CHAPTER

01

이자

Interest

CONTENTS

학 / 습 / 목 / 표

- 단리이자와 복리이자를 이해하고, 실이율을 구할 수 있다.
- 현가와 종가를 이해하고, 할인가를 구할 수 있다.
- 명목이율과 명목할인율의 성질을 이해하고, 실이율과 실할인율을 구할 수 있다.
- 이력과 할인력을 이해하고, 현가와 종가를 구할 수 있다.

Section 1.1

원금과 원리금

만약 여유 자금이 생긴다면 이 자금을 투자하여 얼마나 늘릴 수 있는가에 관심을 가지게 될 것이고, 일정 기간 금융기관으로부터 융자를 받는다면 얼마를 갚아야 하는가에 많은 관심을 가지게 될 것이다. 이를 위해 이 절에서는 원금과 단리이자 또는 복리이자에 의한 원리금을 구하는 방법에 대해 살펴본다.

01 원리금 함수와 실이율

- **이자** : 자금을 투자하여 지급되는 부가적인 대가 또는 자본을 빌려서 사용한 대가로 지불하는 금액
- **원금** : 최초로 투자한 금액 또는 최초로 차용한 금액
- **원리금** : 원금을 일정 기간 투자하거나 빌려 사용한 원금과 이자의 총합
- **원리금 함수** : 일정 기간이 지난 후에 최초 원금에 대한 원리금을 나타내는 함수
- **원리금 비율함수** : 투자원금에 대하여 일정 기간이 지난 후에 투자원금에 대한 원리금의 비율을 나타내는 함수
- **실이율** : 투자 초기에 투입된 원금이 단위기간 1년 동안 벌어들인 이자

02 단리

- **단리** : 투자한 원금에 대하여 매년 이자가 일정하게 늘어나는 실이율
- **단리이자에 의한 원리금 합계** : 원리금 = 원금 + 원금 × 단리이율 × 기간

$$A(t) = P(1 + it)$$

03 복리

- **복리** : 원금에 전년도의 이자가 합해져 다음 연도에 투자되는 방식으로 원리금이 늘어나는 실이율
- **복리이자에 의한 원리금 합계** : 원리금 = 원금 × (1 + 복리이율)$^{\text{기간}}$

$$A(t) = P(1 + i)^t$$

01 원리금 함수와 실이율

우리에게 여유 자금이 있거나 목돈을 마련하기 위해 저축을 한다면, 이 자금을 어떻게 투자하여 증식시킬 것인지가 가장 큰 관심사일 것이다. 또한 주택을 구입하거나 사업자금을 마련하기 위해서 금융기관으로부터 필요한 자금을 빌린다면, 차용인 입장에서 그 대가로 얼마를 갚아야 하는지가 가장 큰 관심사일 것이다. 이때 자금을 투자한 자본가에게 대가로 지급되는 금액 또는 자본가로부터 자금을 빌려 쓴 차용인이 자본을 빌린 대가로 지불하는 금액을 **이자** interest라 하고, 이자의 비율을 **이자율** interest rate이라 한다. 그리고 최초로 투자한 금액 또는 최초로 차용한 금액을 **원금** principal이라 하고, 원금을 일정 기간 투자하거나 빌려 쓴 후에 되돌려 받거나 줘야 할 원금과 이자의 총합을 **원리금** accumulated value이라 한다.

그러면 투자원금 1에 대하여 일정 기간 t가 지난 후에 투자원금에 대한 원리금의 비율을 나타내는 함수 $a(t)$를 **원리금 비율함수** accumulated function라 하며, 이 원리금 비율함수는 다음과 같은 특성을 갖는다.

- $a(0)=1$, 즉 $t=0$인 시점에서의 최초 원금은 1이다.
- 일반적으로 $a(t)$는 증가함수이다. 즉 투자기간이 길어질수록 이자가 증식하여 원리금 비율은 증가한다.
- 이자가 연속적으로 발생한다면 $a(t)$는 연속함수이다. 반면에, 이자지급일 사이에 이자가 연속적으로 발생하지 않는다면 $a(t)$는 불연속함수이다.

한편, 일정 기간 t가 지난 후에 최초 원금 k에 대한 원리금을 나타내는 함수 $A(t)$는 다음과 같은 특성을 가지며, 이때 함수 $A(t)$를 **원리금 함수** amount function라 한다.

- $A(0)=k$
- $A(t)=k\,a(t)$
- 일반적으로 $A(t)$는 증가함수이다.
- 이자가 연속적으로 발생한다면 $A(t)$는 연속함수이다.

예제 1-1

원리금 함수가 $A(t)=3t^3+2t+3$일 때, 원리금 비율함수 $a(t)$를 구하라.

풀이

최초 원금은 $A(0)=3$이므로 원리금 함수와 원리금 비율함수 사이에 $A(t)=3a(t)$가 성립한다. 따라서 원리금 비율함수는 $a(t)=\frac{1}{3}A(t)=\frac{1}{3}(3t^3+2t+3)$이다.

그러므로 최초에 $A(0)$을 투자하여 기간 t가 지난 후에 원리금이 $A(t)$가 되었다면, 이 기간 동안 발생한 이자는 다음과 같다.

$$I(t)=A(t)-A(0)$$

그리고 시각 t와 $t+s$ 사이에 발생한 이자는 다음과 같이 시각 $t+s$에서 벌어들인 원리금과 시각 t에서 벌어들인 원리금의 차이이다.

$$I(s)=A(t+s)-A(t)$$

이자가 연말에 지급된다고 할 때, 연초에 투입된 원금 1에 대해 단위기간 1년 동안 발생한 이자를 **실이율**effective rate of interest이라 하고, i로 나타낸다.

$$i=a(1)-a(0)=a(1)-1 \quad \text{또는} \quad a(1)=i+1$$

초기 원금이 1년 동안 추가되거나 상환되지 않고 그대로 유지된다고 할 때, 실이율은 다음과 같은 특징을 갖는다.

- 이자가 1년에 한 번 지급되는 경우에 대하여 백분율(%)로 나타나는 이자율을 의미한다.
- 투자일로부터 1년이 경과하는 시기에 이자가 지급된다.

이때 투자일로부터 $(n-1)$차 연도와 n차 연도 사이에 발생한 이자액을 $I(n)$이라 하면 $I(n)=A(n)-A(n-1)$, $n\geq 1$이 성립하고, 이때 초기 원금 1에 대하여 단위기간인 1년 후의 실이율은 다음과 같다.

$$i=\frac{(i+1)-1}{1}=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{I(1)}{A(0)}$$

즉 실이율은 투자 초기의 원금에 대한 투자기간 동안에 발생한 이자의 비율을 의미한다. 따라서 n차 연도의 실이율은 그 해에 얻은 이자에 대한 그 해 초의 원리금 합계의 비율로

정의된다. 따라서 이자는 최초에 빌리거나 투자한 원금과 이자율 그리고 기간에 의해 결정되는 것을 알 수 있다. 이때 n차 연도에 발생한 실이율 i_n은 다음과 같이 정의된다.

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I(n)}{A(n-1)}$$

$A(n)$: n시점에서의 원리금

$I(n)$: n차 연도에 발생한 이자

예제 1-2

1,000만 원을 투자하여 1차 연도 말에 1,012만 원, 2차 연도 말에 1,024만 원, 3차 연도 말에 1,036만 원이 되었다고 한다.

(a) 처음 1년간 발생한 이자를 구하라.
(b) 1차 연도 말부터 2년간 발생한 이자를 구하라.
(c) 연차별 실이율을 구하라.

풀이

(a) $A(0) = 1000$, $A(1) = 1012$이므로 처음 1년간 발생한 이자는 다음과 같다.

$$I(1) = A(1) - A(0) = 1012 - 1000 = 12(\text{만 원})$$

(b) $A(1) = 1012$, $A(3) = 1036$이므로 1차 연도 말부터 2년간 발생한 이자는 다음과 같다.

$$I = A(3) - A(1) = 1036 - 1012 = 24(\text{만 원})$$

(c) 처음 1년간 실이율은 다음과 같다.

$$i_1 = \frac{I(1)}{A(0)} = \frac{12}{1000} = 0.012$$

또한 2차 연도와 3차 연도의 실이율은 각각 다음과 같다.

$$i_2 = \frac{I(2)}{A(1)} = \frac{12}{1012} = 0.0119, \quad i_3 = \frac{I(3)}{A(2)} = \frac{12}{1024} = 0.0117$$

[예제 1-2]를 보면 이자가 매년 12만 원씩 일정하게 늘어나기는 하지만, 실이율은 매년 감소하는 것을 알 수 있다. 그러나 다음 [예제 1-3]은 매 연도 말의 이자가 일정하게 늘어나지 않지만(사실은 지수적으로 늘어난다), 실이율은 동일한 것을 알 수 있다.

예제 1-3

1,000만 원을 투자하여 1차 연도 말에 10,120,000원, 2차 연도 말에 10,241,440원, 3차 연도 말에 10,363,337원이 되었다고 한다.

(a) 처음 1년간 발생한 이자를 구하라.
(b) 1차 연도 말부터 2년간 발생한 이자를 구하라.
(c) 연차별 실이율을 구하라.

풀이

(a) $A(0) = 1000$, $A(1) = 1012$이므로 처음 1년간 발생한 이자는 다음과 같다.

$$I(1) = A(1) - A(0) = 1012 - 1000 = 12(\text{만 원})$$

(b) $A(1) = 10120000$, $A(3) = 10363337$이므로 1차 연도 말부터 2년간 발생한 이자는 다음과 같다.

$$I = A(3) - A(1) = 103633376 - 10120000 = 243337(\text{원})$$

(c) 처음 1년간 실이율은 다음과 같다.

$$i_1 = \frac{I(1)}{A(0)} = \frac{12}{1000} = 0.012$$

또한 2차 연도와 3차 연도의 실이율은 각각 다음과 같다.

$$i_2 = \frac{I(2)}{A(1)} = \frac{12144}{10120000} = 0.012, \quad i_3 = \frac{I(3)}{A(2)} = \frac{121897}{10241440} = 0.012$$

02 단리

이자를 계산하는 방법에는 단리법과 복리법이 있는데, 일반적으로 생명보험회사에서는 월 단위 계산에는 단리를 사용하고, 연 단위 계산에는 복리를 적용한다. [예제 1-2]와 같이 투자한 원금 1에 대하여 매년 이자가 일정하게 늘어나는 실이율을 **단리**simple interest라 한다. 이러한 단리이자는 투자기간 동안 이자가 재투자되지 않으므로 원금이 증가하지 않는다. 따라서 1차 연도 초에 투자한 원금 1에 대한 1년 후의 원리금은 $a(1) = 1 + i$이고, 투자한 원금에 변화가 없으므로(즉 이자가 재투자되지 않으므로) 2년 후의 원리금은 $a(2) = 1 + 2i$이다.

그러므로 n년 후의 원리금은 $a(n) = 1 + in$이 된다. 따라서 투자 초기의 원금 P에 대한 n년 후의 원리금 합계 $A(n)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(n) &= \text{원금} + \text{이자} \\ &= \text{원금} + \text{원금} \times \text{기간} \times \text{이율} \\ &= P(1 + in) \end{aligned}$$

따라서 n년 동안 발생한 이자는

$$I = A(n) - A(0) = P(1 + in) - P = Pin$$

이다. 그리고 n차 연도의 실이율 i_n은 다음과 같다.

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{(1 + in) - [1 + i(n-1)]}{1 + i(n-1)} = \frac{i}{1 + i(n-1)}$$

그러므로 [예제 1-2]와 같이 n이 증가함에 따라 n차 연도의 실이율은 감소한다. 따라서 단리이자에 의한 실이율은 시간이 흐름에 따라 감소하는 것을 알 수 있다.

한편, 단리이자에 대한 원리금 비율함수 $a(t)$는 정수인 연도뿐만 아니라 보편적으로 어느 시점에서도 일정한 비율에 의하여 이자가 지급되는 경우로 확장할 수 있다. 즉 정수가 아닌 어느 시점 t에 대한 $a(t)$를 정의하기 위해 $t \geq 0$, $s \geq 0$에 대하여 다음이 성립한다고 하자.

$$a(t+s) = a(s) + a(t) - 1$$

단리이자에 의한 원리금 비율함수가 이러한 성질을 갖는 것에 대하여, 원리금 $a(t+s)$는 시점 t에서 원금 $a(t)$를 기간 s동안 단리이자로 투자하여 벌어들인 원리금을 나타내므로 $a(t+s) = a(t) + is$로 생각할 수 있다. 왜냐하면 $a(s) = a(0) + is$일 때 $a(0) = 1$이므로 다음이 성립하기 때문이다.

$$a(t+s) = a(t) + is = a(t) + a(s) - a(0) = a(t) + a(s) - 1$$

다시 말해, 투자원금 1에 대하여 기간 $t+s$ 동안 벌어들인 단리에 의한 이자 총액은 기간 t 동안 벌어들인 이자 총액과 기간 s 동안 벌어들인 이자 총액의 합이다. 그러므로 임의의 시점 t에서 $a(t)$가 미분가능하다면

$$\begin{aligned} a'(t) &= \lim_{s \to 0} \frac{a(t+s) - a(t)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{[a(t) + a(s) - 1] - a(t)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{a(s) - 1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{a(s) - a(0)}{s} \\ &= a'(0) \end{aligned}$$

이므로, $a'(t) = a'(0)$ (상수)인 것을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^t a'(u)du &= \int_0^t a'(0)du \\ a(t) - a(0) &= a'(0)t \\ a(t) - 1 &= a'(0)t \\ a(t) &= 1 + a'(0)t \end{aligned}$$

이고, $a(1) = 1 + i$이므로 $a'(0) = i$, 즉 $a(t) = 1 + it$, $t \geq 0$이다. 그러면 투자원금 P에 대한 임의의 시점 t에서 벌어들인 이자 총액은 다음과 같다.

$$I(t) = P(1 + it) - P = Pit$$

예제 1-4

다음을 구하라.

(a) 투자원금 1,000만 원을 연이율 4.5%인 단리로 5년간 투자한다고 할 때, 5년 후의 원리금과 총 이자수익을 구하라.

(b) 투자원금에 단리 5%의 이율이 적용된다고 할 때, 실이율이 2.5%가 되는 해를 구하라.

풀이

(a) 5년 후의 원리금은 $A(5) = 1000(1 + 0.045 \cdot 5) = 1225$(만 원)이므로 총 이자수익은 $I = A(5) - A(0) = 1225 - 1000 = 225$(만 원)이다. 다른 방법으로는 $P = 1000$, $i = 0.045$, $n = 5$이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Pin = 1000 \cdot (0.045) \cdot 5 = 225(\text{만 원})$$

(b) $i = 0.05$에 대하여 n차 연도의 실이율은 $i_n = 0.025$이므로

$$0.025 = \frac{0.05}{1 + (0.05)(n-1)}$$

로부터 $n = 21$, 즉 21차 연도의 실이율이 2.5%이다.

예제 1-5

다음을 구하라.

(a) 투자원금 1,000만 원을 4년간 단리로 투자하여 4년 후에 이자 총액이 144만 원이라 할 때, 단리이율을 구하라.

(b) 투자원금 1,000만 원을 단리이율 4.2%로 투자하여 원리금이 1,399만 원이 되었다고 할 때, 투자기간을 구하라.

풀이

(a) 투자원금 1,000만 원을 4년간 투자하여 144만 원의 이자수익이 발생했으므로 $I = 1000 \cdot i \cdot 4 = 144$이다. 그러므로 $i = \dfrac{144}{4000} = 0.036$, 즉 단리이율은 3.6%이다.

(b) 투자원금 1,000만 원을 기간 t 동안 투자하여 399만 원의 이자수익이 발생했으므로 $I = 1000 \cdot (0.042) \cdot t = 399$이다. 따라서 투자기간은 $t = \dfrac{399}{1000 \cdot (0.042)} = 9.5$년, 즉 9년 6개월이다.

03 복리

최초 투자한 원금 1에 대하여 1차 연도 말의 원리금 $1+i$가 다시 2차 연도의 투자원금이 된다면, 2차 연도의 이자는 $(1+i)i$가 되어 2차 연도 말의 원리금은 다음과 같다.

$$a(2)=(1+i)+(1+i)i=(1+i)^2$$

이 원리금 $a(2)=(1+i)^2$이 3차 연도의 투자원금이 되면, 3차 연도 말의 원리금은

$$a(3)=(1+i)^2+(1+i)^2 i=(1+i)^3$$

이 된다. 이와 같이 원금에 이자가 합해져 다음 연도에 투자되는 방식으로 원리금이 늘어나는 실이율을 **복리**compound interest라 하며, 일반적으로 n년 후의 원리금은 $a(n)=(1+i)^n$이 된다. 따라서 투자 초기의 원금 P에 대한 n년 후의 원리금 합계 $A(n)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(n) &= \text{원금} \times (1+\text{이율})^{\text{기간}} \\ &= P(1+i)^n \end{aligned}$$

원리금 합계에서 이자는 연 단위(n)로 증가하지만, 이자가 연속적으로 증가하므로 임의의 양수 t에 대하여 동일하게 생각할 수 있다. 최초 투자한 원금 1에 대하여 기간 $t+s$ 동안 투자한 원리금 $a(t+s)$는 처음 기간 t 동안 투자한 원리금 $a(t)$를 투자기간이 끝남과 동시에 다시 기간 s 동안 재투자하여 벌어들인 총액이므로 복리이자에 의한 원리금은 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$a(t+s)=a(t)a(s),\quad t\geq 0,\quad s\geq 0$$

이때 원리금 함수 $a(t)$가 임의의 시점 t에서 미분가능하다면

$$\begin{aligned} a'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{a(t)a(s)-a(t)}{s} \\ &= a(t)\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-1}{s} = a(t)\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s} \\ &= a(t)a'(0) \end{aligned}$$

이 성립한다. 즉 $\dfrac{a'(t)}{a(t)} = a'(0)$이 성립한다. 한편, $a(0)=1$이므로 다음을 얻는다.

$$\int_0^t \frac{a'(u)}{a(u)}du = \int_0^t a'(0)du$$
$$\ln a(t) - \ln a(0) = a'(0)t$$
$$\ln a(t) = a'(0)t$$

이때 $a(1)=1+i$이므로 마지막 관계식으로부터 $\ln a(1) = a'(0)\cdot 1 = \ln(1+i)$이다. 따라서 $a'(0) = \ln(1+i)$이므로 다음이 성립한다.

$$\ln a(t) = a'(0)t$$
$$\ln a(t) = t\ln(1+i) = \ln(1+i)^t$$
$$a(t) = (1+i)^t$$

즉 최초 투자한 원금 1에 대하여 임의의 시점 t에서 복리이자에 의한 원리금 함수를 $a(t) = (1+i)^t$, $t \geq 0$으로 정의할 수 있다. 그러면 [예제 1-3]과 같이 n차 연도의 실이율 i_n과 복리이자율 i가 동일한 것을 다음과 같이 쉽게 알 수 있다.

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = (1+i) - 1 = i$$

따라서 복리이자에 의한 n번째 연도의 실이율은 투자기간에 상관없이 복리이자율과 동일하다.

예제 1-6

투자원금 1,000만 원을 연이율 4.5%인 복리로 투자할 때, 다음을 구하라.

(a) 5년간 투자할 경우의 원리금과 총 이자수익
(b) 6개월간 투자할 경우의 원리금

풀이

(a) 5년 후의 원리금은 $A(5) = 1000(1+0.045)^5 = 1000\cdot(1.24618) = 1246.18$(만 원)이므로 총 이자수익은 $I = A(5) - A(0) = 1246.18 - 1000 = 246.18$(만 원)이다.

(b) 6개월은 0.5년이므로 6개월 동안 벌어들인 원리금은 다음과 같다.

$$A(0.5) = 1000(1+0.045)^{0.5} = 1000\cdot(1.02225) = 1022.25$$

예제 1-7

투자원금 1,000만 원을 복리로 투자할 때, 다음을 구하라.

(a) 이 원금을 4년간 투자하여 이자 총액이 144만 원이 되었다고 할 때, 연이율을 구하라.
(b) 이 원금을 복리이율 4.2%로 투자하여 원리금이 1,399만 원이 되었다고 할 때, 투자기간을 구하라.

풀이

(a) 투자원금 1,000만 원을 4년간 투자하여 144만 원의 이자수익이 발생했으므로 4년 후의 원리금은 $A(4)=1000(1+i)^4=1144$이다. 따라서

$$(1+i)^4=1.144; \quad i=-1+\sqrt[4]{1.144}=0.0342$$

이므로, 연이율은 3.42%이다.

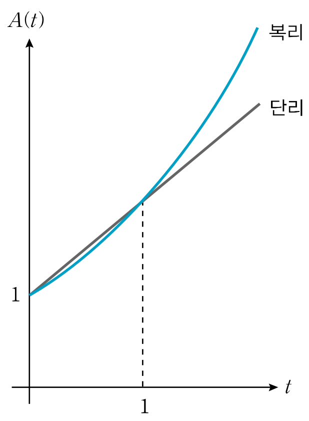
(b) 투자원금 1,000만 원을 기간 t 동안 투자하여 399만 원의 이자수익이 발생했으므로 이 기간 동안 발생한 원리금은 $A(t)=1000(1+0.042)^t=1399$이다. 따라서 투자기간은

$$(1.042)^t=1.399; \quad \ln(1.042)^t=\ln(1.399); \quad t\ln(1.042)=\ln(1.399)$$

이므로, $t=\dfrac{\ln(1.399)}{\ln(1.042)}=8.16$이다. 즉 8.16년이다.

동일한 이자율 i에 대하여 단리와 복리의 원리금 함수를 비교하면 [그림 1-1]과 같다. 그러므로 두 이자에 대하여 다음과 같은 성질이 성립하는 것을 쉽게 알 수 있다.

- 투자기간이 1년 미만인 경우($0<t<1$), $(1+i)^t<1+it$이므로 단리 원리금이 복리 원리금보다 크다.
- 투자기간이 1년인 경우($t=1$), $(1+i)^1=1+i$이므로 단리 원리금과 복리 원리금이 동일하다.
- 투자기간이 1년보다 긴 경우($t>1$), $(1+i)^t>1+it$이므로 복리 원리금이 단리 원리금보다 크다.



[그림 1-1] 단리와 복리의 원리금 함수 비교

예제 1-8

투자원금 1,000만 원을 연이율 10%로 투자할 때, 1차 연도 말부터 3차 연도 말의 원리금 합계를 단리와 복리로 각각 구하고, 연도별 실이율을 구하라.

풀이

1차 연도 말부터 3차 연도 말까지 투자원금에 대한 단리와 복리의 원리금, 이자, 실이율을 나타내면 다음 표와 같다.

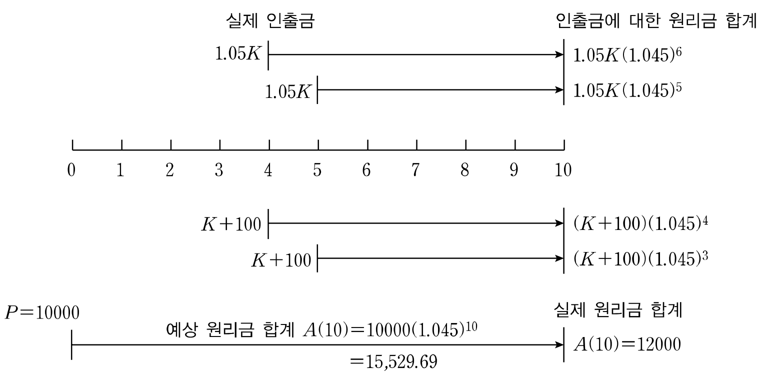
기간	단리			복리		
	원리금	이자	실이율	원리금	이자	실이율
0	1,000	–	–	1,000	–	–
1	$1{,}000(1+0.1)=1{,}100$	100	10%	$1{,}000(1+0.1)=1{,}100$	100	10%
2	$1{,}000(1+2\cdot 0.1)=1{,}200$	100	9.09%	$1{,}000(1+0.1)^2=1{,}210$	110	10%
3	$1{,}000(1+3\cdot 0.1)=1{,}300$	100	8.3%	$1{,}000(1+0.1)^3=1{,}331$	121	10%

예제 1-9

처음 5년 6개월 안에 인출금이 발생하면, 인출금의 5%가 위약금으로 부여되는 조건에서 A는 연간 실이율 4.5%로 10년간 은행에 10,000만 원을 저축한다고 한다. A가 4차, 5차 연도 말에 각각 K를 인출하고, 6차, 7차 연도 말에 각각 $K+100$을 인출한다고 할 때, 10차 연도 말에 받을 원리금 총액에서 차감액이 12,000만 원이 되었다. 이때 인출금 K를 구하라.

풀이

10차 연도 말에 받을 원리금 총액은 $A(10)=10000(1+0.045)^{10}$이다. 처음 5년 6개월 안에 인출금이 발생하면 인출금의 5%가 위약금으로 부여되므로 다음 그림과 같이 4차, 5차 연도 말에 발생한 실제 인출금은 $1.05K$이고, 이 인출금에 대한 10차 연도 말의 원리금은 각각 $(1.05)K(1.045)^6$, $(1.05)K(1.045)^5$이다. 또한 6차, 7차 연도 말에 발생한 인출금은 $K+100$이고, 이 인출금에 대한 10차 연도 말의 원리금은 각각 $(K+100)(1.045)^4$과 $(K+100)(1.045)^3$이다.



그러므로 10차 연도 말에 원리금 총액에서 4년 동안 인출하여 발생한 차감액은

$$\begin{aligned}10000(1.045)^{10} &- (1.05)K(1.045)^6 - (1.05)K(1.045)^5 - (K+100)(1.045)^4 - (K+100)(1.045)^3 \\ &= 15296.3 - 5.0096K\end{aligned}$$

이다. 이때 이 차감액이 12,000이므로 $15296.3 - 5.0096K = 12000$이다. 따라서 인출금은 $K=658$(만 원)이다.

Section 1.1 연습문제

1. 연간 8%의 단리이율로 투자할 때, 다음을 구하라.
   (a) 원금이 1,000만 원인 경우 1년 후의 원리금
   (b) 1년 후의 원리금이 1,160만 원인 경우의 원금

2. 연간 7%의 단리이율로 2년간 1,000만 원을 투자한다고 할 때, 2년 후의 원리금을 구하라. 그리고 동일한 조건에서 6개월 동안 투자할 때의 이자 총액을 구하라.

3. 금융권에서 5,000만 원을 빌려 2달 후에 6,000만 원을 갚았다고 할 때, 연간 단리이율을 구하라.

4. 처음 1년간 1,000만 원을 8% 단리로 투자하고, 1년 후에 이자를 인출하여 이자를 다시 연간 8% 단리로 1년간 투자할 때, 2년 후의 원리금을 구하라.

5. 연간 4% 단리로 1,450달러를 예치하여 1,500달러를 만들기 위해 얼마동안 예치해야 하는지 구하라. 단, 은행에서 1년은 360일로 계산한다.

6. 1,500만 원을 연이율 7% 단리로 은행에 예치하여 90일 후에 인출할 때, 이자를 구하라. 단, 은행에서 1년은 360일로 계산한다.

7. 투자원금 1,000만 원을 연이율 4.5% 복리로 5년간 투자할 때, 5년 후의 원리금과 총 이자 수익을 구하라.

8. 10,000만 원을 연간 6% 단리로 저축할 때, 다음을 구하라.

(a) 2년간 저축할 때의 이자
(b) 6개월간 저축할 때의 이자
(c) 2차 연도의 실이율

9. 연간 4% 단리로 1,450만 원을 은행에 예치하여 1,479만 원이 되었을 때, 예치기간을 구하라.

10. 연간 7% 단리로 1,500만 원을 은행으로부터 90일간 빌렸을 때, 90일 후에 지불해야 할 이자를 구하라. 단, 1년은 360일로 계산한다.

11. 5,000만 원을 6년간 투자하여 1,500만 원의 수익을 남겼을 때, 다음을 구하라.

(a) 단리일 때의 이자율
(b) 복리일 때의 이자율

12. 연간 6.5% 복리로 여유 자금을 은행에 예치하여 예치금의 두 배가 되었을 때, 예치기간을 구하라.

13. 실이율 5.5%로 은행에 자금을 예치할 때의 이자율 i를 구하고, 5,000만 원을 7년간 예치할 때의 원리금을 구하라.

14. 어떤 단리이율 i로 은행에 5,000만 원을 예치하여 n년 후에 5,200만 원이 되었다. 이와 동일한 단리이율로 두 배의 기간 동안 1,000만을 예치할 때 원리금을 구하라.

15. 단리이율 $i = 0.04$에 대한 n차 연도의 실이율이 2.5%가 되었다고 할 때, n을 구하라.

16. 만기가 90일인 국채를 채권에 명시된 당일 96달러에 구입하여 45일 후에 또 다른 투자자에게 97.5달러에 팔았다. 두 번째 투자자는 만기일까지 채권을 소지한 후, 만기일에 액면가 100달러를 받았다. 이때 상환금에 대한 연간 실이율이 더 높은 투자자를 선택하라.

17. 두 펀드 A와 B를 각각 연간 실이율 3.5%와 3%인 복리로 투자하면, 20년 말에 두 펀드의 원리금의 합계가 10,000만 원, 30년 말에 펀드 A의 원리금이 펀드 B의 원리금의 두 배가 된다고 한다.

(a) 두 펀드의 최초 투자금을 구하라.
(b) 10차 연도 말에 두 펀드의 원리금의 합계를 구하라.

Section 1.2

현가와 할인가

이 절에서는 미래 어느 시점에서 일정한 원리금(종가)를 만들기 위하여 투자해야 할 자금(현가)의 의미와 연초에 투자(또는 대부)와 동시에 발생하는 이자의 비율을 나타내는 실할인율의 의미를 살펴본다. 그리고 현가를 구하는 방법, 할인가를 구하는 방법에 대해 학습한다.

01 현가와 종가

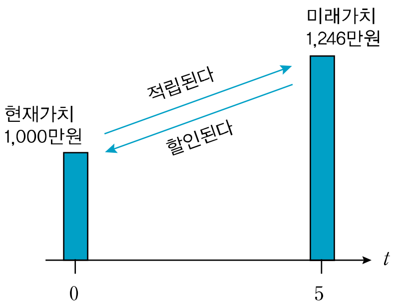
- **현가** : 미래의 어느 시점인 t년도 말의 자금 A에 대한 $t=0$인 시점인 현재 가치 P
- **종가** : 연초에 투자한 원금 P에 대한 t년도 말의 원리금 $A(t)$
- **단리이자** : $P=\dfrac{1}{1+it}A(t)$, $A(t)=P(1+it)$
- **복리이자** : $P=\dfrac{1}{(1+i)^t}A(t)$, $A(t)=P(1+i)^t$
- **할인인수** : 연도 말에 적립금 1이 되기 위한 현가 $v=\dfrac{1}{1+i}$
- **할인함수** : t년도 말의 원리금이 1이 되기 위한 현가 $DF=\begin{cases}\dfrac{1}{1+it} & \text{, 단리인 경우}\\[2ex] \dfrac{1}{(1+i)^t}=v^t & \text{, 복리인 경우}\end{cases}$

02 실할인율

- **실할인율** : 연도 초에 일정한 금액이 투자(또는 대부)됨과 동시에 이자를 투자(또는 대부) 시점에서 받는다고 할 때 지급된 이자의 비율
- **할인현가요소** : $PVF=\begin{cases}1-dt, & 0<t<1/d, \quad \text{단리할인}\\ (1-d)^t, & t>0, \quad \text{복리할인}\end{cases}$
- **할인종가요소** : $AVF=\begin{cases}(1-dt)^{-1}, & 0<t<1/d, \quad \text{단리할인}\\ (1-d)^{-t}, & t>0, \quad \text{복리할인}\end{cases}$
- **실이율** : $i=\dfrac{A(1)-A(0)}{A(0)}$
- **실할인율** : $d=\dfrac{A(1)-A(0)}{A(1)}$

01 현가와 종가

[예제 1-6]에서 1,000만 원을 연이율 7%로 5년간 투자하면 1,246만 원이 되는 것을 살펴보았다. 이를 다르게 표현하면, 연이율 7%로 5년간 투자하여 1,246만 원을 만들기 위해 현재 투자해야 할 금액은 1,000만 원이다. 이는 1,000만 원에 대한 현재의 가치가 연이율 7%로 5년간 투자하여 발생한 1,246만 원의 가치가 같다고 할 수 있다. 이때 [그림 1-2]와 같이 시간이 앞으로 진행하는 방향의 가치를 **적립된다** accumulated 고 하고, 과거로 진행하는 방향의 가치를 **할인된다** discounted 고 한다. 그러면 현 시점에서 1,000만 원에 대한 5년 후인 미래의 가치는 1,246만 원이고, 1,246만 원에 대한 5년 전의 가치는 1,000만 원이다. 따라서 1,000만 원에 대한 현재가치가 5년 후의 가치보다 크다.

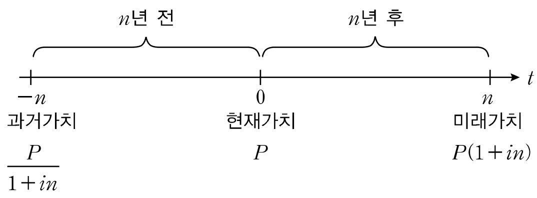


[그림 1-2] 시간에 따른 자금의 가치

이와 같이 연초에 투자한 원금에 대한 t년도 말에 적립된 원리금을 **종가** accumulated value 또는 **미래가치** future value 라 한다. 이와 상반되는 개념으로 미래의 어느 시점인 t년도 말에 일정한 금액에 대한 현재의 가치를 **현가** present value 라 한다. 예를 들어, 원금 P를 연이율 i인 단리로 투자할 경우 t년 후의 원리금 합계(종가)는 $A(t) = P(1+it)$이고, 이때 최초에 투자한 원금

$$P = \frac{1}{1+it} A(t)$$

는 $t = 0$인 시점에서 원리금 $A(t)$에 대한 현가이다. 그러므로 이율이 단리 i인 경우 $t = 0$인 시점에서 원금 P에 대한 n년 후의 미래가치(종가)는 $P(1+in)$이고, 현 시점에서 n년 전의 가치는 $P/(1+in)$이다. 이는 [그림 1-3]과 같이 도식화 할 수 있다.



[그림 1-3] 시간에 따른 과거가치, 현재가치, 미래가치 비교

또한 원금 P를 연이율 i인 복리로 투자할 경우 t년 후의 종가는 $A(t)=P(1+i)^t$이므로 원리금 $A(t)$에 대한 $t=0$인 시점에서 현가는 다음과 같다.

$$P=\frac{1}{(1+i)^t}A(t)$$

특히 연초에 투자한 원금 P에 대한 연말의 가치는 $A(1)=P(1+i)$가 된다는 의미에서 $1+i$를 **적립인수** accumulated factor라 한다. 반면에, 연말에 적립된 원리금 1이 되기 위하여 현재 투자해야 할 금액

$$v=\frac{1}{1+i}$$

을 **할인인수** discount factor 또는 **현가인수** present value factor라 한다. 한편, t년 말에 적립된 원리금 1이 되기 위해 현재 투자해야 할 금액을 **할인함수** discount function라 하며, DF_t로 나타낸다. 그러면 연이율 i인 단리로 투자하여 t년 말에 1을 만들기 위해 $t=0$인 시점에 투자해야 할 원금은 $\frac{1}{1+it}$이고, 연이율 i인 복리로 투자하여 t년 말에 1을 만들기 위해 $t=0$인 시점에 투자해야 할 원금은 $\frac{1}{(1+i)^t}$이다. 그러므로 t년 말에 원리금 1을 얻기 위해 현재 투자해야 할 금액, 즉 할인함수는 다음과 같다.

$$DF_t=a^{-1}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+it} & ,\ \text{단리}\\[2ex] \dfrac{1}{(1+i)^t}=v^t & ,\ \text{복리}\end{cases}$$

이때 특별한 언급이 없는 한 할인함수는 복리이자에 대하여 다룬다.

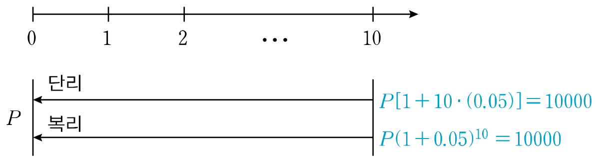
예제 1-10

10년 후에 10,000만 원을 마련하기 위해 다음과 같이 투자한다고 할 때, 현재 투자해야 할 금액을 구하라.

(a) 단리이율 5%　　　　　　　(b) 복리이율 5%

풀이

10년 후에 10,000만 원에 대한 현가는 다음 그림과 같다.



(a) 단리이율 $i=0.05$이므로 $P=\dfrac{10000}{1+10(0.05)}=\dfrac{10000}{1.5}=6666.7$(만 원)이다.

(b) 복리이율 $i=0.05$이므로 $P=\dfrac{10000}{(1+0.05)^{10}}=6139.1$(만 원)이다.

예제 1-11

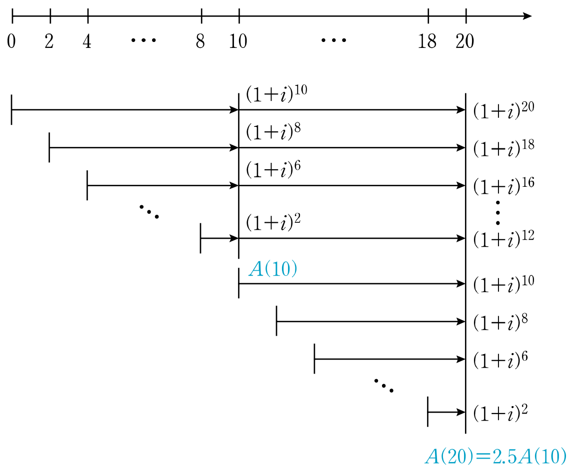
20년 동안 2년 주기로 매 주기연도 초에 은행에 1,000만 원을 예치하면, 은행은 연 실이율 i의 이자를 부여한다. 20년 말 종가는 10년 말 종가의 2.5배가 된다고 할 때, 실이율 i와 20년 말의 종가를 구하라.

풀이

2년 주기로 매 주기연도 초에 1,000(만 원)을 실이율 i로 예치하므로, 다음 그림에서 보듯이 20년 말의 종가와 10년 말의 종가는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
A(10) &= 1000(1+i)^2+1000(1+i)^4+\cdots+1000(1+i)^{10} \\
&= 1000(1+i)^2\left[1+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^8\right] \\
&= 1000(1+i)^2\cdot\frac{1-[(1+i)^2]^5}{1-(1+i)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(20) &= 1000(1+i)^2+1000(1+i)^4+\cdots+1000(1+i)^{20} \\
&= 1000(1+i)^2\left[1+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{18}\right] \\
&= 1000(1+i)^2\cdot\frac{1-[(1+i)^2]^{10}}{1-(1+i)^2}
\end{aligned}$$



한편, 조건에 의하여 $A(20)=(2.5)A(10)$이므로 다음이 성립한다.

$$1000(1+i)^2\cdot\frac{1-(1+i)^{20}}{1-(1+i)^2}=(2.5)\cdot 1000(1+i)^2\cdot\frac{1-(1+i)^{10}}{1-(1+i)^2}$$
$$1-(1+i)^{20}=(2.5)[1-(1+i)^{10}]$$

이제 $X=(1+i)^{10}$이라 하면 다음을 얻는다.

$$1-X^2=(2.5)(1-X)$$
$$2X^2-5X+3=0$$
$$(X-1)(2X-3)=0$$
$$X=1 \text{ 또는 } X=\frac{3}{2}$$

즉 $(1+i)^{10}=1$ 또는 $(1+i)^{10}=\frac{3}{2}$이다. 이때 $(1+i)^{10}=1$이면, $i=0(\%)$이므로 $A(20)=10000$, $A(10)=5000$이다. 따라서 $A(20)=(2.5)A(10)$이 되지 못하므로 조건에 맞지 않는다. 따라서 $(1+i)^{10}=\frac{3}{2}$, 즉 $(1+i)^2=\sqrt[5]{1.5}$, $i=0.041$이고, 20년 말의 종가는 다음과 같다.

$$A(20)=1000(1+i)^2\cdot\frac{1-[(1+i)^2]^{10}}{1-(1+i)^2}$$
$$=1000\cdot\sqrt[5]{1.5}\cdot\frac{1-(1.5)^2}{1-\sqrt[5]{1.5}}$$
$$=1000(16.0478)=16047.8$$

02 실할인율

지금까지는 연초에 투자한 금액에 대한 연말의 이자 비율을 나타내는 실이율과 원리금에 대해 살펴보았다. 여기에서는 실이율과 반대되는 개념을 살펴보자.

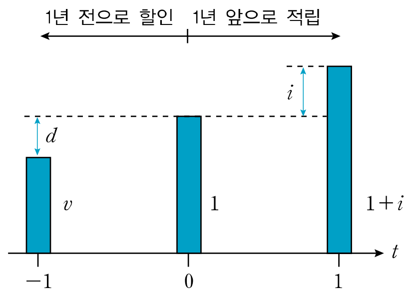
예를 들어, 은행으로부터 연초에 10% 실이율로 100만 원을 1년 동안 빌리면 연말에 대부금의 10%인 이자 10만 원을 추가하여 원리금 합계 110만 원을 은행에 갚아야 한다. 반면에, 대부금의 10%인 이자 10만 원을 선이자로 지급한다면 실제로는 90만 원을 빌리게 되나, 1년 후에 빌린 원금 100만 원을 상환해야 한다. 이 경우에 채무자 입장에서는 이자는 동일하게 10만 원이지만 실제로 사용할 수 있는 대부금은 90만 원 밖에 안 된다. 즉 채무자 입장에서 1년 동안 대부금 100만 원을 사용할 수 있느냐 아니면 90만 원 밖에 사용을 못하느냐는 차이가 생긴다. 이때 은행은 선지급된 이자 10만 원에 대하여 1년 동안 발생한 이자수입을 얻을 수 있다.

이와 같이 연도 초에 일정한 금액이 투자(또는 대부)됨과 동시에 이자를 받는다고 할 때, 지급된 이자의 비율을 **실할인율**effective rate of discount이라 하고, d로 나타낸다. 즉 실이율은 연도 초의 원금에 대한 원리금과 원금의 차이에 대한 비율이고, 실할인율은 연도 말의 원리금에 대한 원리금과 원금의 차이에 대한 비율을 나타낸다. 그러므로 실이율 i와 실할인율 d는 각각 다음과 같다.

$$i = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$$

$$d = \frac{A(1) - A(0)}{A(1)}$$

다시 말해, 실할인율 d는 연도 말의 원리금 $A(1)$에 대한 투자기간 동안 발생한 이자금액 $A(1) - A(0)$의 비율을 의미하며, 이 경우에 투자기간 동안 발생한 이자금액을 **할인금액**amount of discount이라 한다. [그림 1-4]는 현가가 1일 때 실이율 i에 대한 1년 후의 가치 $1+i$와 실할인율 d에 의한 1년 전의 할인금액 사이의 관계를 보여준다.



[그림 1-4] 실이율 i와 실할인율 d의 관계

일반적으로 시점 t에서 $t+s$까지 발생한 할인금액은 $A(t+s)-A(t)$이고, 실할인율은 다음과 같다.

$$d = \frac{A(t+s)-A(t)}{A(t+s)}$$

따라서 t차 연도 1년 동안 발생한 실할인율은 다음과 같다.

$$d_t = \frac{A(t)-A(t-1)}{A(t)} = \frac{I(t)}{A(t)}, \quad t \geq 1$$

여기서 $I(t)$는 t차 연도 1년 동안 발생한 이자, 즉 할인금액이다. 특히 실이율 i가 일정하다면, 즉 복리로 투자하는 경우에

$$d = \frac{A(1)-A(0)}{A(1)} = \frac{i}{1+i}$$

이므로 실할인율 d도 역시 일정하며, 이 경우의 실할인율을 **복할인**compound discount이라 한다. 그러면 실이율 i와 실할인율 d 그리고 현가 $P=A(0)$과 종가 $A(1)$ 사이에 다음의 관계가 성립한다.

$$A(1)-A(0) = iP = dA(1)$$

즉 다음 등식이 성립한다.

$$(\text{실이율}) \times (\text{현가}) = (\text{실할인율}) \times (\text{미래가치})$$

그러면 실이율과 실할인율 사이의 관계를 정리하면 [표 1-1]과 같다. 이때 특별한 언급이 없는 한 실이율과 실할인율은 각각 복리와 복할인을 사용한다.

[표 1-1] 실이율과 실할인율의 관계

번호	관계식	설명
(1)	$d=\dfrac{i}{1+i}$	실할인율은 연말의 원리금 합계에 대한 이자의 비율이다.
(2)	$i=\dfrac{d}{1-d}$	[표 1-1]의 (1)을 i에 관해 풀면 쉽게 얻을 수 있으며, 실이율은 실수령액에 대한 이자의 비율을 나타낸다.
(3)	$(1-d)(1+i)=1$	채무자가 실할인율 d로 연초에 1을 빌리는 경우에 실수령액은 $1-d$이고, 이 원금에 대한 연말의 원리금 합계가 1이므로 명백히 성립한다.
(4)	$d=iv$	할인인수 $v=\dfrac{1}{1+i}$을 이용하면 [표 1-1]의 (1)로부터 명백히 성립하며, 이는 연말 이자에 대한 현가가 연초에 지급된 할인금액임을 보인다.
(5)	$d=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{(1+i)-1}{1+i}$ $=1-\dfrac{1}{1+i}=1-v$	[표 1-1]의 (1)에 의해 명백히 성립하며, 이는 연말에 지불할 1의 현가가 빌린 금액 $1-d$와 동일함을 의미한다.
(6)	$d=iv=i(1-d)$ $=i-id\geq 0$	[표 1-1]의 (4)에 의해 명백히 성립한다. 즉 연초에 1을 빌리고 연도 말에 $1+i$를 갚는 경우와 연초에 $1-d$를 빌리고 연도 말에 1을 갚는 경우가 동일함을 의미한다.
(7)	$i-d=id\geq 0$	[표 1-1]의 (6)에 의해 명백히 성립하며, 연말에 지급할 이자와 연초에 지급할 이자의 차이$(i-d)$는 이율 i로 1년간 d를 빌렸을 때 지불하는 이자(id)와 동일함을 나타낸다.

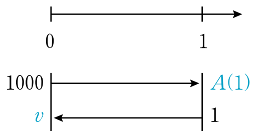
예제 1-12

연 7%의 이율로 1,000만 원을 1년간 투자할 때, 다음을 구하라.

(a) 1년 후의 원리금
(b) 할인인수
(c) 실할인율

풀이

(a) 실이율 $i=0.07$이므로 오른쪽 그림과 같이 1년 후의 원리금은 $A(1)=1000(1+0.07)=1070$(만 원)이다.



(b) $v=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{1+0.07}\approx 0.9346$

(c) $d=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{0.07}{1.07}\approx 0.065$이므로 실할인율은 약 6.5%이다.

예제 1-13

은행으로부터 1년간 사용하기로 약정하고 실이율 7.5%로 1,000만 원을 빌렸다. 연초에 융자금을 차용함과 동시에 이자를 지불한다고 할 때, 실할인율과 지불해야할 할인금액을 구하라.

풀이

실이율이 $i=0.075$이므로 실할인율은 $d=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{0.075}{1.075}\approx 0.06977$이고, 연말에 지불해야 할 이자는 $(0.075)\cdot 1000=75$(만 원)이다. 그러나 1년 일찍 이자를 지불하므로 연초에 지불해야 할 할인금액은 [표 1-1]의 (4)에 의하여 다음과 같다.

$$v\cdot 75=\frac{75}{1+0.075}=69.77(\text{만 원})$$

[예제 1-13]에서 1,000만 원에 대한 선이자로 69.77만 원을 지불하고 나머지 930.23만 원을 빌린 후, 1년 뒤에 1,000만 원을 갚게 된다. 이때 $1-d=1-0.06977=0.93023$이므로 다음이 성립하는 것을 알 수 있다.

$$(1-d)A(1)=(0.93023)\cdot 1000=930.23(\text{만 원})$$

한편, [표 1-1]의 (2)로부터 $1-d=\dfrac{1}{1+i}$이므로 복할인에 따른 t년도 말의 원리금 합계 $A(t)$를 얻기 위한 현가는 다음과 같다.

$$P=\frac{A(t)}{(1+i)^t}=A(t)(1-d)^t=A(t)v^t\,,\quad t\geq 0$$

이는 $t=1$인 [예제 1-13]과 일치한다. 이때 $(1-d)^t=v^t$을 **할인현가요소**discount present value factor라 하고, PVF_t로 나타낸다. 또한 위 관계식으로부터 다음을 얻는다.

$$A(t)=\frac{P}{(1-d)^t}=P(1-d)^{-t}\,,\quad t\geq 0$$

이때 $(1-d)^{-t}$을 **할인종가요소**discount accumulated value factor 또는 **미래가치요소**future value factor라 하고, AVF_t로 나타낸다. 그러면 할인종가요소는 원리금 비율함수와 동일한 것을 알 수 있다. 이와 같이 보편적으로 실할인은 복할인을 사용하지만 단리이자에 따른 **단리할인**simple discount을 정의할 수 있다.

$A(t)$가 t년 후의 종가이고 단리할인 d를 적용한다면, 현가는 $P = (1-dt)A(t)$ 이므로 할인현가요소는 $PVF_t = 1 - dt$, $0 < t < \frac{1}{d}$ 이고, 할인종가요소는 $AVF_t = (1-dt)^{-1}$, $0 < t < \frac{1}{d}$ 이다. 또한 실이율 i에 대하여 $1 - dt = \frac{1}{1+it}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$i = \frac{d}{1-dt}, \quad d = \frac{i}{1+it}$$

따라서 복할인과 단리할인에 따른 할인현가요소와 할인종가요소는 각각 다음과 같이 역수 관계를 갖는다.

$$PVF_t = a^{-1}(t) = \begin{cases} (1-d)^t, \ t \geq 0 & , \text{ 복할인인 경우} \\ 1 - dt \ , \ 0 < t < \frac{1}{d} & , \text{ 단리할인인 경우} \end{cases}$$

$$AVF_t = a(t) = \begin{cases} (1-d)^{-t} \ , \ t \geq 0 & , \text{ 복할인인 경우} \\ (1-dt)^{-1}, \ 0 < t < \frac{1}{d} & , \text{ 단리할인인 경우} \end{cases}$$

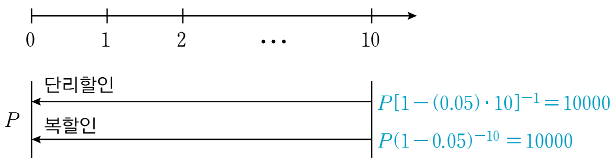
예제 1-14

10년 후에 10,000만 원을 마련하기 위하여 다음과 같이 투자한다고 할 때, 현재 투자해야 할 금액을 구하라.

(a) 단리할인율 5%를 적용할 때 (b) 복할인율 5%를 적용할 때

풀이

10년 후에 10,000만 원에 대한 현가를 나타내면 다음 그림과 같다.



(a) 단리할인율 $d = 0.05$이므로 $P = 10000\,[1-(0.05)\cdot 10] = 5000$(만 원)이다.

(b) 복할인율 $d = 0.05$이므로 $P = 10000\,(1-0.05)^{10} = 5987.4$(만 원)이다.

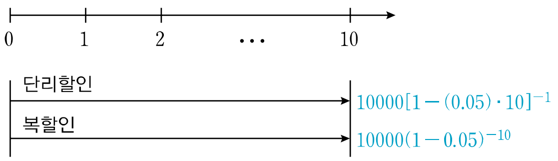
예제 1-15

현재 10,000만 원을 10년 동안 다음과 같이 투자한다고 할 때, 10차 연도 말의 종가를 구하라.

(a) 단리할인율 5%를 적용할 때 (b) 복할인율 5%를 적용할 때

풀이

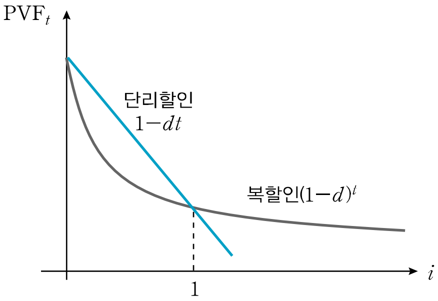
10년 후의 원리금을 나타내면 다음 그림과 같다.



(a) 단리할인율 $d=0.05$이므로 $A(10)=10000\,[1-(0.05)\cdot 10]^{-1}=20000$(만 원)이다.

(b) 복할인율 $d=0.05$이므로 $A(10)=10000\,(1-0.05)^{-10}=16701.8$(만 원)이다.

단리할인율은 단리이율과 성질이 반대이며, [그림 1-5]와 같이 다음 특성을 갖는다.



[그림 1-5] **할인현가요소**

- 투자기간이 1년 미만인 경우$(0<t<1)$, $(1-d)^t<1-dt$이므로 단리할인현가가 복리할인현가보다 크다.
- 투자기간이 1년인 경우$(t=1)$, $(1-d)^1=1-d\cdot 1$이므로 단리할인현가와 복리할인현가가 동일하다.
- 투자기간이 1년보다 긴 경우$(t>1)$, $(1-d)^t>1-dt$이므로 복리할인현가가 단리할인현가보다 크다.

그러므로 실이율과 실할인율은 다음과 같이 비교된다.

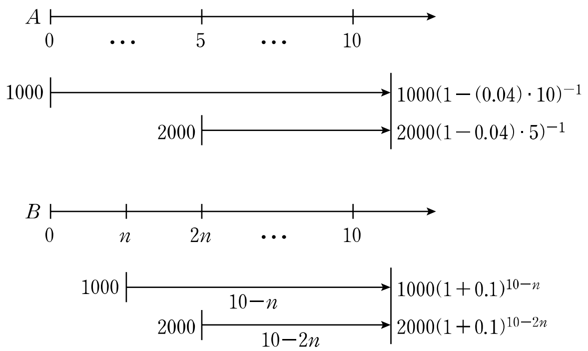
- 투자기간이 증가함에 따라 일정한 단리이율은 실이율을 감소시키지만, 일정한 단리할인은 실할인율을 증가시킨다.
- 단리할인과 복할인은 투자기간이 1년이면 동일하지만, 1년 미만이면 복할인보다 단리할인의 현가가 크고 1년 이상이면 복할인에 의한 현가가 단리할인에 의한 현가보다 커진다.

예제 1-16

A는 오늘 1,000만 원을 예금하고 5년 후에 다시 2,000만 원을 예금한다. 이때 연간 4%의 단리할인으로 지급한다. B는 동일한 자금을 다른 은행에 실이율 10%로 n차 연도와 $2n$차 연도에 예금한다. 10차 연도 말에 A와 B의 적립금이 일치할 때, n을 구하라.

풀이

10차 연도 말에 A와 B의 원리금을 나타내면 다음 그림과 같다.



그러면 다음을 얻는다.

$$A\text{의 원리금 : } 1000[1-(0.04)10]^{-1}+2000[1-(0.04)5]^{-1}$$
$$B\text{의 원리금 : } 1000(1+0.1)^{10-n}+2000(1+0.1)^{10-2n}$$

두 사람의 10년 말 예탁금에 대한 원리금이 일치하므로

$$\frac{1000}{0.6}+\frac{2000}{0.8}=1000(1.1)^{10-n}+2000(1.1)^{10-2n}=1000(1.1)^{10}v^n+2000(1.1)^{10}v^{2n}$$

이 성립한다. 그러므로 위의 관계식으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1000}{0.6}+\frac{2000}{0.8}=1000(1.1)^{10}v^n+2000(1.1)^{10}v^{2n}$$
$$5187.48(v^n)^2+2593.74(v^n)=4166.67$$

v^n에 대한 이차방정식을 풀면

$$5187.48(v^n)^2+2593.74(v^n)-4166.67=0$$

$$v^n=-2593.74+\frac{\sqrt{(2593.74)^2-4(5187.48)(-4166.67)}}{2\,(5187.48)}=0.6804$$

$$v^n=\frac{1}{(1.1)^n}=0.6804;\quad n\ln(1.1)=-\ln(0.6804);\quad n=-\frac{\ln(0.6804)}{\ln(1.1)}=4.04$$

이므로, 구하고자 하는 n은 $n=4.04$(년)이다.

Section 1.2 연습문제

1. 연이율 5%로 투자하여 10년 후에 2,000만 원을 만들려고 한다. 최초에 투자해야 할 금액을 구하라.

2. 연이율 7%에서 1년 후 원리금이 7,000만 원이 되었을 때, 현가를 구하라.

3. 연이율 6%에서 10년 후의 1,000만 원에 대한 현가를 구하라.

4. 연이율 8%로 1년간 5,000만 원을 융자받는 동시에 이자를 지불하였다. 지불한 이자를 구하라.

5. 연 할인율 6%를 가정할 때, 한 달 후에 5,000만 원에 대한 현가를 구하라. 이 현가에 대응하는 복할인율을 구하고, 복리와 단리를 구하라.

6. 3차 연도 말에 3,000만 원을 적립하기 위하여 다음과 같이 투자하고자 한다. 투자할 금액을 구하라.

   (a) 연 복할인율 9%　　(b) 연 단리할인율 9%

7. 최초 투자금이 $P=275$(만 원)이고 연할인율은 25%일 때, 1년 후의 종가를 구하라.

8. 실이율 9%로 일정 금액을 투자하여 3차 연도 말에 1,000만 원을 만들고자 한다. 투자금액을 구하라.

9. 10월 31일이 만기인 상환가액 1,000만 원인 어음을 단리할인 5%로 8월 1일 구입하였다. 구입가격과 할인금액과 단리이율 i를 구하라.

10. 기한이 90일이고 액면가가 1억 원인 단기채권을 구입하여 만기일에 6%의 이익이 발생했다. 다음을 구하라.

    (a) 구입가격　　(b) 할인금액　　(c) 할인율

11. 처음 5년간 실이율 i로 은행에 적립하고, 그 이후부터 실이율 $2i$로 적립한다. $t=0$인 시점에 1,000만 원을 저축하여 10차 연도 말에 3,090만 원이 되었고, 20차 연도 말에 13,620만 원이 되었다. 8차 연도 말의 종가를 구하라.

Chapter 01 연습문제

1.1 최초 투자금 $A(0)$에 대하여 n년도에 발생한 이자를 $I(n)$이라 한다.

(a) $A(n)-A(0)=\sum_{k=1}^{n} I(k)$인 것을 보이고, 이것의 의미를 설명하라.

(b) $I(k)=k$일 때, m차 연도와 n차 연도 사이에 발생한 이자 총액을 구하라. 단, $m<n$이다.

(c) $I(k)=3^k$일 때, m차 연도와 n차 연도 사이에 발생한 이자 총액을 구하라. 단, $m<n$이다.

1.2 1,000만 원을 단리이율 i로 4년 3개월 동안 투자하여 원리금이 1,250만 원이 되었다. 이때 단리이율 i를 구하라.

1.3 연간 단리이율 6%로 5,000만 원을 투자하여 100만 원의 이자가 발생했다. 이때 투자기간을 구하라.

1.4 투자금에 대한 이자가 1년을 360일로 계산하여 7.5%라고 한다. 1년을 365일로 계산할 때 동일한 이자발생에 대한 이율을 구하라.

1.5 연간 10%의 이율을 매월 복리로 1,000만 원을 2년간 투자한다. 1차 연도에 벌어들인 이자와 2차 연도에 벌어들인 이자금액을 구하라.

1.6 1,000만 원을 단리 i로 t년 동안 투자하여 원리금이 1,250만 원이 되었다. 이자율을 반으로 줄이고 기간을 네 배로 늘려서 500만 원을 투자할 때, 원리금을 구하라.

1.7 단리이율 8%에서 d_5를 구하고, 단리할인 8%에서 d_5를 구하라.

1.8 $A(t)=t^2+2t+3$일 때, 실이율 i_5와 실할인율 d_5를 구하라.

1.9 $A(t)=1000(1+0.15)^t$일 때, 실이율 i_5와 실할인율 d_5를 구하라.

1.10 $A(n)=(1+i_n)A(n-1)$ 임을 보이고, $A(5)=1000$, $i_n=0.015n$ 일 때 $A(8)$ 을 구하라.

1.11 투자일로부터 n 번째 기간 동안 발생한 할인인수 $(1+i_n)^{-1}$ 을 원리금 합계를 이용하여 나타내라.

1.12 1년을 365일로 계산하여 만기일이 90일로 적힌 채권의 이율이 연간 10%일 때, 연간 실이율을 구하라.

1.13 2년간 실이율 7%로 A가 8년 전에 5,000만 원을 빌린 후, 1년 전에 상환했다고 한다. A가 지불한 금액을 구하라.

1.14 어느 회사는 6개월 후에 10,000만 원을 지급한다고 쓰여진 회사채를 9,500만 원에 팔았다. 이때 실이율을 구하라.

1.15 투자금 1,000만 원이 10차 연도 말에 2,500만 원으로 증액되었다고 할 때, 20년, 30년 그리고 40년 말에 발생할 5,000만 원의 현가의 합을 구하라.

1.16 1년간 투자금 A에 대한 이자 총액이 250만 원이고 동치인 할인액이 200만 원일 때, 투자금 A를 구하라.

1.17 선지불이 가능하고 분기별로 전환가능한 연간 8%로 6차 연도 말에 지불되는 1,000만 원에 대한 현가를 구하라.

1.18 월별 실이율이 1.1%일 때, 다음을 구하라.

(a) 3개월, 6개월, 1년, 2년별 동치인 실이율
(b) 1개월, 3개월, 6개월, 1년, 2년으로 전환가능한 동치인 명목이율

1.19 다음 명목이율 또는 명목할인율을 구하라.

(a) 분기별 지불가능한 8%의 명목할인율과 동치인 반기별 전환가능한 명목이율
(b) 분기별 지불가능한 8%의 명목이율과 동치인 반기별 전환가능한 명목할인율

1.20 다음과 동치인 분기별로 전환가능한 명목이율을 구하라.

(a) 월별 실이율 0.5%
(b) 매 2년별로 전환가능한 명목이율 6%

1.21 A는 반기별로 전환가능한 명목이율 복리 i로 100만 원을 투자하였고, 같은 날 B는 연이율 단리 i로 200만 원을 투자하였다. 그 결과 8차 연도 마지막 6개월 동안 두 사람의 이자 총액이 같아졌다고 할 때, i를 구하라.

1.22 어떤 사람이 다음과 같은 세 종류의 대부금을 받았다. 매 6개월마다 전환가능한 연간 5%의 이자를 부여한다 할 때, 다음을 구하라.

대부금 1 : 2년 안에 300만 원을 완전히 상환한다.
대부금 2 : 4년 안에 450만 원을 완전히 상환한다.
대부금 3 : 5년 안에 500만 원을 완전히 상환한다.

(a) 각 대부금을 만기일로부터 6개월 이전에 대부금을 상환할 때 상환된 총액
(b) 모든 대부금에 대한 상환금액이 950만 원이 되는 시점(개월 수)

1.23 만기가 90일인 단기채권을 100달러당 91달러의 명목이율로 첫 번째 투자자에게 팔았다. 30일 후에 첫 번째 투자자는 두 번째 투자자에게 100달러당 93.9달러의 명목이율로 팔았다. 그리고 두 번째 투자자는 액면가로 상환되는 만기일까지 이 채권을 소유하였다. 이때 상환금에 대한 연간 실이율이 더 높은 투자자를 선택하라.

1.24 보험회사는 지불해야 할 보험금의 현가로서 10년 후에 10,000만 원을 지불하는 보험계약에 대한 일시불 보험료를 계산한다. 이때 이율은 이 기금으로부터 수익을 남길 기대 이율로 산정하고, 10년간 실이율은 7%, 8% 또는 10%일 확률이 각각 0.3, 0.5, 0.2이다.

(a) 일시불 보험료 P를 구하라.
(b) 계약기간 만료일에 기대되는 이윤을 구하라.

1.25 다음이 성립함을 보여라.

(a) n년도까지 동치인 단리와 단리할인을 각각 i와 d라 할 때, $i-d=idn$이다.

(b) 명목이율 $i^{(m)}$과 명목할인율 $d^{(m)}$ 사이에 $i^{(m)}=d^{(m)}(1+i)^{1/m}$이 성립한다.

1.26 다음이 성립함을 보여라.

(a) $\frac{d}{dt}\delta_t=\frac{A''(t)}{A(t)}-\delta_t^2$

(b) $\int_0^n \delta_t\,dt=-\ln v^n$

(c) $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}i^m\left(\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{i^{(m)}}\right)=\delta$

1.27 연간 실이율 i에 대하여 다음 두 종류의 지불금이 동일한 현가 K를 가질 때, 현가 K를 구하라.

- 지불금 121을 즉시 지불하고 나머지 121을 1년 말에 지불한다.
- 2년 말에 144를 지불하고 나머지 144를 3년 말에 지불한다.

1.28 매 8년 말 주기로 종신토록 지급되는 연금 2,000만 원에 대한 현가가 5,000만 원이라고 할 때, 실이율을 구하라.

1.29 5차 연도 말에 지불된 1의 현가와 10차 연도 말에 지불된 1의 현가의 합이 1일 때, $(1+i)^{10}$과 i를 구하라.

1.30 원금 1을 복리로 a년 동안 투자하여 원리금이 1.5가 되었다. 이 원리금을 다시 b년 동안 투자하여 2.5 그리고 다시 c년 동안 투자하여 4가 되었다. 만일 원금 5를 n년 동안 투자하여 10이 되었다면, 투자기간 n을 a, b, c 그리고 i를 이용하여 나타내라.

1.31 20년 동안 매년 초에 은행에 1,000만 원을 예치하면, 은행은 연간 실이율 i의 이자를 부여한다. 20차 연도 말 종가는 10년 말 종가의 5배가 된다고 할 때, 실이율 i와 20년 말의 종가를 구하라.

1.32 A는 실이율 i로 40년 동안 매 4년 주기로 주기연도 초에 100만 원을 예치한다. 40차 연도 말의 적립금 S는 20년도 말의 적립금의 5배라 할 때, S를 구하라.

1.33 매년 말에 종신토록 연금이 처음 n년 동안 k차 연도$(k=1, 2, \cdots, n)$의 지급금은 k^3이고, n차 연도 이후부터 종신토록 n^2이 지급된다. 그리고 처음 n년 동안 실이율은 0%이고 그 이후로는 25%일 때 $t=0$인 시각에서 현가는 $20n^2$이다. 이때 n을 구하라.

1.34 어느 상점은 손님이 신용카드로 지불하거나 r%를 할인하여 현금으로 받는다. 신용카드 구매에 대하여 구입가격의 97%를 반달 후에 받는다. 이때 연할인율 22%에서 두 지불 방법에 지불금액은 동일하다고 할 때, 할인율 r을 구하라.

1.35 기금 X는 연간 실이율 6.5%로 10년간 지불되고, 동시에 또 다른 기금 $X/2$는 연간 실할인율 d로 10년간 지불한다. 10년간 두 기금에 의하여 벌어들인 이자 총액이 동일하다면, 실할인율 d를 구하라.

1.36 기금이 연속인 복리 i로 시각 t에서 예탁금이 $(kt)^2+8k^2t+k^2$, $k>0$, $0 \le t \le 10$이 되었고, 은행은 이력 $\delta_t = \dfrac{2t+8}{t^2+8t+1}$, $t \ge 0$에서 이자를 보증하였다. 10년 후에 예탁금이 88,690만 원이 되었을 때, 상수 k를 구하라.

1.37 기금 A와 B는 각각 이력 $\delta_t^A = \dfrac{10t}{1+5t^2}$와 $\delta_t^B = \dfrac{8t}{1+2t^2}$에서 적립된다고 한다. 그리고 $A(t)$와 $B(t)$를 각각 시각 t에서 두 기금 A와 B의 원리금 합계이고, $A(0)=B(0)$이다. 두 기금의 원리금 합계의 차 $H(t)=A(t)-B(t)$가 최대로 되는 시각 t와 $H(t)$의 최댓값을 구하라.

1.38 기금 A는 단리이율 12%로 적립되고, 기금 B는 단리할인 6%로 적립된다. 이때 두 기금에 대한 이력이 같아지는 시점을 구하라.

1.39 A는 반기별로 전환가능한 명목이율 4%로 은행에 100만 원을 예치하였다. 동시에 B는 이력 δ로 100만 원을 예치한 결과 7.25년 후에 두 적립금이 동일하다고 할 때, 이력 δ를 구하라.

1.40 기금 A는 시각 t에서 변동이력 $\delta_t^A = \dfrac{0.06}{1+(0.06)t}$으로 적립되고, 기금 B는 상수이력 $\delta^B = 0.06$에서 적립된다고 한다. 또한 기금 A와 B의 초기 기금은 각각 1,000만 원과 1,500만 원이고 임의의 시각 t에서 기금 C의 적립금은 A와 B의 적립금의 합과 일치한다고 한다. 이때 시각 $t=4$에서 기금 C의 이력 δ_4를 구하라.

1.41 $\delta_t = \dfrac{1}{1+t}$일 때, 원금 1,000만 원에 대한 n년도 말의 종가를 구하라.

1.42 처음 1년은 10%, 두 번째 1년은 8% 그리고 세 번째 1년은 6%의 실할인율과 동치인 3년 주기 실이율을 구하라.