P/A/R/T

01

CONTENTS

수학의 기초

Basic Mathematics

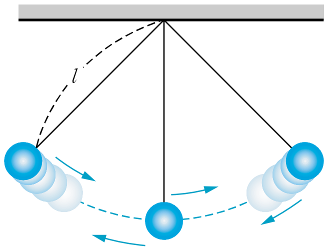
과학적 현상이나 사회적 현상을 논리적으로 설명하고 분석하려면 먼저 함수를 이용하여 그 현상을 나타내야 한다. PART 01에서는 대수함수와 초월함수에 대해 알아보고 복소수와 행렬을 이용하여 공학 내용을 설명하고 표현하는 방법을 살펴본다.

Chapter 01 대수함수

학 / 습 / 목 / 표

- 다항함수의 엄밀한 정의와 성질을 살펴본다.
- 유리함수와 무리함수의 정의와 그래프를 그리는 방법을 학습한다.
- 대수함수와 관련된 공학 문제를 학습한다.

갈릴레이Galilei는 피사 성당 천장에 매달려 있는 램프가 흔들거리는 것을 관찰하다가 램프의 진폭이 크면 빠르게, 진폭이 작으면 느리게 움직인다는 것을 알게 되어 진자의 등시성을 발견했다. 진자의 등시성이란 길이가 같은 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간은 진폭과 질량에 관계없이 일정하다는 것이다. 즉, 진자의 주기는 진자의 길이에만 영향을 받는다.



진자가 왕복하는 데 걸리는 시간 t는 진자의 길이 l의 제곱근에 비례하며, 다음과 같이 l에 대한 무리함수로 나타낼 수 있다.

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (g\ :\ \text{중력가속도})$$

또한 진자의 길이 l은 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간 t의 제곱에 비례하며, 다음과 같이 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.

$$l = \frac{gt^2}{4\pi^2} \quad (t \geq 0)$$

즉, 진자의 길이와 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간의 관계는 무엇을 정의역으로 보는가에 따라 무리함수로 나타낼 수도 있고 유리함수로 나타낼 수도 있다.

Section 01

다항함수

단항식과 다항식

함수는 크게 대수함수와 초월함수로 나누고, 대수함수에는 다항함수, 유리함수, 무리함수가 있다. 대수함수 중 가장 기본인 다항함수는 단항식과 다항식을 이용하여 정의되므로 먼저 단항식에 대하여 알아보자.

정의 1-1 단항식

숫자와 문자, 문자와 문자의 곱으로만 이루어진 식을 **단항식**monomial이라 한다.

즉, 숫자와 문자의 곱으로 되어 있는 식을 숫자로 나눈 식은 단항식이지만 문자로 나눈 식은 단항식이 아니다. 예를 들어 $3x$를 9로 나눈 $\frac{x}{3}$는 단항식이지만 $3x$를 y로 나눈 $\frac{3x}{y}$는 단항식이 아니다. 또한 문자에 근호가 있거나 식의 중간에 + 또는 −가 있는 식도 단항식이 아니다.

예제 1-1

다음 식이 단항식인지 판정하라.

(a) $2x^2y^3$ (b) $\frac{3y}{x}$ (c) $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$ (d) x^2-x

TIP 식의 중간에 + 또는 −가 있는지, 분모에 문자가 있는지, 문자에 근호가 있는지를 확인한다.

풀이

(a) 식의 중간에 + 또는 −가 없으므로 $2x^2y^3$은 단항식이다.

(b) 분모에 문자 x가 있으므로 $\frac{3y}{x}$는 단항식이 아니다.

(c) 근호가 있지만 문자가 아닌 숫자에 근호가 있으므로 $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$은 단항식이다.

(d) 식의 중간에 −가 있으므로 x^2-x는 단항식이 아니다.

정의 1-2 다항식

단항식 또는 단항식들의 합이나 차로 이루어진 식을 **다항식**polynomial이라 한다.

다항식은 단항식이 확대된 형태이므로 $3x$, $2x-4y$, x^2+x+1은 모두 다항식이지만 $\dfrac{x}{y}$는 다항식이 아니다.

이제 단 하나의 문자 x에 대한 다항식을 정의해 보자.

정의 1-3 n차 다항식

n이 자연수이거나 0이고

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (\text{단, } a_n \neq 0)$$

일 때 이 다항식을 x에 대한 **n차 다항식**polynomial of degree n이라 하고 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n을 그 다항식의 **계수**coefficient, n을 **차수**degree라 한다.

[정의 1-3]에 의하여 x^4-3x^2+1은 x에 대한 4차 다항식이고 $3-x^5$은 x에 대한 5차 다항식이다.

■ 다항식을 정리하는 방법

- 내림차순 : 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항으로 나열한다.
- 오름차순 : 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항으로 나열한다.

예를 들어 $2-xy^3+x^2y^2$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^2y^2 - xy^3 + 2$$

이고, x에 대한 오름차순으로 정리하면

$$2 - xy^3 + x^2y^2$$

이다. $2-xy^3+x^2y^2$을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$$-xy^3 + x^2y^2 + 2$$

이고, y에 대한 오름차순으로 정리하면

$$2 + x^2 y^2 - x y^3$$

이다.

예제 1-2

$A = x^2 + 3xy$, $B = 4y^2 - 2xy + x^2$일 때 다음 식을 x에 대한 내림차순과 y에 대한 내림차순으로 각각 나타내라.

(a) $A + 2B$ (b) $3A - B$

TIP 차수가 같은 항끼리 간단히 한 후 내림차순으로 정리한다.

풀이

(a) $A + 2B = (x^2 + 3xy) + 2(4y^2 - 2xy + x^2) = 3x^2 - xy + 8y^2$이다.

따라서 $A + 2B$를 x에 대한 내림차순으로 나타내면 $3x^2 - xy + 8y^2$이고, y에 대한 내림차순으로 나타내면 $8y^2 - xy + 3x^2$이다.

(b) $3A - B = 3(x^2 + 3xy) - (4y^2 - 2xy + x^2) = 2x^2 + 11xy - 4y^2$이다.

따라서 $3A - B$를 x에 대한 내림차순으로 나타내면 $2x^2 + 11xy - 4y^2$이고, y에 대한 내림차순으로 나타내면 $-4y^2 + 11xy + 2x^2$이다.

다항함수

이제 다항식의 개념을 이용하여 다항함수를 정의해 보자.

정의 1-4 **다항함수**

함수 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때 $y = f(x)$를 **다항함수**polynomial function라 한다. 특히 $a_n \neq 0$이고

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

일 때 $f(x)$를 x에 대한 **n차 다항함수**polynomial function of degree n라 한다.

[정의 1-4]의 n차 다항함수를 간단히 n차함수라 한다. 예를 들어 $f(x) = x^3 - x + 1$은 x에 대한 3차함수이고 $g(x) = 1 - x^2 - x^4$은 x에 대한 4차함수이다.

Section 02

일차함수와 이차함수

일차함수

n차 다항함수 중 가장 기본적인 일차함수에 대하여 알아보자.

정의 1-5 일차함수

a, b가 상수이고 $a \neq 0$일 때 $y = ax + b$를 **일차함수** linear function 라 한다. 이때 a를 **기울기** slope, b를 **y절편** y-intercept 이라 한다.

주어진 일차함수의 x절편은 함수의 그래프와 x축과의 교점, y절편은 함수의 그래프와 y축과의 교점이다. 두 점 (x_0, y_0)와 (x_1, y_1)을 지나는 일차함수의 기울기는

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

이다. 이를 이용하여 두 점 (x_0, y_0)와 (x_1, y_1)이 주어졌을 때 두 점을 지나는 일차함수의 식은

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

로 구할 수 있다.

예제 1-3

다음 두 점을 지나는 일차함수를 구하라.

(a) $(1, 2)$, $(2, 6)$ (b) $(3, 5)$, $(1, 9)$

TIP 두 점을 지나는 일차함수의 식을 이용한다.

풀이

(a) 두 점을 지나는 일차함수의 식에 의하여

$$y-2=\frac{6-2}{2-1}(x-1)=4(x-1)$$

이므로 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 6)$을 지나는 일차함수는 $y=4x-2$이다.

(b) 두 점을 지나는 일차함수의 식에 의하여

$$y-5=\frac{9-5}{1-3}(x-3)=-2(x-3)$$

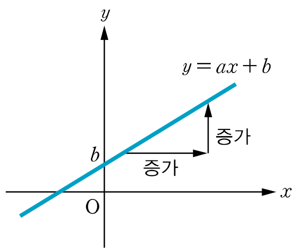
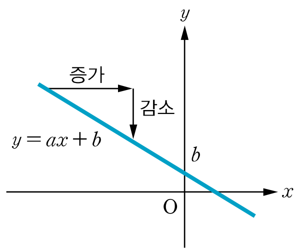
이므로 두 점 $(3,\ 5)$, $(1,\ 9)$를 지나는 일차함수는 $y=-2x+11$이다.

일차함수 $y=ax+b$에서 $a=0$인 경우 $y=b$가 된다. 이때 함수 $y=b$를 **상수함수** constant function라 한다.

일차함수의 그래프

일차함수의 그래프는 두 점을 지나는 직선이므로 주어진 일차함수에서 구한 두 점을 연결하는 직선을 그어서 그래프를 그린다. 일반적으로 일차함수의 그래프를 그릴 때에는 $y=0$을 대입하여 x절편을 구하고, $x=0$을 대입하여 y절편을 구한 후 두 점을 연결한다.

[표 1-1] **일차함수 $y=ax+b\,(a\neq 0,\ b>0)$의 그래프와 특징**

	$a>0$	$a<0$
그래프	 [그림 1-1]	 [그림 1-2]
특징	• x의 값이 증가하면 y의 값도 증가 • 오른쪽 위로 증가하는 직선	• x의 값이 증가하면 y의 값은 감소 • 오른쪽 아래로 감소하는 직선

예제 1-4

다음 일차함수의 그래프를 그려라.

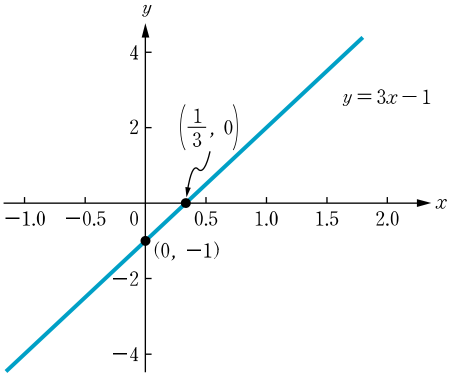
(a) $y=3x-1$

(b) $y=-2x+3$

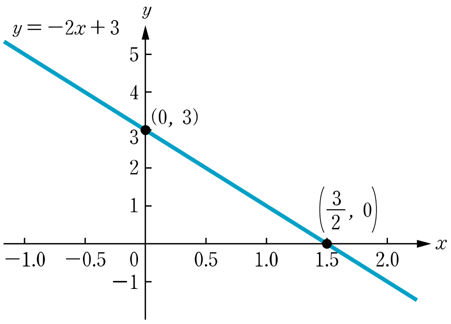
TIP 일차함수의 x절편과 y절편을 찾아서 이 두 점을 연결하는 직선을 그린다.

풀이

(a) $y=3x-1$은 $x=0$일 때 $y=-1$이고 $x=\frac{1}{3}$일 때 $y=0$이다. 따라서 $y=3x-1$의 그래프는 두 점 $(0,\ -1)$과 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$을 연결하여 그린다.



(b) $y=-2x+3$은 $x=0$일 때 $y=3$이고 $x=\frac{3}{2}$일 때 $y=0$이다. 따라서 $y=-2x+3$의 그래프는 두 점 $(0, 3)$과 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 연결하여 그린다.



이차함수

정의 1-6 이차함수

a, b, c가 상수이고 $a \neq 0$일 때 $y=ax^2+bx+c$를 **이차함수**quadratic function라 한다.

■ 이차함수의 표현 방법

이차함수는 다음과 같이 두 가지 방법으로 표현할 수 있다.

- **일반형**general form : $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)
- **표준형**standard form : $y = a(x-p)^2 + q$ (a, p, q는 상수, $a \neq 0$)

일반형 이차함수는 다음 방법에 따라 표준형 이차함수로 변환할 수 있다.

정리 1-1 일반형 이차함수를 표준형 이차함수로 표현하는 방법

일반형 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$를 표준형 이차함수로 표현하는 방법은 다음과 같다.

❶ [단계 1] 공통인수 a로 묶는다.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

❷ [단계 2] $\frac{b}{2a}$의 제곱을 괄호 안에서 더하고 뺀다.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

❸ [단계 3] 완전제곱식을 포함하는 식으로 정리한다.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

[정리 1-1]에 의하여 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 19$를 표준형 이차함수로 나타내보자.

$$\begin{aligned} y &= 3(x^2 - 4x) + 19 && \rightarrow \text{[단계 1]} \\ &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 19 && \rightarrow \text{[단계 2]} \\ &= 3(x-2)^2 + 7 && \rightarrow \text{[단계 3]} \end{aligned}$$

예제 1-5

다음 일반형 이차함수를 표준형 이차함수로 나타내라.

(a) $y = x^2 - 4x + 7$　　(b) $y = 2x^2 + 6x - 1$

TIP [정리 1-1]의 일반형 이차함수를 표준형 이차함수로 표현하는 방법을 이용한다.

풀이

(a) $y = x^2 - 4x + 7$

$= (x^2 - 4x) + 7$ ➡ [단계 1]

$= (x^2 - 4x + 4 - 4) + 7$ ➡ [단계 2]

$= (x-2)^2 - 4 + 7$ ➡ [단계 3]

$= (x-2)^2 + 3$

(b) $y = 2x^2 + 6x - 1$

$= 2(x^2 + 3x) - 1$ ➡ [단계 1]

$= 2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 1$ ➡ [단계 2]

$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 1$ ➡ [단계 3]

$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$

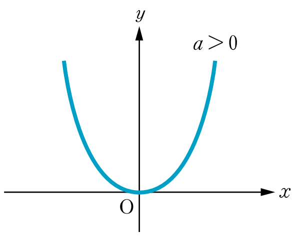
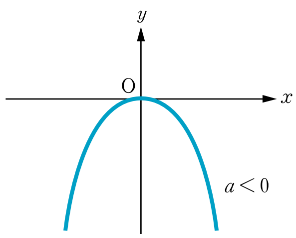
이차함수의 그래프

이차함수의 그래프는 먼저 주어진 이차함수를 표준형 이차함수로 표현한 다음, $y = ax^2$의 그래프를 그리고 그 그래프를 적절하게 평행이동하여 그린다.

■ $y = ax^2 (a \neq 0)$의 그래프

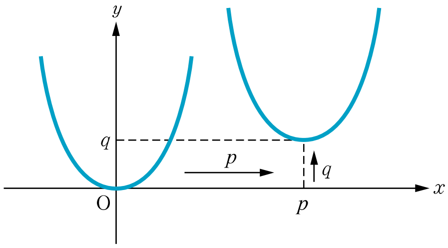
이차함수 $y = ax^2 (a \neq 0)$의 그래프와 특징을 정리하면 다음과 같다.

[표 1-2] **이차함수 $y = ax^2 (a \neq 0)$의 그래프와 특징**

	$a > 0$	$a < 0$
그래프	[그림 1-3]	[그림 1-4]
특징	• 원점을 지나는 아래로 볼록한 곡선 • $x > 0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가 • $x < 0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소	• 원점을 지나는 위로 볼록한 곡선 • $x > 0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소 • $x < 0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

■ $y=a(x-p)^2+q\ (a \neq 0)$의 그래프

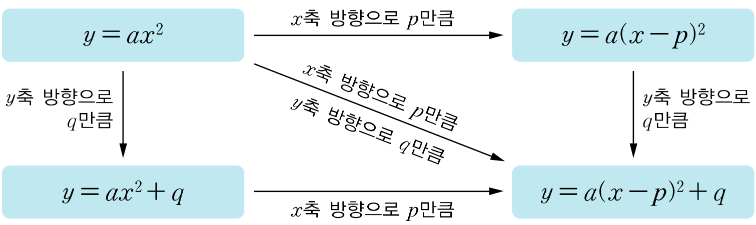
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동하여 얻을 수 있다.



[그림 1-5] 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

■ 이차함수 그래프의 평행이동

이차함수 $y=ax^2$, $y=a(x-p)^2$, $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2+q$의 평행이동 관계를 나타내면 다음과 같다.



[그림 1-6] 이차함수 그래프의 평행이동 관계

일반형 이차함수는 표준형 이차함수로 나타내고, $y=ax^2$의 그래프를 그린 후 [그림 1-6]을 참고하여 평행이동하면 쉽게 그래프를 나타낼 수 있다.

예제 1-6

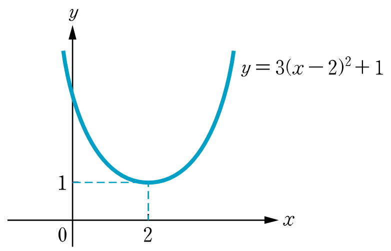
다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(a) $y=3(x-2)^2+1$ (b) $y=-3x^2+6x-4$

TIP 일반형 이차함수는 표준형 이차함수로 표현한 후 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 그래프를 그린다.

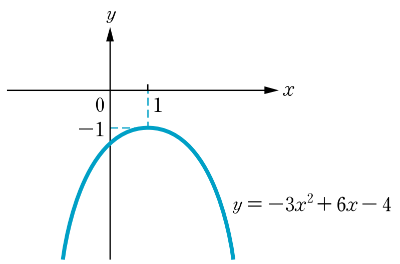
풀이

(a) $y=3(x-2)^2+1$의 그래프는 $y=3x^2$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동하여 그린다.



(b) $y=-3x^2+6x-4=-3(x^2-2x)-4=-3(x-1)^2-1$이다.

따라서 $y=-3x^2+6x-4$의 그래프는 $y=-3x^2$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하여 그린다.



Section 03

유리함수

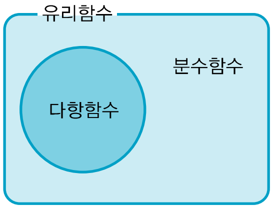
유리함수의 정의

다항식 또는 분수식을 **유리식**rational expression이라 한다. 다음과 같이 유리식을 이용하여 유리함수를 정의할 수 있다.

정의 1-7 유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, $y=f(x)$를 **유리함수**rational function라 한다.

유리함수는 유리식과 마찬가지로 $y=x+1$, $y=x^2+3x-2$와 같은 다항함수와 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$과 같은 분수함수로 나뉜다. 즉, $y=f(x)$가 유리함수이면 다항식 $p(x)$, $q(x)$에 대하여 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 $q(x)$가 상수함수이면 $f(x)$는 다항함수, $q(x)$가 1차 이상의 다항함수이면 $f(x)$는 분수함수이다.



[그림 1-7] **유리함수의 분류**

예제 1-7

다음 함수가 유리함수인지 판정하라.

(a) $y=\dfrac{3x+1}{5}$

(b) $y=\dfrac{3x^2-x+1}{-2x+\sqrt{3}}$

(c) $y=\dfrac{\sqrt{3}\,x+1}{4-\sqrt{x}}$

(d) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

TIP 숫자에 근호가 있는 것은 상관없지만 문자에 근호가 있는 함수는 유리함수가 아니다.

풀이

(a) $3x+1$과 5가 모두 다항식이므로 $y=\frac{3x+1}{5}$은 유리함수이다.

(b) $3x^2-x+1$과 $-2x+\sqrt{3}$이 모두 다항식이므로 $y=\frac{3x^2-x+1}{-2x+\sqrt{3}}$은 유리함수이다.

(c) $\sqrt{3}x+1$은 다항식이지만 $4-\sqrt{x}$가 다항식이 아니므로 $y=\frac{\sqrt{3}x+1}{4-\sqrt{x}}$은 유리함수가 아닙니다.

(d) $x+2$와 $x-2$가 모두 다항식이므로 $y=\frac{x+2}{x-2}$는 유리함수이다.

유리함수의 정의역

유리함수 $f(x)$가 다항함수인지 분수함수인지에 따라서 다음과 같이 정의역이 달라진다.

정리 1-2 유리함수의 정의역

❶ **$f(x)$가 다항함수인 경우**

정의역은 실수 전체의 집합($\mathbb{R}$)이다.

❷ **$f(x)$가 분수함수인 경우**

정의역은 분모를 0으로 만드는 x의 값을 제외한 실수 전체의 집합이다.

예를 들어 $f(x)=x^2-3x+4$는 다항함수이므로 $f(x)$의 정의역은 $\mathbb{R}$이다. 또한 $g(x)=\frac{1}{x+1}$은 분수함수이므로 $g(x)$의 정의역은 분모가 0이 되는 $x=-1$을 제외한 실수 전체의 집합인 $\mathbb{R}-\{-1\}$이다.

예제 1-8

다음 유리함수의 정의역을 구하라.

(a) $f(x)=x^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$

(b) $g(x)=\frac{1}{3}(1-x-x^2)$

(c) $h(x)=\frac{x-4}{(x-3)(x+2)}$

(d) $k(x)=\frac{x+1}{x+1}$

TIP [정리 1-2]에 따라 분수함수의 분모를 0으로 만드는 값은 정의역에서 제외한다.

풀이

(a) $f(x)$는 다항함수이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다.

(b) $g(x)$는 다항함수이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다.

(c) $h(x)$는 분수함수이고 $x=3$과 $x=-2$일 때 $h(x)$의 분모가 0이 된다.
따라서 $h(x)$의 정의역은 $\mathbb{R}-\{3, -2\}$이다.

(d) $k(x)$는 분수함수이고 $x=-1$일 때 $k(x)$의 분모가 0이 된다.
따라서 $k(x)$의 정의역은 $\mathbb{R}-\{-1\}$이다.

[예제 1-8 (d)]의 함수 $y=k(x)$는 $x \neq -1$일 때 분자와 분모를 약분하여 함숫값이 1이 되지만 $x=-1$일 때에는 분모가 0이 되어 함숫값이 정의되지 않으므로 분모가 0이 되게 하는 값인 -1을 정의역에서 반드시 제외해야 한다.

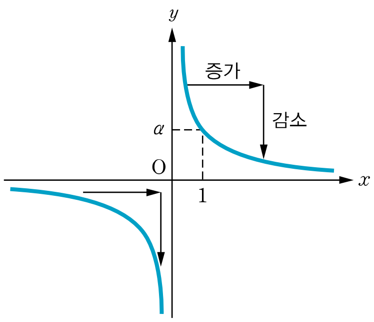
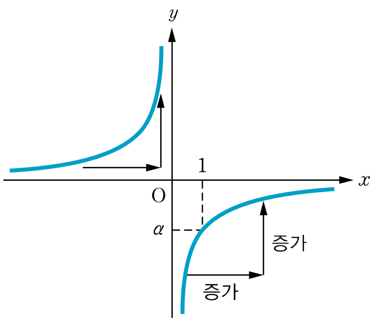
유리함수의 그래프

유리함수 중 다항함수의 그래프는 일차함수와 이차함수의 그래프에서 다루었으므로 이번에는 분수함수인 유리함수의 그래프를 그리는 방법에 대하여 알아보자.

■ $y=\dfrac{k}{x}\,(k \neq 0)$의 그래프

가장 간단한 형태의 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$의 그래프와 특징을 정리하면 다음과 같다.

[표 1-3] 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\,(k \neq 0)$의 그래프와 특징

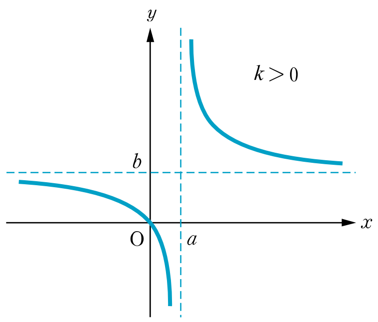
	$k>0$	$k<0$
그래프	 [그림 1-8]	 [그림 1-9]
특징	• 제1사분면과 제3사분면을 지난다.	• 제2사분면과 제4사분면을 지난다.
	• 점근선[1]은 두 직선 x축, y축이다. • $\lvert k \rvert$의 값이 커질수록 원점에서 멀어진다.	

1 그래프가 점점 가까워지는 직선을 점근선이라 한다.

■ $y=\dfrac{k}{x-a}+b\,(k\neq 0)$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하여 그리며 다음과 같은 특징을 갖는다.

- 정의역은 $\{x : x\neq a$인 모든 실수$\}$, 치역은 $\{y : y\neq b$인 모든 실수$\}$이다.
- 점근선은 두 직선 $x=a$와 $y=b$이다.



[그림 1-10] 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b\,(k\neq 0)$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{px+q}{rx+s}$(p, q, r, s는 상수, $p\neq 0$, $qr-ps\neq 0$)의 그래프는 $px+q$를 $rx+s$로 직접 나누어서 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 꼴로 나타낸 후 그래프를 그린다. 예를 들어 $y=\dfrac{4x+2}{x+3}$의 그래프를 그리려면

$$y=\frac{4x+2}{x+3}=-\frac{10}{x+3}+4$$

이므로 $y=\dfrac{4x+2}{x+3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{10}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 4만큼 평행이동하여 그린다. 또한

$$y=\frac{4x-1}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}+2=\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+2$$

이므로 $y=\dfrac{4x-1}{2x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동하여 그린다.

예제 1-9

다음 유리함수의 그래프를 그려라.

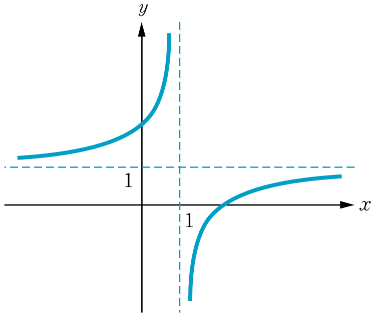
(a) $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ (b) $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$

(c) $y=\dfrac{-4x+1}{2x}$ (d) $y=\dfrac{-4x+1}{-2x+3}$

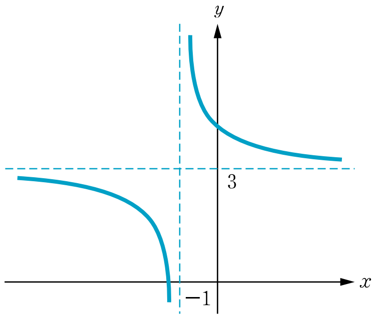
TIP 주어진 유리함수를 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 꼴로 나타낸 후 그래프를 그린다.

풀이

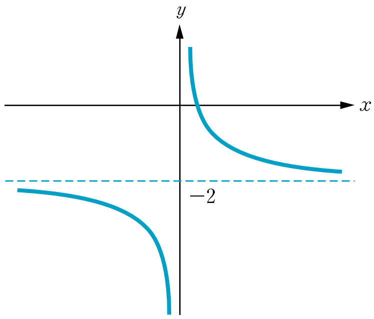
(a) $y=\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+1$의 그래프는 $y=\dfrac{-1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동하여 그린다.



(b) $y=\dfrac{3x+4}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하여 그린다.

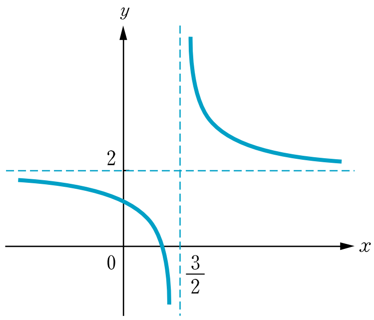


(c) $y=\dfrac{-4x+1}{2x}=\dfrac{1}{2x}-2=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 0만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동하여 그린다.



(d) $y=\dfrac{-4x+1}{-2x+3}=\dfrac{-5}{-2x+3}+2=\dfrac{\frac{5}{2}}{x-\frac{3}{2}}+2$의

그래프는 $y=\dfrac{\frac{5}{2}}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동하여 그린다.



Section 04

무리함수

무리함수의 정의

근호 안에 미지수가 포함된 식을 **무리식**irrational expression이라 한다. 무리식을 이용하여 다음과 같이 무리함수를 정의한다.

정의 1-8 무리함수

함수 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때 $y=f(x)$를 **무리함수**irrational function라 한다.

예를 들어 $y=\sqrt{x}-1$은 무리함수이지만 $y=\sqrt[3]{3}\,x$는 근호 안에 미지수가 없으므로 무리함수가 아닌 유리함수이다.

예제 1-10

다음 함수가 무리함수인지 판정하라.

(a) $y=\frac{1}{3}x^2+\sqrt{3}\,x$

(b) $y=x-2\sqrt{x}+3$

(c) $y=\frac{\sqrt[4]{2}\,x-1}{2}$

(d) $y=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

TIP 근호 안에 미지수가 있는지를 확인한다.

풀이

(a) $y=\frac{1}{3}x^2+\sqrt{3}\,x$에는 근호 안에 문자가 없으므로 무리함수가 아니다.

(b) $y=x-2\sqrt{x}+3$에는 근호 안에 문자가 있으므로 무리함수이다.

(c) $y=\frac{\sqrt[4]{2}\,x-1}{2}$에는 근호 안에 문자가 없으므로 무리함수가 아니다.

(d) $y=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$에는 근호 안에 문자가 있으므로 무리함수이다.

무리함수의 정의역

무리함수의 정의역은 x의 차수에 따라 달라진다.

정리 1-3 무리함수의 정의역

무리함수 $f(x) = \sqrt[n]{\square}$ 의 정의역은 자연수 n에 따라 다음과 같이 달라진다.

❶ **n이 홀수일 때**

$f(x)$의 정의역은 $\square$의 정의역과 같다.

❷ **n이 짝수일 때**

$f(x)$의 정의역은 $\{x : \square \geq 0\}$ 이다.

$n=2$일 때에는 2를 생략하고 $f(x) = \sqrt[2]{\square} = \sqrt{\square}$ 로 나타낸다. 이 경우 [정리 1–3]의 ❷에 따라 근호 안의 식의 값($\square$)이 0 이상이 되게 하는 실수의 집합이 함수 $f(x)$의 정의역이다.

예제 1-11

다음 무리함수의 정의역을 구하라.

(a) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ (b) $g(x) = \sqrt[3]{2x-3}$

(c) $h(x) = \sqrt[4]{1-3x}$ (d) $k(x) = \sqrt[5]{1-3x}$

TIP $\sqrt[n]{\square}$ 에서 n이 홀수인지 짝수인지를 확인하고, [정리 1–3]을 이용한다.

풀이

(a) $f(x)$의 정의역은 $2x-3 \geq 0$이어야 하므로 $\left\{x : x \geq \frac{3}{2}\right\}$이다.

(b) $g(x)$의 정의역은 $y = 2x-3$의 정의역과 같으므로 $\mathbb{R}$이다.

(c) $h(x)$의 정의역은 $1-3x \geq 0$이어야 하므로 $\left\{x : x \leq \frac{1}{3}\right\}$이다.

(d) $k(x)$의 정의역은 $y = 1-3x$의 정의역과 같으므로 $\mathbb{R}$이다.

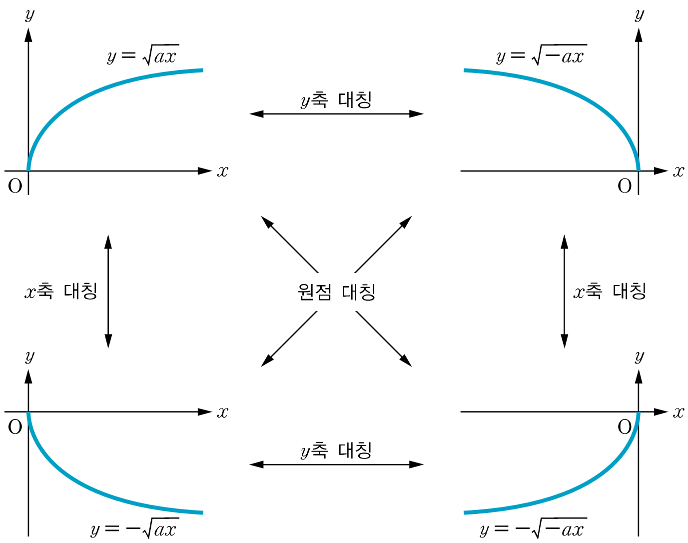
무리함수의 그래프

무리함수의 그래프는 $y = \pm\sqrt{ax}$ 또는 $y = \pm\sqrt{-ax}$ 의 그래프를 그리고 평행이동하여 그린다.

■ $y = \pm\sqrt{ax}$, $y = \pm\sqrt{-ax}$ $(a > 0)$의 그래프

가장 간단한 형태의 무리함수 $y = \sqrt{ax}$, $y = -\sqrt{ax}$, $y = \sqrt{-ax}$, $y = -\sqrt{-ax}$ 의 그래프는 원점을 지나며 다음과 같은 특징을 갖는다.

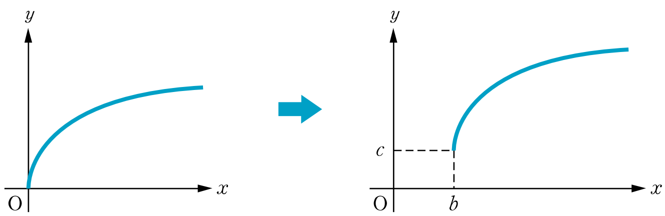
- $y = \sqrt{ax}$ 의 정의역은 $\{x : x \geq 0\}$이고 그래프는 제1사분면에 그려진다.
- $y = -\sqrt{ax}$ 의 정의역은 $\{x : x \geq 0\}$이고 그래프는 제4사분면에 그려진다.
- $y = \sqrt{-ax}$ 의 정의역은 $\{x : x \leq 0\}$이고 그래프는 제2사분면에 그려진다.
- $y = -\sqrt{-ax}$ 의 정의역은 $\{x : x \leq 0\}$이고 그래프는 제3사분면에 그려진다.



[그림 1-11] 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$ 그래프의 대칭이동 관계

■ $y = \pm\sqrt{a(x-b)} + c$ $(a > 0)$의 그래프

$y = \pm\sqrt{a(x-b)} + c$의 그래프는 $y = \pm\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축 방향으로 b만큼, y축 방향으로 c만큼 평행이동하여 그린다. 예를 들어 $y = \sqrt{a(x-b)} + c$ $(a > 0)$의 그래프는 [그림 1-12]와 같이 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.



[그림 1-12] 무리함수 $y=\sqrt{a(x-b)}+c$ $(a>0)$의 그래프

같은 방법으로 $a<0$인 경우에도 $y=\pm\sqrt{ax}$, $y=\pm\sqrt{-ax}$의 그래프를 그린 후 평행이동하면 원하는 그래프를 그릴 수 있다.

예제 1-12

다음 무리함수의 그래프를 그려라.

(a) $y=\sqrt{2x-4}+3$

(b) $y=\sqrt{-2x+6}+2$

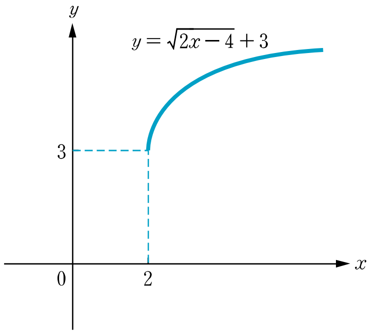
(c) $y=-\sqrt{x-1}-2$

(d) $y=-\sqrt{-2x+6}-1$

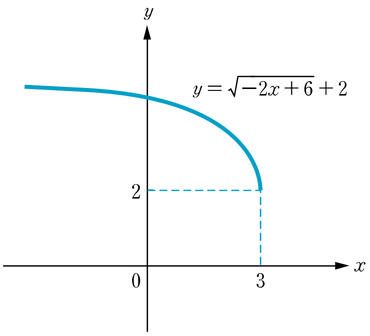
TIP 주어진 무리함수를 $y=\sqrt{a(x-b)}+c$ 또는 $y=-\sqrt{a(x-b)}+c$의 형태로 나타낸다.

풀이

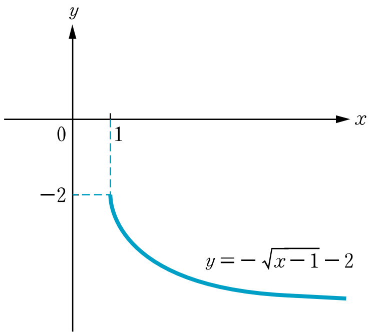
(a) $y=\sqrt{2x-4}+3=\sqrt{2(x-2)}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하여 그린다.



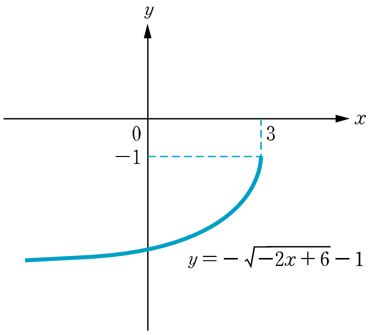
(b) $y=\sqrt{-2x+6}+2=\sqrt{-2(x-3)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동하여 그린다.



(c) $y=-\sqrt{x-1}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동하여 그린다.



(d) $y=-\sqrt{-2x+6}-1=-\sqrt{-2(x-3)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하여 그린다.



Section 05

공학 문제

진자 운동

진자pendulum란 중력이 미치는 곳에서 자유롭게 흔들릴 수 있도록 한 점에 고정된 상태로 매달려 있는 물체이다. 진자가 움직이는 것을 진자 운동이라 하며, 진자의 주기[2]는 진자의 길이 l에 영향을 받는다. 진자 운동은 지구 중력에 의해 발생되며, 자연계의 중요한 특성을 알게 해준다. 진자의 길이가 l인 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간 t는

[그림 1-13] 진자

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

이다. 이때 g는 중력가속도이다.

예제 1-13

다음 물음에 답하라. 단, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$으로 계산한다.

(a) 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간을 3배로 늘리려면 진자의 길이는 어떻게 해야 하는지 설명하라.

(b) 처음 길이가 $2l$인 진자의 길이를 줄여서 진자의 길이가 $0.25l$이 되었을 때 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간은 처음보다 얼마나 줄어드는지 설명하라. 이때 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 둘째 자리까지의 근삿값으로 나타내라.

TIP $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$에서 $3t$가 될 때 l의 값을 구하고, l의 값을 $0.25l$으로 바꾸었을 때 t의 값을 구한다.

풀이

(a) 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간이 $3t$일 때, 진자의 길이를 l_1이라 하면

$$3t = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{9.8}}$$

2 주기는 진동현상에서 진동이 한 번 이루어질 때 걸리는 시간이다.

이고 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{9.8}}$ 이므로 위 식에 대입하면 $l_1 = 9l$이다. 따라서 진자의 길이를 처음 길이보다 9배 늘리면 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간은 3배가 된다.

(b) 진자의 길이가 $2l$일 때 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간을 t_0라 하면

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{9.8}}$$

이다. 진자의 길이가 $0.25l$로 줄어들었을 때 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간을 t_1이라 하면

$$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0.25l}{9.8}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{8}\cdot 2l}{9.8}} = \sqrt{\frac{1}{8}}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2l}{9.8}} = \sqrt{\frac{1}{8}}\,t_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\,t_0$$

이다. 따라서 진자의 길이가 $2l$에서 $0.25l$로 줄어들었을 때 진자가 왕복하는 데 걸리는 시간은 처음 시간의 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$배이다. 이를 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 둘째 자리까지의 근삿값으로 구하면 $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35$배이다.

화씨온도와 섭씨온도

온도를 표시하는 대표적인 방법에는 화씨온도(°F)와 섭씨온도(°C)가 있다. **화씨온도**(°F)는 얼음이 녹는점을 32°F, 물이 끓는점을 212°F로 하여 그 사이를 180등분한 온도 단위이고, **섭씨온도**(°C)는 얼음이 녹는점을 0°C, 물이 끓는점을 100°C로 하여 그 사이를 100등분한 온도 단위이다. 화씨온도 F와 섭씨온도 C의 관계는 다음과 같다.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

예제 1-14

다음 물음에 답하라.

(a) 화씨온도와 섭씨온도의 관계를 $C = aF + b$로 나타낼 때, a와 b의 값을 구하라.

(b) 섭씨온도 36°C를 화씨온도로 변환하라.

(c) 화씨온도 100°F를 섭씨온도로 변환하라. 이때 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 첫째 자리까지의 근삿값으로 나타내라.

TIP 주어진 식을 C에 대하여 나타내려면 식에 5를 곱하고 C에 대하여 정리한다.

풀이

(a) 일차함수 $F=\frac{9}{5}C+32$에서 우변의 32를 좌변으로 이항하면 $F-32=\frac{9}{5}C$이다. 이 식의 양변에 $\frac{5}{9}$를 곱하면 $\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}=C$이다. 따라서 $a=\frac{5}{9}$이고 $b=-\frac{160}{9}$이다.

(b) $C=36$을 $F=\frac{9}{5}C+32$에 대입하면 $F=96.8$이므로 화씨온도로 98.6°F이다.

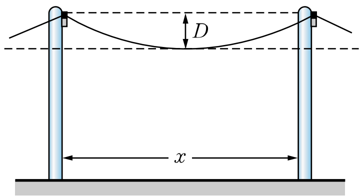
(c) $F=100$을 $\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}=C$에 대입하면 $C=\frac{340}{9}$이고, 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 첫째 자리까지의 근삿값을 구하면 $C=\frac{340}{9}\approx 37.8$°C이다.

이도

전력공학에서 전선을 전선 지지물에 가설할 때, 외부 환경에 노출된 전선의 길이가 변화하는 것을 감안하여 이도를 주어 케이블을 늘어뜨려 설치한다. **이도**dip란 전선이 전선의 지지점을 연결하는 수평선으로부터 밑으로 내려가 있는 길이이다.

지지물 간의 거리를 xm, 전선의 실제 길이를 ym, 이도를 Dm라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$y=x+\frac{8D^2}{3x}$$



[그림 1-14] 전선의 이도

예제 1-15

이도가 3m일 때, xm 떨어진 두 지점에 연결된 늘어진 전선의 실제 길이 ym는 다음과 같이 표현된다.

$$y=x+\frac{24}{x}$$

늘어진 전선의 실제 길이가 11m일 때 두 지점 사이의 거리를 구하라(단, 두 지점 사이의 거리는 5m 이상이다).

TIP 케이블 길이에 대한 식에 $y=11$을 대입하고 x를 곱하여 이차방정식을 만들어 해를 구한다.

풀이

$11=x+\frac{24}{x}$의 모든 항에 x를 곱하면 $11x=x^2+24$이다. 따라서 $x^2-11x+24=0$이므로 $(x-3)(x-8)=0$으로부터 $x=3$ 또는 $x=8$이다. 이때 두 지점 사이의 거리는 5m 이상이므로, 두 지점 사이의 거리는 8m이다.

Chapter 01 연습문제

1.1 $A = x^2 + 2xy$, $B = 3 - xy + x^3$일 때 다음 식을 x에 대한 내림차순으로 나타내라.

(a) $2A + 3B$ (b) $3A - 2B$

(c) A^2 (d) AB

1.2 다음 함수가 x에 대한 다항함수인지 판정하라.

(a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ (b) $y = \sqrt{3}\,x^2 - 5x + \dfrac{1}{7}$

(c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{2}{x}$ (d) $y = x^4 - x\sqrt{x} + 2$

1.3 다음 두 점을 지나는 일차함수를 구하라.

(a) $(1,\ 3),\ (2,\ 5)$ (b) $(2,\ -4),\ (-1,\ 1)$

(c) $(3,\ 0),\ (0,\ -2)$ (d) $(0,\ 3),\ (-2,\ 0)$

1.4 다음 일반형 이차함수를 표준형 이차함수로 나타내라.

(a) $y = x^2 + 3x + 3$ (b) $y = -x^2 + 4x + 3$

(c) $y = 2x^2 - 5x + 6$ (d) $y = -3x^2 - x + 1$

1.5 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(a) $y = 3(x-1)^2 + 1$ (b) $y = -(x+2)^2 - 1$

(c) $y = x^2 + 2x + 4$ (d) $y = -x^2 + x$

1.6 다음 함수가 x에 대한 유리함수인지 무리함수인지 판정하라.

(a) $y = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x} + x^2$ (b) $y = \sqrt{3}\,x^2 + 4x + \dfrac{1}{3}$

(c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{2}{x}$ (d) $y = x^4 - x^{\frac{3}{2}} + 2$

1.7 다음 유리함수의 정의역을 구하라.

(a) $y = -\dfrac{1}{3}x + 1$ (b) $y = \dfrac{3x+2}{x^2-1}$

(c) $y = \dfrac{4x^2-1}{x^3+x}$ (d) $y = \dfrac{x}{x}$

1.8 다음 유리함수의 그래프를 그려라.

(a) $y = \dfrac{x}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{x-1}{x}$

(c) $y = \dfrac{3x+1}{-x+2}$ (d) $y = \dfrac{2x-1}{-x-1}$

1.9 다음 무리함수의 정의역을 구하라.

(a) $y = \sqrt{x^2-4}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2-4}$

(c) $y = \sqrt[4]{5-x^2}$ (d) $y = \sqrt[5]{5-x^2}$

1.10 다음 무리함수의 그래프를 그려라.

(a) $y = \sqrt{2x-6}$ (b) $y = -\sqrt{3x+3}$

(c) $y = \sqrt{8-4x}$ (d) $y = -\sqrt{-4-2x}$

1.11 갈릴레이는 4세기 전에 실시하였던 실험을 통해 자유낙하에 의한 t초 후의 물체의 낙하거리 $S(t)$는

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

으로 표현된다는 사실을 발견하였다. 다음 물음에 답하라(단, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$으로 계산한다).

(a) 낙하거리가 $1\,\mathrm{m}$가 되는 데 걸리는 시간 t를 구하라. 이때 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 둘째 자리까지의 근삿값으로 나타내라.

(b) 낙하거리가 $4\,\mathrm{m}$가 되는 지점부터 $8\,\mathrm{m}$가 되는 지점까지 물체가 떨어지는 데 걸리는 시간 t를 구하라. 이때 공학용 계산기를 이용하여 소수점 아래 둘째 자리까지의 근삿값으로 나타내라.

1.12 공을 $40\,\mathrm{m/s}$ 의 속도로 공중으로 던졌을 때 t초 후 공의 높이는

$$y = 40t - 16t^2$$

으로 주어진다고 한다. 다음 물음에 답하라.

(a) 공의 높이가 최고가 될 때의 시간 t를 구하라.
(b) 공이 최고점일 때의 높이를 구하라.