공업수학

: 기본 개념부터 응용까지

이준탁 저

한빛미디어
Hanbit Media, Inc.

저자 **이준탁** jtlee@dau.ac.kr

동아대학교 전기공학과 교수로 재직 중이며, 'Intelligent Control Lab'의 지도 교수다. 동아대학교 전기공학과에서 학사, 석사를 각각 취득하고, 중앙대학교 대학원 전기공학과에서 공학 박사를 취득했다. 일본 쓰쿠바 대학에서 객원 교수를 역임했으며, 현재 한국지능정보시스템학회, 한국정보시스템학회, 대한전기학회, 한국마린엔지니어링학회에서 회원과 이사를 겸하고 있다.

주요 저서(공저)로는 『디지털제어공학』(보성각, 2008), 『미분방정식과 응용』(다솜출판사, 2005), 『전기·전자수학』(문운당, 2000) 등이 있으며, 역서(공역)로는 『공업수학 Ⅰ』 및 『공업수학 Ⅱ』(교보문고, 2001)가 있다.

감수 **홍준탁** iphong@kongju.ac.kr

연세대학교 공과대학 전자공학과와 동 대학원에서 학사, 석사, 박사 학위를 각각 취득했다. 삼성전자 무선사업부에서 3년간 책임연구원으로 근무하였으며, 2006년에는 Texas A&M 대학 전기전자공학과에 교환교수로, 2007년부터 2010년까지 한국전자통신연구원 안테나기술연구팀 초빙연구원으로 활동하였다. 2003년부터 국립 공주대학교 교수로 재직 중이다.

공업수학 : 기본 개념부터 응용까지

지 은 이 | 이준탁
펴 낸 이 | 김태헌
펴 낸 곳 | 한빛미디어(주)
주 소 | 서울시 마포구 서교동 480-26 한빛빌딩 3층 기획편집부
전 화 | 교재개발2팀 02)336-7197, 영업2팀 02)336-7112
팩 스 | 02)336-7199
등 록 | 1996년 6월 24일 제10-1779호
초판발행 | 2010년 11월 8일
2쇄발행 | 2011년 11월 8일

정 가 | 25,000원
I S B N | 978-89-7914-723-0 93560

Published by HANBIT Media, Inc. Printed in Korea

원리를 알면 IT가 맛있다
IT COOKBOOK

1시간 강의를 위해 3시간을 준비하는 마음!

:: 군더더기 없는 핵심원리 + 말랑말랑 쉬운 컨텐츠

핵심 원리 하나만 제대로 알면 열 가지 상황도 해결할 수 있습니다.
친절한 설명과 명확한 기승전결식 내용 전개로 학습 의욕을 배가시켜줍니다.

:: 핵심원리 → 풍부한 예제와 연습문제 → 프로젝트로 이어지는 계단 학습법

기본 원리를 다져주는 예제, 본문에서 배운 내용을 촘촘하게 점검해 볼 수 있는 연습문제,
현장에서 바로 응용할 수 있는 프로젝트를 단계별로 구성해 학습의 완성도를 높였습니다.

:: 학습욕구를 높여주는 현장 이야기가 담긴 IT 교과서

필드어드바이저의 인터뷰와 주옥같은 현업 이야기를 담았습니다.
강의실 밖 현장의 요구를 접하는 기회를 제공하고,
학생들 스스로 필요한 공부를 할 수 있도록 방향을 제시합니다.

저자 머리말

Preface

명쾌한 원리와 풍부한 예제로 응용 능력을 키운다

"내가 낱낱이 살펴 그 이치를 궁구하여 이것을 깨달았노라 전도서 7:27"

예나 지금이나 수많은 연구자들이 첨단 기술을 연구·개발하고, 관련 학문을 깊이 있게 탐구하고 있다. 탐구 영역 중에서 특히 자연 속에 존재하는 현상은 헤아릴 수 없으며, 아직도 밝히지 못한 비밀스러운 현상이 많다. 자연계의 비밀을 밝히고 실용화하려면 상당한 지식과 깊이 있는 지혜가 필요하다. 이를 위한 하나의 도구인 공업수학(Engineering Mathematics)은 물리적인 개념과 더불어 자연계의 모든 현상을 수학적으로 모델링하여, 그 수학적 결과를 어떻게 풀고 물리적으로 어떻게 해석할 것인가를 다룰 수 있다.

공업수학으로 습득한 지식은 모든 산업 분야에서 발생하는 물리적, 화학적, 생물학적인 자연 현상에 대한 명확한 해답을 제공하는 하나의 수단과 방법일 수 있다. 또한 단순한 수학적 기법과 절차에 따라 해답을 찾는 데 머물지 않고, 수학적인 사고를 유도함으로써 공학적 과제에도 응용할 수 있다. 이를 위해서는 물리적 현상의 원리와 개념을 파악하고, 새로운 공학적 문제를 응용할 수 있을 정도로 공업수학을 학습해야 한다.

이처럼 공업수학은 공학 전 분야에 걸쳐 기초가 되는 중요한 교과목으로, 대부분의 대학에서 2학년 또는 3학년의 필수 교과목으로 지정되어 있다. 그 활용성이나 수요 또한 방대하여 100여 종에 가까운 교재가 출판되고 있다. 특히, 전기 및 전자공학, 제어공학에서 다루는 공업수학의 중요성은 매우 높은 편이며, 이후 전공 분야의 심화 학습이나 공학적 과제에 쉽게 접근할 수 있게 한다.

이런 관점에서, 이번에 출간된 교재는 기존의 교재들보다 기본 개념을 체계적으로 익혀 단계적인 고급 학습이 가능하도록 집필하고자 노력하였다. 공업수학과 관련된 기본 이론이 어떠한 의도에서 출발하여 어떻게 고급 이론으로 발전하고 공학적 문제에 응용될 수 있는지를 다양한 예제를 통하여 제시하고자 고민하였다.

본 교재의 특징

■ **수학의 일반적인 이론을 토대로 실제 공학적 문제에 쉽게 접근할 수 있도록 하였다.**

고등학교 수학이나 대학수학 등의 기초 이론을 학습했다면, 이 책에 포함된 문제를 통해 공학 등 응용과학에 필요한 모든 수학적 이론을 모델링하고, 해석까지 쉽게 할 수 있다.

■ **전기공학이나 전자공학, 제어공학 관련 전공자에게 필요한 주제를 발췌하였다.**

이 책은 모든 공학 분야를 아우를 수 있다. 특히, 전기공학이나 전자공학, 제어공학 관련 전공자가

전공 학습을 하는 데 도움이 되는 필수 주제를 발췌하였으며, 기본서가 될 수 있게 집필하였다.

■ **전문 기술인이 되기 위해 꼭 알아야 할 내용을 기본부터 실제적인 응용까지 풍부한 예제와 함께 설명하였다.**
수학적 사고를 유도하는 풍부한 예제를 학습함으로써, 기본 개념을 익히고 응용 능력을 키울 수 있다.

본 교재의 활용법

'공업수학'의 교육 과정이 한 학기인 경우에는 1장 미분과 적분, 2장 행렬, 3장 벡터, 4장 미분방정식, 6장 푸리에 해석에서 푸리에 급수까지 학습하는 것이 적당하다.

두 학기 과정, 즉 공업수학 I 및 II로 되어 있는 경우에는 첫째 학기에 1장 미분과 적분부터 4장 미분방정식까지 학습하고, 둘째 학기에는 5장 라플라스 변환 및 그 응용, 6장 푸리에 급수와 푸리에 변환, 7장 무한급수를 학습할 수 있다. 강의자는 학생의 수준과 학기의 상황에 맞게 적절한 학습 내용을 선정하고 강의 순서를 조절하기 바란다.

부디, 이 책을 읽는 독자들이 튼튼한 기초와 응용 능력을 키우기 바라며, 실무 현장에서 더욱 유능하고 지혜로운 전문 엔지니어로서의 역량을 마음껏 발휘하기를 바란다.

승학산 기슭에서

저자 이준탁

강의 계획

무엇을 배우나?

이 책은 모두 7개 장으로 구성되어 있다. 기본적인 함수의 미분과 적분부터 공학계에서 폭넓게 자주 응용되는 이론, 즉 행렬과 벡터, 미분방정식, 라플라스 변환, 푸리에 해석 등을 다루고 있다. 각 장에서는 이러한 이론들의 기본 개념과 토픽의 상호 관련성을 설명하고 있으며, 다양한 예제를 제공한다.

❶ **미분과 적분**(1장)
함수의 극한에서 미분과 도함수의 기본 개념을 이해하고, 부정적분과 정적분 등을 소개한다.

❷ **행렬**(2장)
행렬의 기본 개념과 이 행렬이 공학적으로 어떻게 이용될 수 있는지를 설명한다.

❸ **벡터**(3장)
물리계에서 존재하는 벡터량과 스칼라량의 정의에서 벡터 관련 물리량의 연산을 설명한다.

❹ **미분방정식**(4장)
미분방정식과 이와 관련된 모든 용어를 소개하고, 여러 종류의 미분방정식의 해법을 설명한다.

❺ **라플라스 변환**(5장)
라플라스 변환과 역 라플라스 변환의 정의를 설명하고, 라플라스 변환의 주요 정리 등을 소개한다.

❻ **푸리에 해석**(6장)
푸리에 해석의 기본이 되는 푸리에 급수를 설명하고, 푸리에 급수가 푸리에 변환으로 전개되는 과정 및 라플라스 변환과의 관련성 등을 소개한다.

❼ **무한급수**(7장)
무한급수의 기본 개념과 필요성을 설명하고, 함수에 테일러 급수와 매클로린 급수가 어떻게 전개되고, 적용될 수 있는지를 설명한다.

표준 스케줄표

주	해당 장	주제
1	1장	미분과 적분
2	2장	행렬(2.1~2.5)
3	2장	행렬(2.6~2.9)
4	3장	벡터(3.1~3.10)
5	3장	벡터(3.11~3.16)
6	4장	미분방정식의 기본 이론(4.1~4.6)
7	4장	미분방정식과 응용(4.7~4.14)
8		**중간고사**
9	5장	라플라스 변환과 역 라플라스 변환(5.1~5.5)
10	5장	라플라스 변환의 주요 정리(5.6)
11	5장	라플라스 변환의 응용(5.7)
12	6장	푸리에 해석과 푸리에 급수(6.1~6.2)
13	6장	푸리에 해석과 푸리에 변환(6.3)
14	6장	푸리에 해석과 푸리에 변환의 응용(6.4)
15	7장	무한급수(7.1~7.7)
16		**기말고사**

강의 보조 자료 안내

PPT 자료와 연습문제 해답

- 한빛미디어에서는 교수/강사님들의 효율적인 강의 준비를 위해 온라인과 오프라인으로 강의 보조 자료를 제공합니다.
- 다음 사이트에서 회원으로 가입하신 교수/강사님에게는 교수용 PPT 자료와 추가 연습문제를 제공합니다.
  http://academy.hanb.co.kr
- 온라인에서 자료를 다운받으시려면 교수/강사 회원으로 가입 또는 인증이 되어 있어야 합니다.

함께 보면 좋은 도서

- 『최신 공업수학』(텍스트북스, DENNIS G. ZILL, 2009)
- 『Engineering and Scientific Computations Using MATLAB』(John Wiley & Sons, Inc., Sergey Edward Lyshevski, 2003)
- 『미적분학(Calculs)』(휴먼싸이언스, 고영상, 김경수, 김동석, 기명재, 조동현, 2009)
- 『Advanced Engineering Mathematics』(PWS Pub. Co., Dennis G. Zill, 1999)
- 『Contemporary Linear Systems Using MATLAB』(Robert D Strum, Donald E Kirk Contemporary Linear Systems Using MATLAB 4.0, Robert D Strum/Donald E Kirk, PWS Pub. Co., 1995)
- 『Linear Algebra』(Prentice Hall, Friedberg, 1989)

목차 Contents

Chapter 03

벡터

>> 목차 Contents

Chapter 04 미분방정식

>> 목차 Contents

Chapter

01

미분과 적분

Differentiation and Integration

학습목표

- 함수의 극한으로부터 미분과 도함수의 기본 개념을 이해한다.
- 적분의 개념과 부정적분, 정적분, 적분 규칙을 학습한다.

1.1 미분과 도함수

미분법은 17세기 말 영국의 뉴턴(Newton, Sir Isaac, 1642~1727)과 독일의 라이프니츠(Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646~1716)에 의해 독립적으로 연구되었다.

뉴턴은 어떤 물체가 운동하는 상태를 그 물체의 순간적인 정지상태의 반복으로 생각하였다. 즉 운동하는 물체를 어떤 궤도를 그리는 점이라고 생각하고 그 운동을 순간적으로 멈추게 함으로써 그 물체의 속도나 가속도를 구하였다. 이러한 뉴턴의 미분법은 여러모로 미비한 점이 많았는데, 그것을 수정한 사람 중의 한 사람이 독일의 바이어슈트라스(Weierstrass, Karl Theodor Wihelm, 1815~1897)였다.

이와는 별도로 **라이프니츠**는 곡선의 접선 또는 극대, 극소를 깊이 연구한 끝에 미분법을 발견했으며, 오늘날 우리가 사용하는 함수라는 용어와 미분, 적분의 기호를 창안하였다. 한편, 프랑스 사람들은 미적분을 처음 발견한 사람이 프랑스의 페르마(Fermat, Pierre de, 1601~1665)라고 주장했는데, 그 이유는 페르마가 극대값과 극소값을 오늘날의 미분법과 유사한 방법으로 구하였기 때문이다.

1.1.1 함수의 극한

함수의 수렴과 극한

독립변수 x와 종속변수 y의 관계가 어떤 함수 $y=f(x)$로 주어졌다고 가정하자.

"x가 a는 아니지만 a에 한없이 접근할 때 함수 $f(x)$ 의 극한값은 M이다"라고 하며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = M \tag{1.1}$$

이때, "x 가 a에 가까워질 때, $f(x)$는 극한값 M에 **수렴**한다."고 말하며, M을 $x \to a$일 때 $f(x)$의 극한값 또는 **극한**이라고 한다.

함수의 극한은 $\lim_{x \to a} f(x) = M$ 및 $\lim_{x \to a} g(x) = N$일 때 $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = MN$으로 되며, $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = M/N$이 된다. 단, $g(x) \neq 0$ 및 $N \neq 0$이어야 한다. 이 두 함수 $f(x)$,

$g(x)$의 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$ 및 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하고, a에 가까운 모든 x에 대해 $f(x) \leqq g(x)$이면, $\lim_{x \to a} f(x) \leqq \lim_{x \to a} g(x)$로 된다. 또한 $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$이고, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = M$이 된다.

한편, 다항함수 $f(x)$에서는 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$이며, 분수함수의 극한에서는 $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \alpha$이고, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 반드시 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이 되어야 한다. 그리고 $0/0$ 형태의 분수식은 분자 또는 분모를 인수분해하여 약분한 후, 극한을 구한다.

좌극한과 우극한

x가 a**보다 작은 값(**$a-$**)을 가지면서** a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값이 M에 한없이 가까워지면 M을 **좌극한**이라고 한다. x가 a**보다 큰 값(**$a+$**)을 가지면서** a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값이 M에 한없이 가까워지면 M을 **우극한**이라고 한다. 단, 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$는 좌극한과 우극한의 값이 일치할 때만 존재한다.

$$\lim_{x \to a-} f(x), \quad \lim_{x \to a+} f(x) \tag{1.2}$$

각 함수의 극한

함수별로 극한을 표현하면 다음과 같다.

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

④ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

⑥ $\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (a>1) \\ 1 & (a=1) \\ 0 & (0<a<1) \end{cases}$

⑦ $\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & (a>1) \\ 1 & (a=1) \\ +\infty & (0<a<1) \end{cases}$

⑧ $\lim_{x\to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & (a>1) \\ +\infty & (0<a<1) \end{cases}$

⑨ $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & (a>1) \\ -\infty & (0<a<1) \end{cases}$

⑩ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2.71828\cdots$

⑪ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

⑫ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$

⑬ $\lim_{x\to a>0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

⑭ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{[(1-1/x)]}{(1+1/x)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$

1.1.2 함수의 연속성

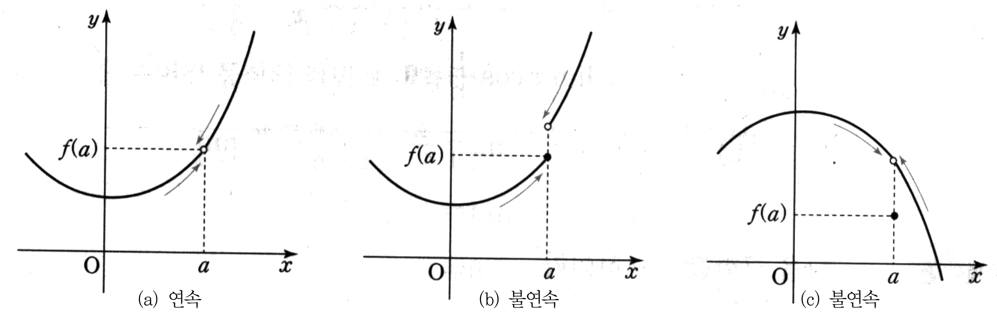
함수 $f(x)$가 [그림 1-1]과 같이 다음 두 조건을 만족하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

조건 1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의될 수 있다.

조건 2) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 존재한다.

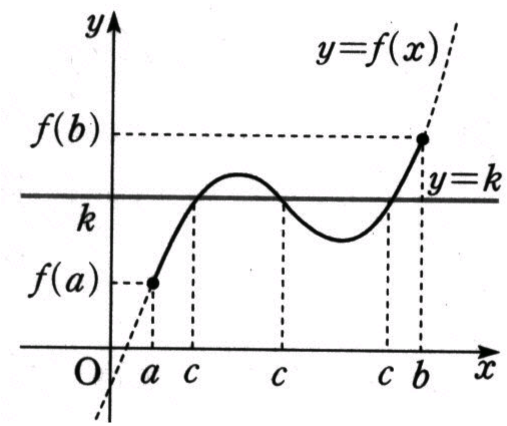
이처럼 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 **연속함수**라고 한다. 반면에 함수 $f(x)$가 위의 두 조건 중에서 어느 하나라도 만족하지 않으면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다.

[그림 1-1(a)]는 위 두 조건을 만족하므로 정의된 구간에서 연속이다. [그림 1-1(a)]에서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 점프성 불연속이 존재하므로 불연속이다. [그림 1-1(a)] 또한 $x=a$에서 곡선의 값이 아닌 점 $f(a)$로 존재하므로 불연속이다.



[그림 1-1] 함수의 연속과 불연속

중간치 정리는 [그림 1-2]와 같이 해의 존재 여부를 판단하는 중요한 척도가 된다. 즉 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a<c<b$이며, $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 $f(c)=k$를 만족하는 c가 적어도 하나는 존재한다. 또한 개구간 (a,b)에서 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$을 만족하는 실근이 최소 1개 이상은 존재한다.



[그림 1-2] 중간치 정리

1.1.3 변화율

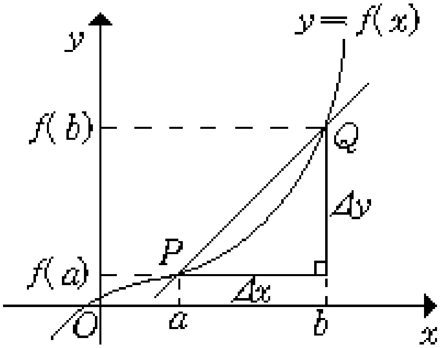
평균변화율

독립변수 x에 대한 종속변수 y의 변화량은 일반적으로 **변화율**로 정의한다. 예를 들어 x가 3에서 5까지 변할 때, y가 12에서 18까지 변했다면 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-12}{5-3} = 3$$

[그림 1-3]과 같이 함수 $y=f(x)$에서 $x=a$로부터 미소변위 Δx 만큼 증분한 $x=a+\Delta x$로 변화하였다면, y는 $f(a)$에서 $f(a+\Delta x)$까지 Δy만큼 변화할 것이다.

이때 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$를 **평균변화율**이라고 한다.



[그림 1-3] 평균변화율

$\Delta x = h$이며, x가 a에서 $a+h$까지 변하면, $\Delta y = f(a+h)-f(a)$가 될 것이다. 따라서 구간 $[a, a+h]$에서 함수 y의 평균변화율은 다음과 같다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.3}$$

x의 구간 $[a, a+h]$에서의 함수 y의 변화율은 두 점 $[a, f(a)), (a+h, f(a+h)]$를 지나는 직선의 기울기와 같다. 직선의 경우, 평균변화율은 그 구간에 상관없이 일정하지만, 직선을 제외한 기타 곡선의 평균변화율은 구간마다 일정하지 않다.

순간변화율

함수 $y=f(x)$에서 구간 $[a,a+h]$에서의 x의 변화량 Δx가 아주 작을 때 즉 $\Delta x \to 0$일 때 평균변화율의 극한값을 **순간변화율** 또는 **미분계수**라고 한다. $x=a$에서의 함수 y의 순간변화율 또는 기울기는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x \to a} f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.4}$$

함수 $y=f(x)$가 $x \in X$인 영역 X에서 미분을 하려면, 다음과 같은 두 개의 조건을 동시에 만족해야 한다.

조건 1) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 한다.
즉 $h \to 0$일 때, $f(x)$의 $x=a_-$에서의 좌극한 $f(a_-)$ 및 $x=a_+$에서의 우극한 $f(a_+)$이 동일해야 한다. 이는 미분을 하기 위한 필요조건이다.

조건 2) $f(x)$의 1계 도함수가 $x=a$에서 연속이어야 한다.
즉 $h \to 0$일 때, $f(x)$의 1계 도함수에 대한 $x=a_-$에서의 좌극한 $f'(a_-)$ 및 $x=a_+$에서의 우극한 $f'(a_+)$이 동일해야 한다.

위 조건을 간단히 요약하면 함수 $y=f(x)$가 '$x=a$에서 연속'이면 $x=a$에서 미분할 수 있고, '$x=a$에서 불연속'이면 $x=a$에서 미분할 수 없다는 것이다.

설사 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해도 미분할 수 없는 때도 있다. 예를 들면 함수 $y=|x|$의 경우, $x=0$에서 미분할 수 있는지 알아보자. 먼저, 이 함수는 $x=0$에서 연속임을 알아야 한다. 그러나 $h \to 0$일 때, $f(x)$의 $x=0$에서의 기울기, 즉 1계 도함수 $f'(x)$의 $x=0$에서의 $f'(0)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{|h|}{h} \tag{1.5}$$

이 식에서 $h \to 0_+$에서의 좌극한 $f'(0_-)$ 및 $h \to 0_-$에서의 우극한 $f'(0_+)$은 다음과 같이 각각 다르다.

$$\lim_{h \to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h \to +0}\frac{h}{h}=1 \quad \text{및} \quad \lim_{h \to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h \to +0}\frac{-h}{h}=-1$$

이처럼 $h \to -0$ 에서의 좌극한과 $h \to +0$ 에서의 우극한이 전혀 다르므로, $x=0$ 에서의 극한값은 존재하지 않는다. 따라서 함수 $y=|x|$ 의 경우, $x=0$ 에서 $f(x)$는 연속이지만 미분할 수 없다는 것이다.

1.1.4 도함수와 미분법

함수 $y=f(x)$의 임의의 점$(x, f(x))$ 에서 미분계수를 대응시킨 함수를 $f(x)$의 **도함수**라고 한다. $y'=f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}$ 의 형태로 나타내며, $f'(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1.6}$$

한편, $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$의 1계 미분계수 또는 기울기는 다음과 같이 나타낸다.

$$f'(a)=y'|_{x=a}=\frac{dy}{dx}|_{x=a} \tag{1.7}$$

함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 과정을 미분한다고 하며, 그 계산 방법을 미분법이라고 한다. 일반적으로 도함수를 구하면, 각 점에서의 미분계수를 구하지 않고도 도함수 $f'(x)$에 임의점 $x=a$를 대입하여 미분계수 $f'(a)$를 구할 수 있다.

1.1.5 미분법 관련 정리

이상에서 살펴본 도함수 또는 미분법을 이용하여 몇 가지 정리를 설명하면 다음과 같다.

롤의 정리

함수 $y=f(x)$가 폐구간$[a,\ b]$ 에서 연속이고, $a<c<b$ 이며, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능할 때, $f(a)=f(b)=0$ 이면 $f'(c)=0$ 이 되는 c가 개구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나는 존재한다. 이를 **롤(Michel Rolle, 1652~1719)의 정리**라고 한다. 롤의 정리는 다음 평균값의 정리를 증명하는 데 필요하다.

평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 폐구간$[a,\ b]$에서 연속이고, $a<c<b$이며, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능할 때, 다음 식을 만족하는 c가 개구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나는 존재한다. 이를 평균값의 정리라고 한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c) \tag{1.8}$$

이 정리로부터 우리는 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 미분 가능하고, 항상 $f'(x)=0$이면 $f(x)=c$임을 알 수 있다. 또한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분 가능하고, 항상 $f'(x)=g'(x)$이면 $f(x)=g(x)+c$라는 것도 알 수 있다. 평균값의 정리는 테일러의 정리를 증명하는 데 필요하다.

코시의 평균값 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a<c<b$이며, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능할 때, 다음 식을 만족하는 c가 개구간$(a,\ b)$에 존재한다. 단, 항상 $g'(x)\neq 0$이 된다. 이를 **코시(**Cauchy, Augustin Louis, Baron, 1789~1857**)의 평균값 정리**라고 한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1.9}$$

로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$를 포함하는 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 미분 가능하며, 항상 $g'(x)\neq 0$이 된다고 가정하자. 만약 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 및 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이고

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.10}$$

가 존재하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.11}$$

또한 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ 및 $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ 이고,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 존재할 때에도 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.12}$$

이를 **로피탈**(L'Hopital, 1661~1704)**의 정리**라고 한다.

테일러의 정리

함수 $f(x)$가 점 $x=a$를 포함하는 폐구간 $[a,\ b]$에서 n회까지 연속으로 미분 가능하면, 개구간$(a,\ b)$ 안의 임의의 점에서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \tag{1.13}$$

이 식에서는 $a < c < b$ 또는 $b < c < a$인 c가 적어도 하나는 존재한다. 이를 **테일러(Taylor, Brook, 1685~1731)의 정리**라고 한다. 이 정리는 테일러의 급수 전개와 매클로린(Colin Maclaurin, 1698~1746) 급수 전개로 발전하였다. 이에 대한 구체적인 내용과 응용은 7장에서 다시 언급한다.

1.1.6 각종 함수에 대한 미분법

$f(x) = c$ (단, c 는 상수)이면 $f'(x) = 0$ 이다. 상수는 x 의 값에 관계없이 일정하므로, 그 변화량은 항상 0이다. 따라서 도함수는 $f'(x) = 0$ 이 된다. $f(x) = x^n$ (단, n 은 자연수)일 때, $f'(x) = nx^{n-1}$ 이다.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\{(x+h)^{n-1}+\cdots+x^{n-1}\}}{h} \\
&= x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1} \qquad [n\text{개의 항}] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

■ 삼각함수

삼각함수 $\cos x$ 및 $\sin x$에 대한 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x,\ \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{1.15}$$

이로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{d}{dx}\frac{(\sin x\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x \tag{1.16}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{(\cos x\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x \tag{1.18}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x\cot x \tag{1.19}$$

■ 합성함수

함수 $y=f(u)$ 및 $u=g(x)$ 가 미분 가능할 때, x 에 대한 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 연쇄 법칙(Chain Rule)에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{1.20}$$

■ $y=f(ax+b)$의 도함수

$u=ax+b$ 이면, $y=f(u)$가 되고 $\dfrac{du}{dx}=a$가 되므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} == f'(u) \cdot a = a \cdot f'(ax+b) \tag{1.21}$$

■ 합성함수의 $\{f(x)\}^n$의 도함수

$[\{f(x)\}^n]' = n \cdot \{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ 가 된다. 예를 들면 $[f(x)]^2$의 경우, 다음과 같이 계산한다.

$$y = \{f(x)\}^2 = f(x)f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$$
$$[\{f(x)\}^2]' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

■ 변형된 함수

$y = f(x)$의 도함수가 있다고 가정하자. 이때, 다음과 같은 관계가 성립할 것이다.

① $y = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \{f(x)^{-1}\}' = \frac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2} \tag{1.22}$$

② $y = \sqrt{f(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$y = \sqrt{f(x)} = \{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$ 로부터 다음을 얻는다.

$$y' = \left\{f(x)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} =- \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \tag{1.23}$$

③ 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 각각 미분 가능할 때, 다음을 얻는다.

$$y = f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.24}$$

$$y = f(x)g(x)h(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \tag{1.25}$$

■ 주요 함수의 미분법

주요 함수에 대한 미분법을 정리하면 다음과 같다.

① $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d\nu}{dx} + v\frac{du}{dx}$

② $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = u\frac{d\nu}{dx} + v\frac{du}{dx} = v(du/dx) - u(dv/dx)/v^2$

③ $\frac{d}{dx}(u^p) = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$

④ $\frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$

⑤ $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

⑥ $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

⑦ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

⑧ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

⑨ $\frac{d}{dx}(\mathrm{sinh}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

⑩ $\frac{d}{dx}\cosh u = \mathrm{sinh}u\frac{du}{dx}$

⑪ $\frac{d}{dx}\sin[f(x)] = \cos f[(x)] \times f'(x)$

⑫ $\frac{d}{dx}\cos[f(x)] = -\sin f[(x)] \times f'(x)$

⑬ $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$

⑭ $\dfrac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)} \cdot \log a \cdot f'(x)$

⑮ $\dfrac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$

⑯ $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

⑰ $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\log a}$

⑱ $\dfrac{d}{dx}\log_a f(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\log a} \cdot f'(x)$

⑲ $\dfrac{d}{dx}\log f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

⑳ $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = f'(ax+b) \times (ax+b)' = af'(ax+b)$

㉑ $\dfrac{d}{dx}f[g(x)] = f'[g(x)] \times g'(x)$

㉒ $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

㉓ $\dfrac{d}{dx}[\{f(x)\}^n] = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

1.2 적분

현대 수학의 대부분은 2천 년 전 고대 그리스 사람이 이룩한 업적에 그 기원을 두고 있다. 적분의 역사는 미분법과는 관계없이 그보다 오래전인 그리스 시대의 구분구적법에서 시작된 것으로 본다. 고대 이집트인과 바빌로니아인은 넓이, 부피, 호의 길이 등을 찾기 위한 노력의 하나로 근사공식을 이용하였다. 고대 그리스인은 극한의 개념이라고까지 말할 수 있는 연속된 근사법을 사용하여 비교적 정확한 적분 공식을 만들었다.

특히 **아르키메데스**(Archimedes, ?B.C.287~B.C.212)는 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를

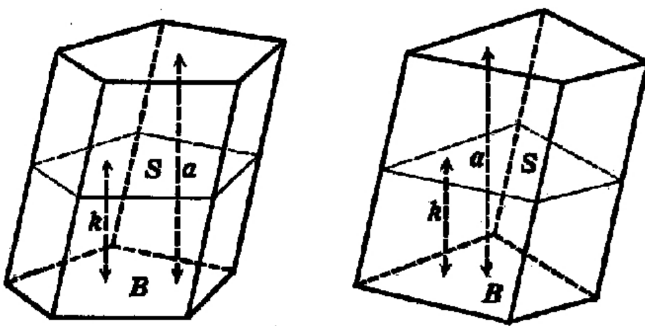
내접하는 삼각형의 넓이로 분할하여 구하는 방법을 알아냈다. 그는 포물선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하기 위해, 그 영역을 점점 넓이가 작아지는 무수히 많은 삼각형으로 채우며, 무한등비급수를 이용하여 이들 삼각형의 넓이의 합(구분구적법)을 구하였다.

이와 유사한 방법은 17세기 뉴턴과 라이프니츠가 미분과 적분을 통일적 체계로 발전시키기 전까지 구분구적법으로 발전되어 넓이나 부피, 곡선의 길이 등을 구하는 데 이용되었다. 그러나 이때에는 엄격한 뜻에서 극한의 개념을 이용하여 넓이를 구한 것은 아니다. 처음으로 극한의 개념을 도입하여 넓이를 구한 사람은 독일의 천문학자 요하네스 **케플러**(Johannes Kepler, 1571~1630)였다.

넓이의 개념으로 정적분이 미분과 관계를 맺게 된 결정적인 요인은 극한에 의한 구분구적법으로서, 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 정적분법으로 연결되었기 때문이다. 그 후, 케플러는 구분구적법을 사용하지 않고 포도주가 담긴 술통의 부피를 구하는 방법을 생각하였는데 이것이 적분법의 시초가 되었다. 그리고 갈릴레이의 제자인 이탈리아의 수학자 **카발리에리**(Cavalieri, 1598~1647)는 이를 재정립하여 카발리에리의 원리를 제창하였다.

카발리에리의 원리란 "어떤 두 개의 평면 도형 또는 두 개의 입체를 임의 높이의 평행인 직선이나 평면으로 나눴을 때 도형 안에 있는 선분 또는 면적의 비가 항상 m : n이면, 그 두 개의 도형의 넓이나 체적의 비도 m : n이다"라는 것이다.

다음 그림은 카발리에리의 원리를 설명하고 있다.



[그림 1-4] 카발리에리의 원리

이 그림은 바닥면의 면적이 B와 같고 높이가 a인 입체의 체적이 같을 때, 바닥면에서 임의 높이 k에서의 두 입체 평면적 S나 k까지의 체적도 같다는 것을 보여 주고 있다.

이러한 구분구적법의 기초 위에 미분법의 반대 개념인 적분법을 17세기 뉴턴과 라이프니츠는 거의 같은 시기에 각각 독립적으로 '정적분의 기본 정리'로 확립하였다.

물리학자였던 **뉴턴**은 운동과 관련해서 일어나는 속도와 가속도의 개념을 나타내는 수학적 방법으로 유율법(流率法, 미적분법)을 창안하였다. 뉴턴의 유율법에서 가장 기본이 되는 수학 문제는 연속운동에서 운동체가 통과하는 거리를 알고 그 속도를 알아내는 것(미분법)과 속도와 시간을 알고 운동체가 통과하는 거리를 알아내는 것(적분법)이었다.

반면에 **라이프니츠**는 곡선에 접선을 긋는 문제(미분법)와 직선군이 있을 때 이들을 접선으로 갖는 곡선을 구하는 문제(적분법)와의 관계를 조사하는 데서 구적법을 발견하였다. 그 특징은 연산의 형식을 기호화했다는 점이다. 철학자이기도 했던 라이프니츠는 기호적 상징의 중요성을 깊이 생각했던 사람으로 오늘날 우리가 사용하고 있는 dx/dy, $\int x dx$와 같은 기호를 처음으로 사용하였다. 적분 기호는 영문 대문자 S를 길게 늘어뜨린 $\int$(integral)를 사용하였으며, 이는 라이프니츠가 도입하였다. 이 기호는 극한의 개념을 적용한 덧셈(Sum)을 의미한다.

극한의 개념을 이용하여 오늘날과 같은 미적분학의 논리적 기초를 확립한 사람은 프랑스의 수학자 **코시**이다. 그 후 19세기 말경에 독일의 수학자 **리만**(Riemann, 1826~1866)에 의해 보다 엄밀한 적분법이 확립되었다. 우리가 현재 배우는 적분법은 독일의 리만이 코시의 적분을 유한함수까지 확장한 리만적분이다. 그러나 리만적분도 적분법으로서 완전한 것이 못 되어 더욱 일반적인 적분법을 발견하게 된다. 이 적분법은 프랑스의 수학자 **르베그**(Lebesgue H.L., 1875~1941)에 의하여 더욱 일반화된 적분법으로 발전되었다.

오늘날은 구적의 개념도 추상화되어 그 당시 적분이 불가능했던 함수도 이제는 적분할 수가 있다. 적분은 함수의 평균값이나 곡선의 길이, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 입체의 부피, 물체의 속도, 가속도의 문제 등을 구하는 데 사용할 뿐만 아니라 변수가 하나인 함수로부터 다변수 함수와 복소수 변수인 함수까지 확장하여 자연과학, 사회과학 등 과학의 전 분야에 여러 가지 현상을 정의하고 해석하는 데도 중요한 역할을 하고 있다.

1.2.1 부정적분

적분구간 I와 이 구간에서 정의한 함수 f에 대해, 함수 F가 모든 $x \in I$에 $F'(x) = f(x)$의 관계를 갖는다면, 함수 F를 함수 f의 **원시함수** 또는 **부정적분**이라고 한다.

두 함수 F와 f가 구간 I에서 미분 가능하고, 항상 $F'(x) = G'(x)$의 관계를 만족하면, 평균값의 정리로부터 구간 I에서 $G(x) = F(x) + C$가 된다. 여기서 적분상수 C는 모든 실수값을 가질 수 있다.

정의 1-1 부정적분

I를 적분구간이라 하고 f를 구간 I에서 정의한 함수라고 가정하자. f의 부정적분은 구간 I에서 f의 모든 원시함수의 집합으로 정의된다. f의 부정적분은 다음과 같다. 여기서 f는 피적분 함수이며, x는 적분변수이다.

$$F'(x) = f(x) \text{ 및 } F(x) = \int f(x)dx \tag{1.26}$$

정리 1.1 두 함수 $F(x)$ 및 $G(x)$가 구간 I에서 미분 가능하고, 항상 $F'(x) = G'(x)$의 관계를 만족하면 $G(x) = F(x) + C$를 성립하는 상수 C가 존재한다.

증명 1.1 새로운 함수 H를 구간 I에서 $H(x) = F(x) - G(x)$로 정의하면 가정으로부터 $H'(x) = F'(x) - G'(x)$가 된다. 만약 상수 C가 존재하면 구간 I에서 $H(x) = C$, 즉 $G(x) = F(x) + C$가 된다. □

함수 $f(x)$의 부정적분은 무수히 많다. 이를 **해의 무리들**이라고 한다. 그중에서 한 개의 부정적분을 알면, 그것에 어떤 상수를 합하여 표현하면 된다. 이때, $f(x)$의 부정적분은 $\int f(x)dx$라는 적분 기호로 나타낸다. 또한 $f(x)$의 부정적분은 어떤 부정적분 $F(x)$에 어떤 상수 C를 더하여 얻어지는 것이므로, 다음과 같이 표현한다.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C\text{는 적분상수}) \tag{1.27}$$

이상에서처럼 함수 $f(x)$가 주어졌을 때, 그것의 부정적분을 구하는 것을 "$f(x)$를 적분한다"고 하고 그 계산법을 **적분법**이라 한다.

1.2.2 정적분

부정적분은 임의 함수 $f(x)$를 개구간에서 적분하면 함수 $F(x)$로 표현한다. 반면 정적분 (definite integral)은 임의 함수 $f(x)$를 폐구간 $[a,b]$에서 $dx \to 0$인 폭으로 무한히 구분하여 적분하면 극한값이 상수값 S에 수렴하게 된다. 이때 상수 S는 함수 $f(x)$를 폐구간 a에서 b까지 정적분한 값이 된다.

정의 1-2 정적분

함수 f가 폐구간 $[a,b]$에서 정의될 때, 임의의 n에서 $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ 및 k번째의 지점 $x_k = a + k\Delta x$일 때, $[a,b]$에서 f의 정적분은 다음과 같다.

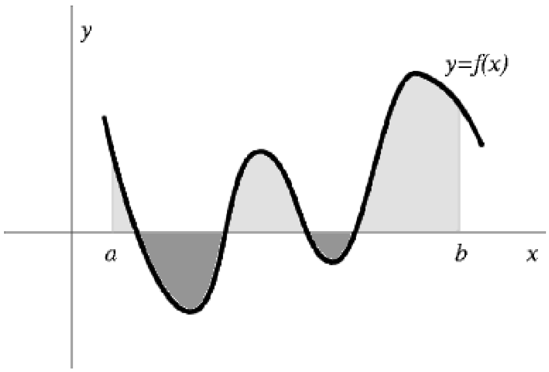
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \tag{1.28}$$

식 (1.28)에서 a를 적분의 하한이라고 하고, b를 적분의 상한이라고 한다. 극한이 샘플점의 선택에 따라 달라지거나, 샘플점을 어떻게 선택하더라도 정의되어 있지 않으면 적분은 존재하지 않는다.

적분 기호 '$\int$'은 고대 문자 'S'이며, 'Sum 또는 Σ'를 의미한다. 만약 정적분이 존재한다면 유한한 값이 될 것이고, x는 더미 변수가 된다. 또한 $\int dx$는 "x에 대하여 적분한다"는 의미가 있다. 기하학적으로는 $f(x) \geq 0$이면, 적분을 그래프 $y=f(x)$의 x축, 곧 직선 $x=a$ 및 $x=b$ 사이의 면적으로 해석할 수 있다. 적분구간이 $[b,a]$로 되면 부호가 양수(+)에서 음수(−)로 바뀌게 된다.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{1.29}$$

식 (1.29)을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



리만(Riemann)의 합은 다음과 같은 정적분으로 정의된다.

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a) \tag{1.30}$$

1.2.3 적분 규칙

적분에 대한 몇 가지 규칙을 요약하면 다음과 같다.

① 상수는 적분 항 밖으로 빼낼 수 없다.

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \tag{1.31}$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c[f(b)-f(a)] \tag{1.32}$$

② 두 함수의 합 또는 차에 대한 적분은 각 함수를 적분해서 합 또는 차를 구한 것과 같다.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{1.33}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{1.34}$$

③ 적분함수의 경로가 $a \to b \to c$일 때, $a \to c$ 구간의 적분은 $a \to b$ 구간까지의 적분과 $b \to c$ 구간의 적분을 합한 것과 같다.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \tag{1.35}$$

④ 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \geq 0$이면 적분은 양수가 된다.

$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0 \tag{1.36}$$

⑤ 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \leq g(x)$이면 적분은 동일한 대소 관계를 유지한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx \tag{1.37}$$

⑥ 적분의 절대값은 절대값의 적분보다 작다.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx \tag{1.38}$$

⑦ 다음 두 함수의 곱에 대한 적분은 부분적분으로 구한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\mid_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{1.39}$$

1.2.4 기본적인 부정적분

다음의 부정적분은 미적분학의 기본 정리를 사용하여 정적분을 계산하는 데 유용하게 사용할 것이다. 여기서 언급한 부정적분은 극히 일부에 지나지 않으며, 기본에 속한다. 그 외 나머지는 기타 많은 책에서 표 형태로 제공되고 있으니 참고하기 바란다.

■ **멱승에 대한 적분**

① $\int x^b dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

② $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + C$

③ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

■ **지수함수에 대한 적분**

① $\int e^x dx = e^x + c$

② $\int a^x dx = \frac{1}{ax}a^x + c$

■ **삼각함수에 대한 적분**

① $\int \sin x dx = \cos x + c$

② $\int \cos x dx = \sin x + c$

③ $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

④ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

⑤ $\int \csc x \cot x dx = \csc x + c$

⑥ $\int \csc^2 x dx = \cot x + c$

⑦ $\int \tan x dx = -\ln(\cos u) + c$

⑧ $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln[\tan\frac{x}{2}] + c$

⑨ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\tan(\pi/4 + x/2) + c = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + c$

⑩ $\int \sinh x dx = \cosh x + c$

⑪ $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

⑫ $\int \mathrm{sech}^2 x dx = \tanh x + c$

⑬ $\int \mathrm{csch}^2 x dx = -\coth x + c$

⑭ $\int \mathrm{sech} x \tanh x\, dx = -\mathrm{sech}\, x + c$

⑮ $\int \mathrm{csch} x \coth x\, dx = -\mathrm{csch}\, x + c$

⑯ $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}[a\sin(bx) - b\cos(bx)] + c$

⑰ $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}[a\cos(bx) + b\sin(bx)] + c$

⑱ $\int \sin(ax)\sin(bx) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$

⑲ $\int \cos(ax)\cos(bx) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$

⑳ $\int \sin(ax)\cos(bx)dx = -\dfrac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \dfrac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$

■ 부분적분

① $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

■ 역함수에 대한 적분

① $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$

② $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + c$

③ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

④ $\int \dfrac{dx}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{x\sqrt{3}}{2-x} + c$

■ x^n과 $\ln x$ 또는 e^x, $\cos x$, $\sin x$의 곱을 포함하는 적분($b \neq 0$)

① $\int x^n \ln x dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \dfrac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c \quad (n \neq -1,\ x > 0)$

② $\int x^n e^{bx}dx = \dfrac{1}{b}x^n e^{bx} - \dfrac{n}{b}\int x^{n-1}e^{bx}dx$

③ $\int x^n \sin bx\ dx = -\dfrac{x^n}{b}\cos bx + \dfrac{n}{b}\int x^{n-1}\cos bx\, dx$

④ $\int x^n \cos bx\ dx = \dfrac{x^n}{b}\sin bx - \dfrac{n}{b}\int x^{n-1}\sin bx\, dx$

■ $\cos x$, $\sin x$ 및 $\sec x$의 정수 멱승을 포함하는 적분

① $\int \sin^n x\ dx = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\ dx$

② $\int \cos^n x \ dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

③ $\int \sec^n x \ dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \ (n \neq 1)$

④ $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

m이 기수이면, $u = \cos x$로 하고, n이 기수이면 $u = \sin x$로 한다. m과 n이 동시에 우수이면, 모든 함수를 $\cos x$ 또는 $\sin x$로 변환한다.

$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$를 사용하면, 18과 19로 변형된다.

■ 분모가 2차 함수인 경우의 적분

① $\int \frac{bx + c}{x^2 + a^2} dx = \frac{b}{2} \ln | x^2 + a^2 | + \frac{c}{a} \tan^{-1} \frac{x}{z} + d \quad (a \neq 0)$

② $\int \frac{cx + d}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} [(ac+d) \ln | x - a | - (bc+d) \ln (x-b)] + e \quad (a \neq b)$

③ $\int \frac{bx + c}{(x-a)^2} dx = b \ln | x - a | - \frac{ab + c}{x - a} + d$

■ $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ 또는 $\sqrt{b^2x^2 + k}$ 를 포함하는 적분 $(b > 0)$

① $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} dx = \frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + c$, $a > 0$

② $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} dx = \frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + c \quad a > 0$

③ $\int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 + k}} dx = \frac{1}{b} ln \, | bx + \sqrt{b^2x^2 + k} | + c$

④ $\int \sqrt{b^2x^2 + k} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{b^2x^2 + k} + \frac{k}{2b} \ln | bx + \sqrt{b^2x^2 + k} | + c$

⑤ $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + c$, $a > 0$

Chapter_01 연습문제

1.1 다음 함수의 극한을 구하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sec x)}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}\right)$

1.2 $x>0$일 때, 다음을 테일러의 정리를 이용하여 증명하라.

(a) $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}$

(b) $\cos x > 1-\dfrac{1}{2}x^2$

1.3 다음을 구하라.

(a) $y=5\sqrt{x}$ 의 점(4, 10)을 통과하는 접선의 기울기와 법선의 방정식

(b) $y=1+\cos(x/3)$의 그래프

1.4 다음 함수를 미분하라.

(a) $y=\sin x\cos x$

(b) $y=\sin^{-1}(3x-1)$

(c) $y=\dfrac{\sec x}{1-\cot x}$

(d) $y=\tan^{-1}\sqrt{x+1}$

(e) $\tanh(\sin x)$

1.5 다음 적분을 구하라.

(a) $\int (1+\tan^2 x)\,dx$ (b) $\int \cos^{-1}\sqrt{x}\,dx$ (c) $\int \ln(5x)^2 dx$

(d) $\int x\ln(5x^2+3)dx$ (e) $\int \dfrac{x}{2(x+1)^2}dx$ (f) $\int \sec x^3 dx$

(g) $\int \cos^3 x(\sin x)^{-2}dx$ (h) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$ (i) $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

(j) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ (k) $\int \dfrac{1}{x-2\sin x}dx$ (l) $\int x^2\csc^3[\log(2x)]dx$

(m) $\int_0^{\infty} xe^{-3x}dx$

1.6 시각에 따라 평면 위를 움직이는 점 $P(x,\ y)$가 있다고 가정하자. 시각 t에서 각 축을 운동하는 좌표가 $x=f(t)$ 및 $y=g(t)$로 주어질 때, 시각 a에서 점 b까지 이동한 거리를 구하라.