Chapter

02

도함수와 미분법

Derivative and Differentiation

임의의 함수를 미분하여 얻은 함수를 도함수라고 한다. 이 장에서는 함수의 극한, 연속 및 도함수의 정의부터 시작하여 여러 가지 형태의 함수를 미분하여 도함수를 구하는 방법을 알아봄으로써 미분에 대한 기본 개념과 기초적인 미분법을 익히기로 한다.

2.1 함수의 극한과 연속

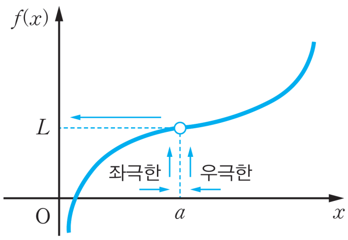
2.1.1 극한의 정의

함수 $f(x)$에서, 변수 x가 a와는 다른 값을 취하면서 a에 무한히 가까워지는 것을 $x \to a$라고 표현한다. $x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 L이라는 값에 근접, 즉 한없이 가까워지는 것을 **수렴**convergence한다고 하고 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2.1}$$

■ 극한, 극한값

이때 $f(x)$가 한없이 가까워지는 값 L을 $f(x)$의 **극한**limit 혹은 **극한값**limit value이라고 한다([그림 2-1]). 식 (2.1)에서 a는 ∞나 $-\infty$가 될 수도 있다.



[그림 2-1]

■ 좌극한, 좌극한값

함수 $f(x)$에서 $x < a$인 x에 대하여, x가 a에 한없이 가까워질 때의 극한값 L을 $x = a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한 또는 좌극한값이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a^- \text{일 때 } f(x) \to L \text{ 또는 } \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

■ 우극한, 우극한값

또한 $x > a$인 x에 대하여, x가 a에 한없이 가까워질 때의 극한값 L을 $x = a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한 또는 우극한값이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$x \to a^+ \text{일 때 } f(x) \to L \text{ 또는 } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

즉 $x < a$이면서 a에 가까워지는 경우는 좌측에서 a로 다가오는 것이므로 좌극한, $x > a$이면서 a에 수렴하는 경우는 우측에서 a로 다가오는 것이므

로 우극한이라고 한다.[1]

그러므로 식 (2.1)과 같이 극한값이 존재한다는 것은 좌극한값과 우극한값이 같아지는

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

이 성립한다는 것을 의미한다.[2] 만약

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

라면 극한값은 존재하지 않는다.

1 좌극한을 $\lim_{x \to a-0} f(x) = L$로, 우극한을 $\lim_{x \to a+0} f(x) = L$로 이해할 수 있다.

2 $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

2.1.2 극한의 정리

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 존재할 때, $\lim_{x \to a} f(x) = L$로 수렴하고 $\lim_{x \to a} g(x) = M$으로 수렴하면, 다음과 같은 정리가 성립한다. 여기서 a와 b는 상수이다.

정리 2-1 극한의 정리

(1) $\lim_{x \to a} b = b$

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = L \pm M$ (복부호동순)

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (단, $g(x) \neq 0$, $M \neq 0$)

(5) $\lim_{x \to a} kf(x) = kL$

(6) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

[정리 2-1]의 (6)은 사인함수의 극한에 대한 것으로 삼각함수의 도함수에서 기본이 되는 중요한 이론이다.

예제 2-1

key point
극한의 정리를 참고한다.

다음 극한값을 구하라.

(a) $\lim_{x\to 10} 5$

(b) $\lim_{x\to -1}(2x^2-x+5)$

(c) $\lim_{x\to 2} x(3x-2)$

(d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x+10}{x^3-1}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(f) $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\pi\sin\theta}{\theta}$

풀이

(a) [정리 2-1]의 (1)에 의해 $\lim_{x\to 10} 5=5$

(b) $\lim_{x\to -1}(2x^2-x+5)=2(-1)^2-(-1)+5=8$

(c) $\lim_{x\to 2} x(3x-2)=2(3\cdot 2-2)=2(4)=8$

(d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x+10}{x^3-1}=\dfrac{2\cdot 2+10}{2^3-1}=\dfrac{14}{7}=2$

(e) 그대로 계산하면 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$의 형태가 되지만,

$\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$이므로 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

이다.

(f) $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\pi\sin\theta}{\theta}=\pi\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\pi\cdot 1=\pi$

2.1.3 부정형의 극한

함수 $f(x)$의 극한이 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$와 같은 형태일 때, 부정형이라고 한다. 이와 같은 부정형의 극한을 구하기 위해서는 다음과 같은 전처리가 필요하다.

■ 부정형의 극한 전처리

❶ $\dfrac{0}{0}$의 형태는 인수분해 또는 유리화한다.

❷ $\dfrac{\infty}{\infty}$의 형태는 분모의 최고차항으로 나눈다.

예제 2-2

다음 극한값을 구하라.

(a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

(c) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+10}{x^2+2}$

key point

$\frac{0}{0}$ 이나 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 인수분해 또는 유리화하거나 분모의 최고차항 또는 유리화로 나눈다.

풀이

(a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

(b) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)=1$

(c) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

(d) 원식을 분모의 최고차항인 x^2으로 나누어 계산한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+10}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{10}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$$

2.1.4 연속의 정의

일반적으로 함수 $f(x)$의 그래프가 임의의 구간에서 끊어지지 않고 계속 이어져 있는 상태를 그 구간에서 연속이라고 한다. 즉 함수 $f(x)$가 점 a에서 정의되어 있어

$$y=f(x) \tag{2.2}$$

와 같은 식이 성립할 때, 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서 **연속**continuous이라고 한다. 만약 함수 $f(x)$가 점 $x=a$에서 식 (2.2)를 만족하지 않으면, 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서 **불연속**discontinuous이라고 한다.

■ 연속과 불연속

불연속이 되는 경우는 다음의 세 가지가 있다.

■ 불연속의 경우

❶ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 함숫값이 정의되지 않지만 극한값은 존재한다.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x),\ f(a)\text{는 정의되지 않음}$$

❷ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 함숫값이 정의되었지만 극한값이 존재하지 않는다.

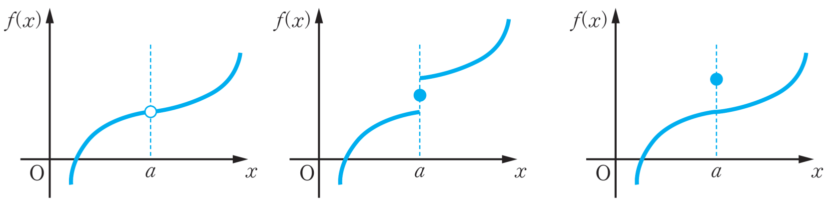
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x),\ f(a)\text{는 정의됨}$$

❸ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 함숫값이 정의되었고, 극한값이 존재하지만 함숫값과 극한값이 다르다.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

[그림 2-2]는 점 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 경우의 예이다.

■ 불연속의 예



(a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

[그림 2-2]

위 세 가지 불연속의 정의로부터 유추할 수 있는 **연속의 정의**는 다음과 같다.

■ 연속의 정의

❶ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. 즉, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

❷ $x=a$에서 정의되는 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

❸ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

예제 2-3

key point
$x=2$를 기준으로 좌우 극한을 조사한다.

다음 함수들이 점 $x=2$에서 연속인지 불연속인지를 조사하라.

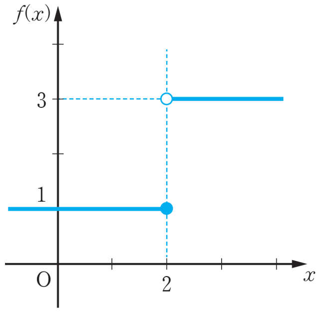
(a) $f(x) = x^2 + x$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$

풀이

(a) $\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}(x^2+x)=4+2=6$이 되어서, $f(2)=6$이 존재하므로 연속이다.

(b) [그림 2-3]에서 보는 것과 같이 $\lim_{x\to2^-} f(x)=1=f(2)$가 되지만 $\lim_{x\to2^+} f(x)=3$이 된다. 따라서 $x\to2$일 때 좌우극한의 값이 다르므로 연속이 아니다.

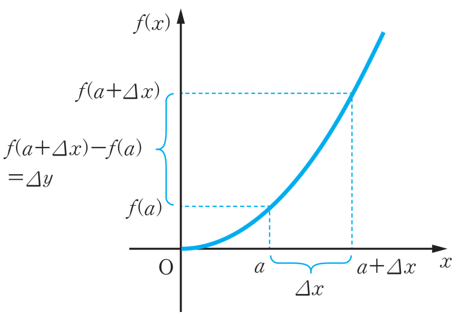


[그림 2-3]

2.2 도함수

2.2.1 변화율과 미분계수

a에 임의의 수 Δx를 더하면 $a+\Delta x$가 되는데, 이때 x는 **증분**increment Δx를 가진다고 한다. 즉 Δx는 x의 변화량을 나타내는 것이다. 함수 $y=f(x)$에서, x의 값이 a에서 $a+\Delta x$로 Δx만큼 변화할 때, y의 값은 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$만큼 변하게 된다([그림 2-4]).



[그림 2-4]

따라서 x의 변화량 Δx와 y의 변화량 Δy의 비를 나타내는 다음과 같은 식을 **평균변화율**average rate of change이라고 한다.

■ 평균변화율

$$\text{기울기}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{2.3}$$

$\Delta x \to 0$일 때

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

와 같이 평균변화율의 극한이 존재한다면, 식 (2.5)와 같은 식을 **순간변화율**instantaneous rate of change이라고 한다.

■ 순간변화율

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{2.5}$$

■ 미분계수의 정의

또한 식 (2.5)를 $x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 **미분계수**differential coefficient라고도 한다. 이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**differentiable하다고 한다. 함수 $y=f(x)$가 임의의 구간 내의 모든 점에서 미분계수를 가지는 경우, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 표현한다.

미분계수는 다음과 같이 표현할 수도 있으며, 모두 같은 뜻이다.

■ 미분계수의 여러 가지 표현

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{aligned}$$

예제 2-4

함수 $y=f(x)=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(a) x가 1에서 3으로 변할 때, x의 변화량 Δx와 y의 변화량 Δy를 구하라.

(b) (a)와 같이 변화하는 경우, 평균변화율을 구하라.

(c) (b)와 같은 평균변화율을 가질 때, $x=1$에서의 미분계수를 미분계수의 정의에 따라 구하라.

key point

평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 미분계수는 $f'(a)$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$
이다.

풀이

(a) $x_1=1$, $x_2=3$으로 두면

$\Delta x=x_2-x_1=3-1=2$, $\Delta y=y_2-y_1=(x_2)^2-(x_1)^2=3^2-1^2=8$이다.

(b) 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{2} = 4$이다.

(c) $x = 1$에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - (1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2.2.2 도함수의 정의

미분계수의 정의에서 $x = a$와 같이 특정한 값을 지정하지 않고, 변수 x 그대로 사용하여 어떤 값에 대해서도 적용할 수 있는 형태로 바꾸어 쓰면 다음과 같은 식이 된다.

■ 도함수의 정의식

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.6}$$

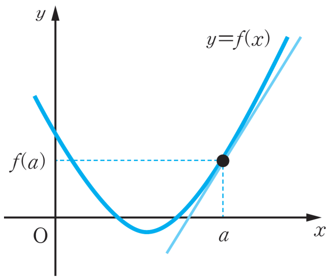
■ 도함수와 미분

식 (2.6)에서 $f'(x)$를 $f(x)$의 **도함수**derivative라고 하고, 이와 같이 임의의 함수 $y = f(x)$의 도함수 $y' = f'(x)$를 구하는 것을 **미분한다**differentiate고 표현한다.

함수 $y = f(x)$의 도함수는 위에서 표기한 대로 미분을 의미하는 기호 $'$prime을 사용하여 y', $f'(x)$로 표현하기도 하고, 변수 x로 함수 $y = f(x)$를 미분하다는 의미로 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 표현하기도 한다.

도함수 $f'(x)$는 x가 임의의 점을 나타낼 때, 함수 $f(x)$상의 점 x에서 이루어지는 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 $x = a$라는 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$가 된다. 따라서 임의의 점에서의 미분계수는 곧 그 점에 접하는 접선의 기울기가 된다는 사실을 알 수 있다.

■ 접선의 기울기



[그림 2–5]

예제 2-5

key point

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

접선의 기울기는 미분계수이다.

$y=f(x)=x^2$일 때, (a) 정의에 의하여 함수 $f(x)$의 도함수를 구하고, (b) 함수 $f(x)$와 점 $x=2$에서 접하는 직선의 기울기를 구하라.

풀이

(a) 도함수의 정의 식 (2.6)에 의하여 $y=f(x)=x^2$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x)=2x \end{aligned}$$

그러므로 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)=2x$이다.

(b) 점 $x=2$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$로 나타나므로 $x=2$에서의 미분계수를 구하는 것과 같다. 따라서 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2-(2)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(4+\Delta x)=4 \end{aligned}$$

이므로 접선의 기울기는 4가 된다.

2.3 도함수를 구하는 기본공식

이 절에서는 도함수를 구하는 기본적인 공식, 즉 미분법에 대한 기본적인 공식을 알아보기로 한다.

2.3.1 상수함수의 도함수

임의의 상수로 이루어진 함수 $y=c$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=\frac{dc}{dx}=0 \tag{2.7}$$

■ 상수함수의 도함수

증명

$$y'=\frac{d}{dx}[c]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$$

■

예제 2-6

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $f(x)=\sqrt{5}$ (b) $y=0$

key point

상수함수의 도함수꼴 : $\dfrac{d(\text{상수})}{dx}=0$

풀이

(a) 함수 $y=f(x)=c$(상수)의 도함수는 $y'=\dfrac{dc}{dx}=0$이므로

$$y'=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d(\sqrt{5})}{dx}=0$$

이다.

(b) 함수 $y=0$도 $y=f(x)=c$(상수)에 해당되므로

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(0)}{dx}=0$$

이다.

2.3.2 거듭제곱함수의 도함수

$y = x^n\ (n > 0)$과 같이 표현되는 **거듭제곱함수(멱함수)**power function의 도함수는 다음과 같다.

■ 거듭제곱함수의 도함수

$$y' = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.8}$$

증명

$$y' = \frac{d}{dx}[x^n] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right\} - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right\}$$

$$= nx^{n-1}$$

■

예제 2-7

key point
거듭제곱함수의 도함수꼴 : $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = -3x^{-5}$

풀이

(a) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y' = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

이다.

(b) $y' = \frac{d(-3x^{-5})}{dx} = -3\frac{d(x^{-5})}{dx} = (-3)(-5)x^{-5-1} = 15x^{-6} = \frac{15}{x^6}$

2.3.3 합의 도함수

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 합 $f(x)+g(x)$나 차 $f(x)-g(x)$의

도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y' = \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x) \qquad (2.9)$$

■ 합의 도함수

증명

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

■

예제 2-8

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $y = 3x^2 - 5x$ (b) $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^{-5}$

key point

합의 도함수꼴 :

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

풀이

(a) $y' = 3\frac{dx^2}{dx} - 5\frac{dx}{dx} = 3(2x) - 5(1) = 6x - 5$

(b) $y' = 2\frac{d(\sqrt{x})}{dx} + \frac{1}{5}\frac{d(x^{-5})}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{5}(-5)x^{-5-1}$

$$= x^{-\frac{1}{2}} - x^{-6} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^6}$$

2.3.4 곱의 도함수

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 곱인 $f(x)g(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y' = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (2.10)$$

■ 곱의 도함수

증명

$$y' = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta} x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \right]$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ ■

또한 미분가능한 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 곱인 $f(x)g(x)h(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

■ 세 함수의 도함수

$$y' = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \quad (2.11)$$

예제 2-9

key point
곱의 도함수꼴 :
$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $f(x) = (x-1)(x+2)$ (b) $f(x) = x^3(x^2-1)$

풀이

(a) $y' = \frac{d\{(x-1)(x+2)\}}{dx} = (x-1)'(x+2) + (x-1)(x+2)'$

$= (1)(x+2) + (x-1)(1) = 2x+1$

(b) $y' = \frac{d\{x^3(x^2-1)\}}{dx} = (x^3)'(x^2-1) + (x^3)(x^2-1)'$

$= 3x^2(x^2-1) + x^3(2x) = x^2(5x^2-3)$

2.3.5 몫의 도함수

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 몫인 $f(x)/g(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다. 이때 $g(x) \neq 0$이다.

■ 몫의 도함수

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (2.12)$$

증명

$y=f(x)\dfrac{1}{g(x)}=f(x)G(x)$로 두면 곱의 도함수 공식을 이용하여

$y'=\dfrac{d}{dx}[f(x)G(x)]=f'(x)G(x)+f(x)G'(x)$와 같이 구할 수 있다.

그러므로 먼저 $G'(x)=\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]$을 구해보면

$$\begin{aligned}
G'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{g(x+\Delta x)g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]\\
&=-\frac{1}{\{g(x)\}^2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

가 되고, 이 값을 $y'=\dfrac{d}{dx}[f(x)G(x)]$에 대입하면

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{d}{dx}[f(x)G(x)]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]\\
&=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]\\
&=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\left[\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right]\\
&=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

가 된다. ■

예제 2-10

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $y=\dfrac{1}{2x+1}$

(b) $y=\dfrac{3x}{x^2-7}$

key point

몫의 도함수꼴 :

$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

풀이

(a) $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x+1}\right)$$
$$= \frac{(1)'(2x+1)-(1)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{0(2x+1)-(2)}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(b) $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2-7}\right)$$
$$= \frac{(3x)'(x^2-7)-3x(x^2-7)'}{(x^2-7)^2}$$
$$= \frac{3(x^2-7)-3x(2x)}{(x^2-7)^2} = \frac{-3x^2-21}{(x^2-7)^2}$$
$$= \frac{-3(x^2+7)}{(x^2-7)^2}$$

2.4 함수의 형태에 따른 도함수

2.4.1 합성함수의 도함수

함수 $y=(ax+b)^{10}$에 대하여 생각해보자. 함수를 나타내는 식에서 $ax+b=u$라고 두면, 원래의 함수는 $y=u^{10}$으로 나타낼 수 있다. 이때 원래의 함수 $y=(ax+b)^{10}$은 함수 $y=f(u)=u^{10}$과 함수 $u=ax+b$의 합성함수가 된다.

이와 같이 두 함수 $y=f(u)$와 $u=g(x)$가 미분가능할 때, **합성함수** composite function인 $y=f(g(x))$도 미분가능하며, 그 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

■ 합성함수의 도함수

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2.13}$$

Check it up!

✔ **합성함수의 연속 미분**

$y=f(g(x))$에 대한 도함수는 $y'=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$와 같이 겉과 속을 연속적으로 미분을 수행하는 형태가 된다.

$$y'=\{f(g(x))\}'=\underbrace{f'(g(x))}_{\text{겉미분}}\ \underbrace{g'(x)}_{\text{속미분}}$$

예제 2-11

다음 합성함수의 도함수를 구하라.

(a) $y=(1-3x)^2$ (b) $y=\sqrt{3x^2+2}$

key point
합성함수의 도함수꼴 :
$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

풀이

(a) $u=1-3x$라고 두면 $y=u^2$이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(1-3x)^2=\frac{d}{dx}u^2 \\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot(-3) \\ &= -6u \\ &= 6(3x-1) \end{aligned}$$

(b) $u=3x^2+2$라고 두면 $y=u^{\frac{1}{2}}$이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+2}=\frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(6x) \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+2}} \end{aligned}$$

2.4.2 음함수의 도함수

변수 x에 의한 함수 y에 대하여, $y=f(x)$의 형태로 정의되어 있는 함수

■ 양함수와 음함수

를 **양함수**explicit function, $f(x, y) = 0$의 형태로 정의되어 있는 함수를 **음함수**implicit function라고 한다.

음함수 $f(x, y) = 0$의 형태 그대로 도함수를 구할 경우,

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

와 같은 합성함수의 미분법에서 $y = \{f(x)\}^n$, $u = f(x)$로 두면

$$y' = \frac{d\{f(x)\}^n}{dx} = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

가 된다. 여기서 $y = f(x)$라고 두면

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$$

가 된다.

그러므로 음함수의 도함수를 구할 경우에는 다음과 같은 성질을 이용한다.

■ 음함수의 도함수

$$\frac{d}{dx} y^n = \frac{d}{dy} y^n \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy}{dx} \tag{2.14}$$

예제 2-12

key point

음함수의 도함수꼴 :

$\frac{d}{dx} y^n = \frac{d}{dy} y^n \cdot \frac{dy}{dx}$

$= ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$

다음 음함수의 도함수를 구하라.

(a) $y^2 = 2x$ (b) $2x^2 + y^2 - 5 = 0$

풀이

(a) $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(2x)$에서 $\frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(2x)$이므로

$\frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x)$, $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2$이다. 따라서 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$이다.

(b) $\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(5) = 0$에서 $4x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$이다.

따라서 $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$이다.

2.4.3 매개변수함수의 도함수

x와 y가 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 x와 y가 아닌 다른 변수 t를 매개변수로 하는 함수인 경우, y는 t를 매개변수로 하는 x의 **매개변수함수** parametric function라고 한다. $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능할 때, 매개변수함수 y의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{2.15}$$

■ 매개변수함수의 도함수

예제 2-13

매개변수함수를 이용하여 도함수 $y'=\frac{dy}{dx}$를 구하라.

(a) $x=t+1$, $y=t^2+2t-1$

(b) $x=\sqrt{t}$, $y=t-\frac{1}{t}$ $(x>0)$

key point

매개변수의 도함수꼴 : $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

풀이

(a) $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t+1)=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^2+2t-1)=2t+2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{1}=2(t+1)$$

$t=x-1$이므로 $y'=2(x-1+1)=2x$이다.

(b) $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t-\frac{1}{t}\right)=1+\frac{1}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=2\sqrt{t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$t=x^2$ $(x>0)$이므로 $y'=2x\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=2\left(x+\frac{1}{x^3}\right)$

2.4.4 역함수의 도함수

함수 $y=f(x)$의 역함수가 $x=f(y)$라고 할 때, 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\frac{df(y)}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$$

가 되므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

이 성립한다.

그러므로 역함수의 도함수는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

■ 역함수의 도함수

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}\quad (\text{단, } f'(y)\neq 0) \tag{2.16}$$

예제 2-14

key point
역함수의 도함수꼴 :
$\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}$

다음 함수의 도함수를 구하라.

(a) $x=y^2$ (b) $x=\frac{y}{y-1}$

풀이

(a) $\frac{dx}{dy}=2y$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}$ 이다.

(b) $\frac{dx}{dy}=\frac{y'(y-1)-y(y-1)'}{(y-1)^2}=\frac{-1}{(y-1)^2}$ 이므로,

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-(y-1)^2$ 이다.

2.5 삼각함수의 도함수

삼각함수는 전기 · 전자 공학 분야에서 신호를 표현하는 데 중요하게 사용되는 함수이다. 그러한 신호를 처리하기 위해서는 삼각함수의 도함수에 대해서도 알아둘 필요가 있다. 여러 가지 삼각함수의 미분법을 정리하면 다음과 같다.

정리 2-2 삼각함수의 미분법

(1) $y' = \dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (2) $y' = \dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(3) $y' = \dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (4) $y' = \dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

(5) $y' = \dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

(6) $y' = \dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

증명

(1) $y' = \dfrac{d}{dx}(\sin x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$ [3]

$$= \cos x$$

3 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$이다.

(2) $y' = \dfrac{d}{dx}(\cos x) = \dfrac{d}{dx}\left[\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin x$$

(3) $y' = \dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\frac{d(\sin x)}{dx}\cos x - \sin x\frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

4 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \ 4$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x$$

(4) $$y' = \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{0 - \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \sec x \tan x$$

(5) $$y' = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{0 - \frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

(6) $$y' = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\frac{d(\cos x)}{dx}\sin x - \cos x\frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = -\operatorname{cosec}^2 x$$ ■

예제 2-15

key point
삼각함수의 미분법을 참고한다.

다음 삼각함수의 도함수를 구하라.

(a) $y = \sin ax$ (b) $y = 3\cos 3x$

(c) $y = \operatorname{cosec} 5x$ (d) $y = a\tan bx$

(e) $y = \tan(1 + 3x^2)$ (f) $y = \sec 2x + \cot 3x$

풀이

(a) $$y' = \frac{d}{dx}(\sin ax) = \frac{d}{dx}(\sin ax) \cdot \frac{d}{dx}(ax)$$

$$= \cos ax \cdot a = a\cos ax$$

(b) $y' = \dfrac{d}{dx}(3\cos 3x) = 3\dfrac{d}{dx}(\cos 3x) \cdot \dfrac{d}{dx}(3x)$

$$= (-3\sin 3x) \cdot 3 = -9\sin 3x$$

(c) $y' = \dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} 5x) = -\operatorname{cosec} 5x \cot 5x \cdot \dfrac{d}{dx}(5x)$

$$= (-\operatorname{cosec} 5x \cot 5x) \cdot 5 = -5\operatorname{cosec} 5x \cot 5x$$

(d) $y' = \dfrac{d}{dx}(a\tan bx) = a\dfrac{d}{dx}(\tan bx) \cdot \dfrac{d}{dx}(bx)$

$$= a\sec^2 bx \cdot b = ab\sec^2 bx$$

(e) $y' = \dfrac{d}{dx}\{\tan(1+3x^2)\} = \sec^2(1+3x^2) \cdot \dfrac{d}{dx}(1+3x^2)$

$$= \sec^2(1+3x^2) \cdot 6x = 6x\sec^2(1+3x^2)$$

(f) $y' = \dfrac{d}{dx}(\sec 2x + \cot 3x)$

$$= \frac{d}{dx}(\sec 2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(\cot 3x) \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= \sec 2x \tan 2x \cdot 2 - \operatorname{cosec}^2 3x \cdot 3$$

$$= 2\sec 2x \tan 2x - 3\operatorname{cosec}^2 3x$$

2.6 로그함수와 지수함수의 도함수

2.6.1 로그함수의 도함수

1장에서 살펴보았듯이, 로그함수 $y = \log_a x$의 밑수 a가 상수 e인 경우를 자연로그함수라고 하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \log_e x = \ln x$$

로그함수의 미분법을 정리하면 다음과 같다.

정리 2-3 로그함수의 미분법

(1) 로그함수 $y=\ln x$ 에서 $y'=\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$

(2) 로그함수 $y=\log_a x$ 에서 $y'=\dfrac{d}{dx}\log_a x=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{1}{x}\log_a e$

로그함수의 미분법을 증명하기 위해서는 먼저 다음과 같은 식이 성립한다는 사실을 알아야 한다.

■ e의 정의

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{2.17}$$

[정리 2-3]은 다음과 같이 증명할 수 있다.

증명

(1) $y'=\dfrac{d}{dx}(\ln x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\ln e$$

$$=\frac{1}{x}$$

(2) $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ 이므로

$$y'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e$$

■

예제 2-16

다음 로그함수의 도함수를 구하라.

(a) $y=\ln ax$ (b) $y=\log_b(3x+2)$

key point

$\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{d}{dx}\log_a x=\dfrac{1}{x}\log_a e$

풀이

(a) $y'=\dfrac{1}{ax}\cdot\dfrac{d}{dx}(ax)=\dfrac{1}{ax}\cdot a=\dfrac{1}{x}$

(b) $y'=\dfrac{1}{(3x+2)\ln b}\cdot\dfrac{d}{dx}(3x+2)=\dfrac{1}{(3x+2)\ln b}\cdot 3=\dfrac{3}{(3x+2)\ln b}$

2.6.2 지수함수의 도함수

지수함수의 미분법을 정리하면 다음과 같다.

정리 2-4 지수함수의 미분법

(1) 지수함수 $y=a^x$ 에서 $y'=\dfrac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$

(2) 지수함수 $y=e^x$ 에서 $y'=\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$

증명

(1) $x=\log_a y$가 되므로

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a$$

(2) $x=\log_e y$가 되므로

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x$$

TIP (2)가 성립한다고 가정하면, (1)은 $(a^x)'=(e^{\ln a^x})'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a$로도 증명 가능하다.

■

예제 2-17

key point

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

다음 지수함수의 도함수를 구하라.

(a) $y = e^{-100x}$ (b) $y = a^{2x}$

풀이

(a) $y' = e^{-100x} \cdot \dfrac{d}{dx}(-100x) = e^{-100x} \cdot (-100) = -100e^{-100x}$

(b) $y' = a^{2x}\ln a \cdot \dfrac{d}{dx}(2x) = 2a^{2x}\ln a$

2.7 고계 도함수

2.7.1 2계 도함수

함수 $y = f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능하면 그 도함수는

▪ 2계 도함수

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \tag{2.18}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이것을 함수 $f(x)$의 **2계 도함수**[2nd derivative]라고 하고, y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ 등의 기호로 나타낸다.

2.7.2 고계 도함수

2계 도함수와 같은 방법으로 함수 $y = f(x)$를 n회 미분한 도함수는

▪ n계 도함수

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \tag{2.19}$$

와 같이 나타낼 수 있는데, 여기서 $n > 2$인 경우, 즉 3회 이상 미분한 도함수를 **고계 도함수**[higher order derivative]라고 한다. 일반적인 고계 도함수를

나타내는 n계 도함수 $f^{(n)}(x)$는 $y^{(n)}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$와 같이 표현하기도 한다.

예제 2-18

다음 함수의 2계 도함수를 구하라.

(a) $y = x^4 + 3x^3$

(b) $y = \cos 5x$

(c) $y = 2e^{3x}$

(d) $y = x\ln x$

key point

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

풀이

(a) $y' = 4x^3 + 9x^2$

$y'' = 12x^2 + 18x = 6x(2x+3)$

(b) $y' = (-\sin 5x)(5x)' = -5\sin 5x$

$y'' = -5(\cos 5x)(5x)' = -25\cos 5x$

(c) $y' = 2(e^{3x})' = 2(3e^{3x}) = 6e^{3x}$

$y'' = 6(e^{3x})' = 6(3e^{3x}) = 18e^{3x}$

(d) $y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + 1$

$y'' = (\ln x + 1)' = \dfrac{1}{x}$

초깃값 정리

회로이론

다음 $f(t)$와 $F(s)$가 전기회로의 상태를 표현하고 있을 때, 각 회로의 초깃값을 구하라.

(a) $f(t) = 4e^{-3t} + 6e^{-4t} + 3e^{-5t}$

(b) $F(s) = \dfrac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2}$

문제 접근

전기회로를 해석하는 데 있어서 중요한 이론 중 하나가 라플라스 변환이다. 라플라스 변환 방법에 대해서는 6장 정적분의 공학문제에서 다루므로, 여기서는 전기신호 $f(t)$를 라플라스 변환한 값을 $F(s)$로 나타낸다는 사실만 알고 문제에 접근하기로 하자.

전기회로를 해석하는 데 사용되는 이론으로, 라플라스 변환을 이용해서 다음과 같은 식으로 나타내는 초깃값 정리가 있다.

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

이 식은 $t=0$에서의 $f(t)$, 즉 회로의 초깃값을 라플라스 변환한 함수인 $F(s)$로부터 얻을 수 있으므로 회로의 최초 동작을 확인하는 데 유용하게 사용할 수 있다.

문제 해결

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} (4e^{-3t} + 6e^{-4t} + 3e^{-5t}) = 4 + 6 + 3 = 13$

(b) $$\lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} s\left\{\frac{4s^2 + 7s + 1}{s(s+1)^2}\right\} = \lim_{s \to \infty} \frac{4s^2 + 7s + 1}{(s+1)^2}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{4 + \frac{7}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}} = 4$$

유제 01 회로의 상태가 $f(t) = 3\sin t + 4\cos t + 25e^{-3t}$과 같이 표현될 때, 이 회로의 초깃값을 구하라.

유제 02 회로의 상태가 $F(s) = \dfrac{(5s+1)(3s+2)}{(3s+1)(s+1)(s+2)}$와 같이 표현될 때, 이 회로의 초깃값을 구하라.

최종값 정리

회로이론

다음 $f(t)$와 $F(s)$가 전기회로의 상태를 나타내고 있을 때, 각 회로의 최종값을 구하라.

(a) $f(t)=4e^{-3t}+6e^{-4t}+3e^{-5t}$

(b) $F(s)=\dfrac{4s^2+7s+1}{s(s+1)^2}$

문제 접근

앞서 설명한 초깃값 정리가 회로의 최초 동작을 확인하는 데 사용되는 것처럼 회로의 최종 동작을 확인하는 데는 최종값 정리를 사용한다. 최종값 정리는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

위 식은 $t=\infty$에서의 $f(t)$, 즉 회로의 최종값을 $F(s)$로부터 얻을 수 있는 형태로 되어있다. 그러므로 라플라스 변환한 형태 $F(s)$에서 우리가 잘 아는 시간함수 형태 $f(t)$로 바꾸기 위하여 역변환하기 전에 회로의 동작을 미리 확인할 수 있다는 점에서 유용하다.

문제 해결

(a) $$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}(4e^{-3t}+6e^{-4t}+3e^{-5t})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{4}{e^{3t}}+\frac{6}{e^{4t}}+\frac{3}{e^{5t}}\right)=0$$

(b) $$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0} s\left\{\frac{4s^2+7s+1}{s(s+1)^2}\right\}=\lim_{s\to 0}\frac{4s^2+7s+1}{s^2+2s+1}=1$$

유제 01 회로의 상태가 $f(t)=1+2.5te^{-2t}+5e^{-3t}$과 같이 표현될 때, 이 회로의 최종값을 구하라.

유제 02 회로의 상태가 $F(s)=\dfrac{(5s+1)(3s+2)}{(3s+1)(s+2)}$와 같이 표현될 때, 이 회로의 최종값을 구하라.

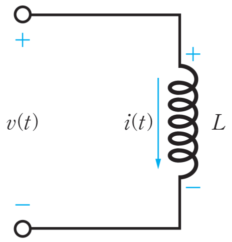
■ 인덕터에서의 전압과 전력

회로이론

인덕터(혹은 코일)에 흐르는 전류가 $i(t)=2te^{-5t}$일 때, (a) 인덕터에 걸리는 전압과 (b) 인덕터에서 소비되는 전력을 구하라. 단, 인덕터 저항인 인덕턴스(L)의 값은 $L=0.5$라고 한다.

문제 접근

인덕터는 전류의 변화를 방해할 수 있도록 만들어진 전기소자이다. 인덕터가 전류의 변화를 방해하는 능력을 인덕턴스라고 하고, 기호 L로 나타낸다.



[그림 2-6]

인덕터에 걸리는 전압은

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

와 같은 식으로 나타내고, 인덕터에서의 전력은 다음과 같은 식을 이용하여 계산한다.

$$p(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

문제 해결

(a) $v(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}=0.5\dfrac{d}{dt}(2te^{-5t})$

$=(t)'e^{-5t}+t(e^{-5t})'=e^{-5t}-5te^{-5t}$

$=(1-5t)e^{-5t}$

(b) $p(t)=Li(t)\dfrac{di(t)}{dt}=i(t)\left\{L\dfrac{di(t)}{dt}\right\}$

$=(2te^{-5t})\cdot\{(1-5t)e^{-5t}\}$

$=2(1-5t)te^{-10t}$

유제 01 인덕터 전류 $i(t)=3\sin\left(2t-\dfrac{2}{3}\pi\right)$일 때, 인덕터에 걸리는 전압을 구하라(단, 인덕턴스 $L=1$이다).

유제 02 인덕터 전류 $i(t)=5^{2t}$일 때, 인덕터에서의 전력을 구하라(단, 인덕턴스 $L=1$이다).

■ 커패시터에서의 전압과 전력

회로이론

커패시터에 걸리는 전압이 $v(t)=(1-5t)e^{-5t}$ 으로 표현될 때, (a) 커패시터에 흐르는 전류와 (b) 커패시터에서의 전력을 구하라. 단, 커패시터가 전기를 축적하는 능력인 커패시턴스(C)의 값은 $C=0.1$ 이라고 한다.

문제 접근

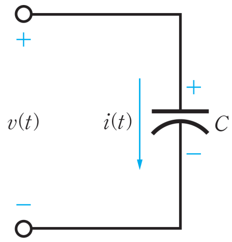
커패시터는 에너지를 저장하는 전계를 만들 수 있는 전기소자이다. 커패시터가 에너지를 저장하는 능력을 커패시턴스라고 하고, 기호 C로 나타낸다.

커패시터에 흐르는 전류는 커패시터에 걸리는 전압이 시간에 따라 변화하는 비율에 비례하므로 다음과 같은 식으로 나타내고,

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

커패시터에서의 전력은 다음과 같은 식으로 계산한다.

$$p(t)=Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}$$



[그림 2-7]

문제 해결

(a) $i(t)=C\dfrac{dv(t)}{dt}=0.1\dfrac{d}{dt}\{(1-5t)e^{-5t}\}$

$$=0.1\{(1-5t)'e^{-5t}+(1-5t)(e^{-5t})'\}$$
$$=0.1\{-5e^{-5t}+(1-5t)(-5e^{-5t})\}$$
$$=(2.5t-1)e^{-5t}$$

(b) $p(t)=Cv(t)\dfrac{dv(t)}{dt}=v(t)\left\{C\dfrac{dv(t)}{dt}\right\}$

$$=(1-5t)e^{-5t}\cdot(2.5t-1)e^{-5t}$$
$$=-(12.5t^2-7.5t+1)e^{-10t}$$

유제 01 커패시터 전압이 $v(t)=t^2e^t$ 일 때, 커패시터를 흐르는 전류를 구하라(단, 커패시턴스 $C=1$ 이다).

유제 02 커패시터 전압이 $v(t)=ta^{2t}$ 일 때, 커패시터에서의 전력을 구하라(단, 커패시턴스 $C=1$ 이다).

Chapter 02 연습문제

※ 다음 극한값을 계산하라.

2.1 $\lim_{x \to 2}(5x-3)$

2.2 $\lim_{x \to 3^+}\sqrt{x-3}$

2.3 $\lim_{x \to 2}3x^3$

2.4 $\lim_{x \to 3}\frac{9-x^2}{x-3}$

2.5 $\lim_{x \to \infty}\frac{3x^2+x+1}{2x^2-x+2}$

2.6 $\lim_{x \to -1}\frac{x^3+3x+9}{x^2+2x+1}$

2.7 $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$

2.8 $\lim_{x \to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

※ 다음 물음에 답하라.

2.9 함수 $f(x)=\begin{cases} 3, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$이 존재할 때, $\lim_{x \to 1}f(x)$를 구하라.

2.10 함수 $f(x)=x^2+2x$가 $x=1$에서 연속이라는 사실을 증명하라.

※ 다음 함수들의 도함수를 정의에 따라 구하고, 괄호 속의 점과 접하는 접선의 기울기를 구하라.

2.11 $f(x)=3x+2 \quad (x=2)$

2.12 $f(x)=x^2-2 \quad \left(x=\frac{3}{2}\right)$

2.13 $f(x)=\sqrt{x+1}\quad (x=3)$

2.14 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}\quad (x=-2)$

※ 다음 함수의 도함수를 구하라.

2.15 $f(x)=\log 3$

2.16 $y=e^2$

2.17 $y=3\sqrt{3x}$

2.18 $f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$

2.19 $f(x)=x^2\sqrt{x}$

2.20 $y=(2x^2+3)(x^2-2x-6)$

2.21 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

2.22 $y=\dfrac{3x-1}{x^2+x+2}$

※ 다음 합성함수, 음함수의 도함수를 구하라.

2.23 $y=(3x^2+2)^3$

2.24 $y=\dfrac{1}{(5x^2-3x+1)^3}$

2.25 $y=(1-x)^2(2x^2+x-1)$

2.26 $x^2+y^2=1$

2.27 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=1$

2.28 $2x^2+3x^2y^2+4y=5$

※ 매개변수함수를 이용하여 도함수 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

2.29 $x = 2t+1,\ y = t^2 + 4t + 3$

2.30 $x = \dfrac{1}{t+1},\ y = \dfrac{t}{t+1}$

2.31 $x = t^2 + t,\ y = t + \dfrac{1}{t}$

2.32 $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t$

※ 다음 함수의 도함수를 구하라.

2.33 $x = y^2 + 3y$

2.34 $x = \dfrac{y}{y^2 - 1}$

2.35 $x = y\sqrt{y}$

2.36 $x = \sqrt{y^3 + y + 1}$

※ 다음 함수의 도함수 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

2.37 $y = \cos\sqrt{1 + x^2}$

2.38 $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

2.39 $y = (\sin x + \cos x)^3$

2.40 $y = \sin 2x \cot x^2$

2.41 $y = (\sec x + \operatorname{cosec} x)^2$

2.42 $y = \sin^2 x$

2.43 $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$

2.44 $\sin x + \cos y = xy$

※ 다음 함수의 도함수를 구하라.

2.45 $y = e^{-3x}$

2.46 $y = 5^{2x}$

2.47 $y = x^3 e^{3x}$

2.48 $y = e^x \ln x$

2.49 $y = x \ln x - x$

2.50 $y = \dfrac{\ln x}{x}$

2.51 $y = \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$

2.52 $y = \dfrac{e^x \sin x}{1 + \cos x}$

※ 다음 식에서 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$를 구하라.

2.53 $y = a \sin bx$ (a, b는 상수)

2.54 $y = a e^{bx}$ (a, b는 상수)

2.55 $y = x^2 \ln x$

2.56 $y = x^2 \sin x$

2.57 $y = e^{2x} \cos 3x$

2.58 $x^2 + y^2 = r^2$ (단, r은 상수)

※ 회로이론 다음 $f(t)$와 $F(s)$가 전기회로의 상태를 나타내고 있을 때, 초깃값을 구하라.

2.59 $f(t) = 5\sin 2t + 7\cos 3t$

2.60 $f(t) = e^{3t} + 3e^{-3t} + 3\sin t + 4\cos t + 3.5t^2$

2.61 $F(s)=\dfrac{2s+7}{(s+2)(s+3)}$

2.62 $F(s)=\dfrac{s^2+3s+5}{s(s+2)^2}$

※ 회로이론 다음 $f(t)$와 $F(s)$가 전기회로의 상태를 나타내고 있을 때, 최종값을 구하라.

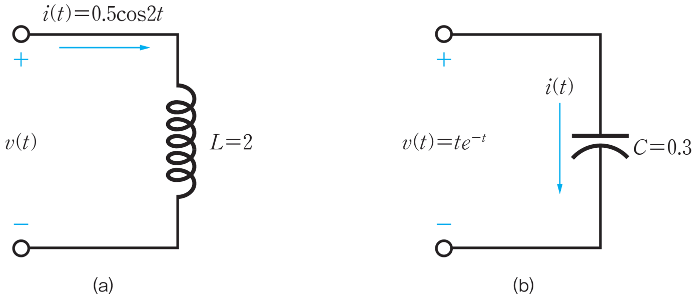
2.63 $f(t)=100(e^{t}+e^{-t})$

2.64 $f(t)=3e^{-3t}+e^{-2t}+4e^{-t}$

2.65 $F(s)=\dfrac{as^2+bs+c}{s}$ (a, b, c는 상수)

2.66 $F(s)=\dfrac{5s^2+2s+1}{2s(s+1)^2}$

※ 회로이론 다음 인덕터 및 커패시터 회로에 대하여 물음에 답하라.



[그림 2-8]

2.67 인덕터에 걸리는 전압을 구하라.

2.68 인덕터에서의 전력을 구하라.

2.69 커패시터에 흐르는 전류를 구하라.

2.70 커패시터에서의 전력을 구하라.