곳에서 만나자.'의 암호문은 다음과 같다.

17, 124, 35, 84, 69, 132, 50, 156, 0, 54, 21, 54, 20, 46, 4, 46, 22, 139, 37, 86, 84, 121, 65, 185

Command Window

: 코딩

```
>> M=[2  25  8  24  4  29  1  23;1  19  7   8   27  7  17  29;
   5 15  2  2  15  9  15 29];                    % 행렬 M 입력
>> A=[3 1 2;2 1 -1;3 1 3];                       % 행렬 A 입력
>> N=A*M                                         % 암호문 행렬 N 계산
```

: 결과

```
N =                                              % [예제 2-38]의 결과와 동일
    17  124  35  84   69  132   50   156
     0   54  21  54   20   46    4    46
    22  139  37  86   84  121   65   185
```

유제

MATLAB으로 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$을 이용하여 다음 문장을 암호화하라.

'내가 하기 싫은 일을 남에게 시키지 말자.'

앞의 예제에서와 같이 $B^{-1}=A$라면 B를 이용하여 만든 암호문은 A를 이용하여 복호할 수 있다. 또한 두 행렬 A, B를 모르면 이 암호문을 복호할 수 없으므로 숫자화하는 표가 알려지더라도 누설될 염려가 없다. 따라서 두 행렬 A, $B(=A^{-1})$만 알려지지 않도록 주의하면 비밀이 보장된다. 또한 이 행렬 A를 정기적으로 바꾸어주면 통신내용의 보안이 효과적으로 유지된다.

행렬 입력하기

행렬은 콤마(,)와 세미콜론(;)을 이용하여 입력할 수 있다. 대괄호([ ]) 안에 1행부터 차례로 원소를 입력하되, 원소는 콤마 또는 공백으로 구분하고 다음 행의 원소를 입력하기 전에는 세미콜론을 이용하여 구분한다.

```
>> A=[1 2;3 4];                  % 콤마와 세미콜론으로 행렬 입력
>> A=[1,2;3,4];                  % 공백과 세미콜론으로 행렬 입력
```

inv 명령어

inv 명령어는 행렬의 역행렬을 구하는 데 사용한다. 명령어의 인자로 이미 입력받은 행렬의 이름을 입력하거나, 행렬을 직접 입력하여 사용할 수 있다.

```
>> A=[1 2;3 4];
>> inv(A);                       % 이미 입력받은 행렬로 역행렬 계산
>> inv([1,2;3,4]);               % 행렬을 직접 입력하여 역행렬 계산
```

trace 명령어

trace 명령어는 정사각행렬의 대각합을 구하는 데 사용한다. 이 명령어의 인자로 이미 입력받은 행렬을 입력하거나, 행렬을 직접 입력하여 사용할 수 있다.

```
>> A=[1 2;3 4];
>> trace(A);                     % 이미 입력받은 행렬로 대각합 계산
>> trace([1,2;3,4]);             % 행렬을 직접 입력하여 대각합 계산
```

diag 명령어

diag 명령어는 대각행렬을 생성하는 데 사용한다. 이 명령어의 인자의 개수에 따라 대각행렬의 차수가 결정되며, 각 인자는 주대각선 원소가 된다.

```
>> diag([1 5 3])                 % 대각행렬 생성
ans =
      1     0     0
      0     5     0
      0     0     3
```

Chapter 02 연습문제

2.1 다음 행렬에 대해 물음에 답하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 6 & -3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}6 & 0 & 2\\ -4 & 3 & 5\\ 7 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

(a) $A=[a_{ij}]$라고 할 때, a_{12}, a_{22}, a_{23}을 구하라.

(b) $B=[b_{ij}]$라고 할 때, b_{11}, b_{31}을 구하라.

(c) $C=[c_{ij}]$라고 할 때, c_{13}, c_{31}, c_{33}을 구하라.

(d) C의 주대각선 성분을 구하라.

2.2 다음 행렬에 대해 $A+B=C$일 때, x, y, z, w를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

2.3 다음 행렬 A, B에 대해 다음을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

(a) A^T (b) $\mathrm{tr}(A)$ (c) $(A+B)^T$ (d) $\mathrm{tr}(A+B)$

2.4 A, B, C가 크기가 같은 행렬이고 a, b는 스칼라라고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

(a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (덧셈의 결합법칙)

(b) $A+(-A)=O$

(c) $(a+b)C=aC+bC$

(d) $(ab)C=a(bC)$

2.5 두 행렬 A, B에 대해 다음을 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

(a) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ (b) $(AB)^T=B^TA^T$

2.6 다음 행렬 중 가역행렬인 것을 찾고, 그 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$

2.7 다음 행렬이 비가역행렬일 때, k의 값을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

2.8 역행렬을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

2.9 다음 행렬을 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타내라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.10 다음 삼각행렬이 가역행렬이기 위한 x값을 결정하라.

$$\begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$$

2.11 다음 행렬이 대칭행렬이 되도록 a, b의 값을 정하라.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 2a & 0 & a+b \\ 3 & 3 & b \end{bmatrix}$$

2.12 다음 동차연립방정식이 자명하지 않은 해를 갖기 위한 a의 값을 구하라.

$$\begin{aligned} (a-1)x + \quad\quad 2y &= 0 \\ 2x + (a-1)y &= 0 \end{aligned}$$

2.13 다음 연립방정식의 b_1, b_2, b_3가 어떤 값을 가질 때 해를 갖는지 결정하라.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= b_1 \\ x \quad\;\; + \; z &= b_2 \\ 2x + y + 3z &= b_3 \end{aligned}$$

2.14 계산하지 말고 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$D=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

2.15 다음 행렬이 멱영원행렬임을 보이고, 닐포텐시를 구하라. 또 $(I_3-A)^{-1}$을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.16 두 행렬 A, B에 대해 $AB=BA$일 필요충분조건은 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$임을 보여라.

2.17 다음 행렬의 닐포텐시를 구하고 각 행렬 A에 대해 $I-A$의 역행렬을 구하라.

(a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.18 n차 정사각행렬 A가 $A^2 = A$를 만족하면 A를 멱등원 행렬이라고 한다. 이때 다음을 보여라.

(a) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$은 멱등원 행렬이다.

(b) A가 멱등원 행렬이면 $(I_n - A)$도 멱등원 행렬이다.

2.19 A, B, C는 연산을 수행할 수 있는 크기의 행렬이고 a, b는 스칼라라고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

(a) $(B+C)A = BA + CA$

(b) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

2.20 A가 정사각행렬이고 r, s가 음이 아닌 정수일 때, $(A^r)^s = A^{rs}$이 성립함을 보여라.

2.21 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$에 대해 $A^2 = 4A - 3I_2$라는 사실과 수학적 귀납법을 이용하여 $n \geq 1$일 때, 다음을 증명하라.

$$A^n = \frac{(3^n - 1)}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I_2$$

2.22 행렬 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$에 대해 $\lim_{n \to \infty} A^n$을 구하라.

2.23 $m \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}(x)]$의 각 성분이 변수 x로 미분 가능한 함수들일 때 $\frac{dA}{dx} = \left[\frac{da_{ij}}{dx}\right]$라 정의하자. 행렬 A, B가 계산 가능한 적당한 크기일 때 다음이 성립함을 보여라.

(a) 실수 k에 대해 $\frac{d}{dx}(kA) = k\frac{dA}{dx}$

(b) $\frac{d}{dx}(A+B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$

(c) $\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$

2.24 다음 행렬 A, B, X에 대해 $X = AX + B$를 만족하는 행렬 X를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2.25 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 성분이 $a, b, c, d \geq 0$, $a + c = 1 = b + d$를 만족할 때, 행렬 A를 마코브 행렬이라고 한다. $P = \begin{bmatrix} b & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}$에 대하여 $A \neq I_2$일 때 다음을 증명하라.

(a) P는 가역행렬이고 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a+d-1 \end{bmatrix}$

(b) $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $n \to \infty$일 때, $A^n \to \dfrac{1}{b+c} \begin{bmatrix} b & b \\ c & c \end{bmatrix}$