Chapter

01

수와 방정식

Real Number and Equation

학습목표

- 실수의 체계를 이해하고 사칙연산과 대소관계를 구할 수 있다.
- 절댓값과 제곱근을 이해하고, 지수법칙을 이용한 문제를 해결할 수 있다.
- 복소수와 복소수평면을 이해하고, 복소수 문제를 해결할 수 있다.
- 식을 이해하고, 인수분해와 식의 전개를 구할 수 있다.
- 항등식과 방정식을 이해하고, 여러 가지 방정식의 해를 구할 수 있다.

우리는 일상생활에서는 물론 어떠한 학문을 공부하더라도 수Number를 떠나 살 수 없고, 특히 이공계 학문에서는 더 중요하다. 따라서 이 장에서는 복소수를 포함하는 수의 체계를 이해하고, 이를 바탕으로 복잡한 식을 간단히 표현하거나 식을 전개하는 방법을 살펴본다. 또한 항등식과 방정식의 의미를 정확히 이해하고, 방정식을 해결하는 방법을 배운다.

1.1 실수의 체계

이 절에서는 초등학교와 중학교에서 배운 자연수, 정수, 유리수와 실수의 체계에 대하여 살펴본다. 특히 실수의 체계 안에서 지금까지 사용해 온 사칙연산의 의미를 다시 한 번 상기시키고 더불어 실수의 대소관계에 대하여 살펴보고, 절댓값의 의미를 알아본다. 그리고 거듭제곱과 거듭제곱근의 의미를 살펴보고 $\sqrt{2}$ 가 무리수인 것을 확인한다. 또한 실수의 집합을 수직선 위에 표현하는 방법과 여러 가지 구간에 대한 표기 방법도 살펴본다.

1.1.1 정수

우리가 '하나, 둘, 셋'과 같이 셈을 하거나 '첫째, 둘째, 셋째'와 같이 순서를 정하기 위하여 자연스럽게 발생한 수를 **자연수** natural number 라 한다. 이러한 자연수의 개념은 이탈리아 수학자 페아노 Peano, 1858~1932 가 페아노의 공리 Peano's Axiom 라 부르는 공리계를 확립함으로써 체계화하였다. 그리고 이 공리로부터 사칙연산을 비롯하여 자연수의 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙 그리고 분배법칙 등이 성립하는 것을 논리적으로 증명할 수 있게 되었다. 자연수는 '$1, 2, 3, \cdots$'으로 나타내며 연속적으로 무한히 많이 존재하지만, 손가락으로 셀 수 있다. 자연수의 전체 집합은 $\mathbf{N}$ 으로 나타낸다.

한편 5~6세기경 인도에서 숫자 '0'이 발견되면서 수의 표기법을 비롯한 수학 발전의 커다란 사건이 발생하였다. 이러한 0의 발견으로 인도인들은 자연스럽게 0보다 작은 음수의 개념을 받아들였다. 이로써 자연수와 0 그리고 음의 정수로 구성된 수의 체계가 만들어졌고, 이러한 수를 **정수** integer number 라 한다. 그리고 정수의 전체 집합은 $\mathbf{Z}$ 로 나타내며 다음과 같다[1].

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N})$$

그러면 사칙연산에 대하여 정수의 집합은 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 1-1 정수의 성질

임의의 정수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a+b=b+a$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $a+0=0+a=a$ (덧셈에 관한 항등원 '0')

(3) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (덧셈에 관한 역원 '$-a$')

(4) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (덧셈의 결합법칙)

(5) $a \cdot b=b \cdot a$ (곱셈의 교환법칙)

1 Z는 수(number)를 나타내는 독일어 'Zahl'에서 유래되었다.

(6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (곱셈에 관한 항등원 '1')
(7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (곱셈의 결합법칙)
(8) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (분배법칙)
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

정수의 덧셈에 관한 **항등원**identity element[2]은 '0'이고, 임의의 정수 a의 덧셈에 관한 **역원**inverse element[3]은 $-a$다. 곱셈에 관한 항등원은 '1'이지만, 0이 아닌 임의의 정수에 대하여 곱셈에 관한 역원은 존재하지 않는다. 즉, 임의의 정수 a에 대하여 $a \cdot b = 1$을 만족하는 정수 b는 존재하지 않는다. 그리고 임의의 정수 a와 0의 곱은 0이다. 즉, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$이다.

특히 사칙연산을 비롯한 임의로 정의되는 연산 '$\circ$'에 대하여 집합 S의 임의의 두 원소에 이 연산을 적용한 결과가 집합 S의 원소라면, 다시 말해서 임의의 두 원소 $a, b \in S$에 대하여

$$a \circ b \in S$$

이면 집합 S는 연산 '$\circ$'에 대하여 **닫혀있다**closed고 한다. 자연수 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있다. 즉, 임의의 두 자연수를 더한 결과는 다시 자연수이고, 두 자연수를 곱한 결과도 자연수다. 그러나 다음과 같이 두 자연수를 뺀 결과에는 '자연수가 되는 경우, 0이 되는 경우 그리고 음의 정수가 되는 경우'가 있으므로 자연수 집합은 뺄셈에 대하여 닫혀있지 않다.

$$4-3=1 \in \mathrm{N},\ 4-4=0 \notin \mathrm{N},\ 3-4=-1 \notin \mathrm{N}$$

그러나 정수 전체의 집합은 덧셈, 곱셈뿐만 아니라 뺄셈에 대해서도 닫혀있다.

예제 1-1

두 자연수 a와 b가 다음과 같을 때, 사칙연산 결과가 자연수이면 ○, 자연수가 아니면 ×표로 나타내라.

자연수의 사칙연산	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a \div b$
$a=4,\ b=2$				
$a=2,\ b=3$				

풀이

자연수의 사칙연산	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a \div b$
$a=4,\ b=2$	○	○	○	○
$a=2,\ b=3$	○	×	○	×

2 어떤 연산 $\circ$에 대하여 $a \circ x = x \circ a = a$가 되는 x를 이 연산에 대한 항등원이라 하고, 일반적으로 $x = e$로 나타낸다.
3 어떤 연산 $\circ$에 대하여 $a \circ x = x \circ a = e$가 되는 x를 a의 역원이라 한다.

예제 **1-2**

정수 집합의 부분집합 $A=\{x \mid x=3n+1,\ n\text{은 정수}\}$는 어떤 연산에 대하여 닫혀있는지 조사하라.

풀이

집합 A에서 임의의 두 수 x, y가 어떤 정수 n과 m에 대하여

$$x=3n+1,\quad y=3m+1$$

과 같은 형태다. 즉, x와 y는 3으로 나누면 나머지가 1인 정수다. 따라서 이 두 수에 대한 사칙연산 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x+y &= (3n+1)+(3m+1)=3(n+m)+2 \\ x-y &= (3n+1)-(3m+1)=3(n-m) \\ x\cdot y &= (3n+1)\cdot(3m+1)=3(3nm+n+m)+1 \\ x\div y &= (3n+1)\div(3m+1)=\frac{3n+1}{3m+1} \end{aligned}$$

이때 n과 m이 정수이므로 $n+m$, $n-m$, $3nm+n+m$은 모두 정수다. 이때 $x+y$는 3으로 나누면 나머지가 2인 정수, $x-y$는 3으로 나누어떨어지는 정수, $x\cdot y$는 3으로 나누면 나머지가 1인 정수다. 따라서 집합 A는 곱셈에 대하여 닫혀있고, 덧셈과 뺄셈에 대해서는 닫혀있지 않다. 그러나 만약 $x=4$, $y=7$이라면

$$x\div y=4\div 7=\frac{4}{7}$$

이므로 명백하게 나눗셈에 대해서는 닫혀있지 않다. 따라서 집합 A는 사칙연산 중에서 곱셈에 대해서만 닫혀있다.

임의의 두 정수 사이의 크기 관계는 부등호 기호를 사용하여 정의한다. 두 정수 a와 b에 대하여 'a보다 b가 **크다**greater than' 또는 'b보다 a가 **작다**less than'는 $a<b$(또는 $b>a$)로 나타낸다. 또한 'a보다 b가 **크거나 같다**equal or greater than' 또는 'b보다 a가 **작거나 같다**equal or less than'는 $b\ge a$(또는 $a\le b$)로 나타낸다. 이때 a보다 b가 크거나 같다는 것은 $a<b$ 또는 $a=b$를 의미한다.

양의 정수 a에 -1을 곱하면 음수가 되고, 역으로 음의 정수 a에 -1을 곱하면 양수가 된다. 즉, 다음 관계식이 성립한다.

$$a>0 \iff -a<0\,,\quad a<0 \iff -a>0$$

특히 임의의 두 정수가 양수이면 두 수의 합과 곱은 모두 양수이고, 그 역도 성립한다. 다시 말해, $a>0$이고 $b>0$이면 $a+b>0$와 $a\cdot b>0$이 성립하고, 역으로 $a+b>0$이고 $a\cdot b>0$이면 $a>0$이고 $b>0$이다. 이제 정수의 순서는 다음과 같이 매겨짐을 알 수 있다.

정리 1-2 정수의 대소관계

임의의 정수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a \le b$이면 $a+c \le b+c$, $a-c \le b-c$

(2) $a \le b$이면, $c > 0$에 대하여 $a \cdot c \le b \cdot c$

(3) $a \le b$이면, $c < 0$에 대하여 $a \cdot c \ge b \cdot c$

(4) $a \le b$이고 $b \le a$이면 $a = b$ (반사성)

(5) $a \le b$이고 $b \le c$이면 $a \le c$ (추이성)

1.1.2 유리수

임의의 정수 a를 0이 아닌 정수 b로 나눈 수를 **분수** fractional number 라 하고 $\frac{a}{b}$ 또는 a/b로 나타낸다. 다음 분수를 살펴보자.

$$\frac{1}{3}, \ \frac{2}{6}, \ \frac{3}{9}, \ \frac{4}{12}, \ \cdots$$

이때 $\frac{1}{3}$은 분모와 분자가 1 이외의 공약수를 갖지 않으나 $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\cdots$는 분모와 분자가 1 이외의 공약수를 갖는다. 즉 공약수로 분모와 분자를 각각 나누면 모두 $\frac{1}{3}$이 된다. 이와 같이 임의의 분수는 분모와 분자가 1 이외의 공약수를 갖지 않는 분수로 표현할 수 있으며, 이와 같은 분수를 **기약분수** irreducible fractional number 라 한다. 그리고 이와 같은 기약분수와 정수의 체계를 **유리수** rational number 라 하고, 이때 유리수의 전체 집합은 $\mathbb{Q}$로 나타낸다. 한편 정수 a는 그 수를 1로 나눈 유리수라고 생각할 수 있으며, 따라서 임의의 유리수 r은 정수 p와 0이 아닌 정수 q에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r = \frac{p}{q} \ \ (\text{단, } p\text{와 } q\text{는 서로 소})$$

유리수 체계는 [정리 1-1]과 [정리 1-2]에서 소개한 정수의 성질을 모두 만족하며, 특히 곱셈에 관한 역원이 존재한다.

정리 1-3 유리수의 곱셈에 관한 역원

임의의 유리수 $a(\neq 0)$와 b에 대하여 $a \cdot b = b \cdot a = 1$을 만족하는 b가 존재한다.

[정리 1-3]에서 유리수 b를 유리수 a의 **역수** reciprocal number 라 하고, $b=\dfrac{1}{a}$로 나타낸다. 특히 정수가 아닌 유리수는 $\dfrac{1}{8}=0.125$와 같이 소수점 아래의 자릿수가 유한개인 **유한소수** finite decimal 와 $\dfrac{1}{7}=0.142857\cdots$과 같이 소수점 아래의 자릿수가 무한개이면서 동일한 숫자 군이 반복되는 **순환소수** recurring decimal 로 나뉜다. 그리고 순환소수는 다음과 같이 순환되는 마디의 처음과 끝에 점을 찍어서 간단히 나타낸다.

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

1.1.3 실수

피타고라스학파의 히파수스 Hippasos 는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 유리수가 아닌 것을 발견하였으나, 신의 창조물인 정수의 비율로 나타낼 수 없는 수를 인정하지 않던 피타고라스학파에 의하여 추방당하였다. 그 후, 19세기 말에 칸토어 Cantor, 데데킨트 Dedekind 등에 의하여 순환하지 않는 무한소수의 존재성이 밝혀졌다. 이처럼 순환하지 않는 무한소수를 **무리수** irrational number 라 하고 유리수와 무리수를 합하여 실제로 존재하는 수라는 의미로 **실수** real number 라 하였으며, 실수의 전체 집합은 $\mathbb{R}$로 나타낸다. 특히, 유리수를 수직선 위에 표시하면 서로 떨어져서 나타나지만, 실수는 연속적으로 나타나며 실수의 체계는 [그림 1-1]과 같이 구축된다.

$$\text{실수}\begin{cases}\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\text{자연수}\\ 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수}\begin{cases}\text{유한소수}\\ \text{순환소수}\end{cases}\end{cases}\\ \text{무리수(순환하지 않는 무한소수)}\end{cases}$$

[그림 1-1] **실수의 체계**

이와 같은 실수는 다음과 같이 정수와 유리수가 갖는 여러 가지 성질을 모두 만족한다.

정리 1-4 실수의 성질

임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a+b=b+a$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $a+0=0+a=a$ (덧셈에 관한 항등원 '0')

(3) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (덧셈에 관한 역원 '$-a$')

(4) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (덧셈의 결합법칙)

(5) $a\cdot b=b\cdot a$ (곱셈의 교환법칙)

(6) $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (곱셈에 관한 항등원 '1')

(7) $a\cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1\ (a\neq 0)$ (곱셈에 관한 역원 '$\frac{1}{a}$')

(8) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot (b\cdot c)$ (곱셈의 결합법칙)

(9) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (분배법칙)

$a\cdot (b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

예제 1-3

다음은 수의 집합이 사칙연산 중에서 어떤 연산에 대하여 닫혀 있는지를 묻는 표다. 닫혀있으면 ○, 아니면 ×표를 하여라. 단, 0으로 나누는 것은 제외한다.

	덧셈	뺄셈	곱셈	나눗셈
자연수				
정수				
유리수				
실수				

풀이

임의의 두 자연수를 더하거나 곱한 결과도 자연수이므로 자연수 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있다. 그러나 $1-3=-2$는 음의 정수, $1\div 3=\frac{1}{3}$은 분수이므로 뺄셈과 나눗셈에 대하여 닫혀있지 않다.

임의의 두 정수를 뺀 결과는 정수이므로 정수 집합은 뺄셈에 대하여 닫혀있지만, 두 정수의 나눗셈은 항상 정수인 것은 아니다. 예를 들어, $1\div 3=\frac{1}{3}$은 유리수이므로 정수 집합은 나눗셈에 대하여 닫혀있지 않다.

임의의 두 유리수 또는 두 실수를 나눈 결과는 유리수 또는 실수이므로, 유리수 집합과 실수 집합은 사칙연산에 대하여 모두 닫혀있다.

정리하면 자연수, 정수, 유리수, 실수의 사칙연산에 대한 결과는 다음과 같다.

	덧셈	뺄셈	곱셈	나눗셈
자연수	○	×	○	×
정수	○	○	○	×
유리수	○	○	○	○
실수	○	○	○	○

임의의 두 실수 a와 b의 크기는 다음 셋 중 반드시 한 가지가 성립한다.

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

또는

$$a - b < 0, \quad a - b = 0, \quad a - b > 0$$

그리고 실수는 정수와 유리수가 갖는 대소관계를 [정리 1-5]와 같이 모두 만족한다.

정리 1-5 실수의 대소관계

임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a \leq b$이면 $a + c \leq b + c$

(2) $a \leq b$이면, $c > 0$에 대하여 $a \cdot c \leq b \cdot c$, $\dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{c}$

(3) $a \leq b$이면, $c < 0$에 대하여 $a \cdot c \geq b \cdot c$, $\dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}$

(4) $a > b$ 이고 a, b가 같은 부호이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

(5) $a \leq b$이고 $b \leq a$이면 $a = b$ (반사성)

(6) $a \leq b$이고 $b \leq c$이면 $a \leq c$ (추이성)

예제 1-4

$0 < a < b < c < d$을 만족하는 실수 a, b, c, d에 대하여 다음 세 실수 A, B, C의 대소관계를 비교하라.

$$A = \frac{a}{d}, \quad B = \frac{a+c}{b+d}, \quad C = \frac{ac}{bd}$$

풀이

a, b, c, d가 실수이므로 $0 < a < b < c < d$를 만족하는 적당한 실수를 대입하여 비교해도 무방하다.

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$$

라 하면

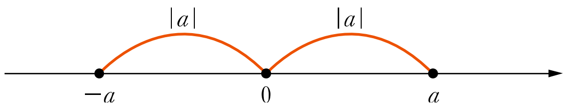
$$A=\frac{a}{d}=\frac{1}{4},\quad B=\frac{a+c}{b+d}=\frac{1+3}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad C=\frac{ac}{bd}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$$

이므로 분모를 4, 3, 8의 최소공배수 24로 통분하면 다음과 같다.

$$A=\frac{6}{24},\quad B=\frac{16}{24},\quad C=\frac{9}{24}$$

따라서 $A<C<B$이다.

한편 모든 실수는 연속이므로 임의의 실수를 수직선 위에 표시할 수 있다. 이때 특별히 어떤 정점을 **원점**origin 이라 하고 실수 0으로 대응시킨다. 그리고 이 원점의 오른쪽 방향을 양수로, 왼쪽 방향을 음수로 정한다. 그러면 임의의 양의 실수 $a>0$를 [그림 1-2]와 같이 수직선 위의 오른쪽 방향의 점으로 표시하고, 음의 실수 $a<0$를 왼쪽 방향의 점으로 표시할 수 있는데, 원점에서 이 점까지의 거리를 실수 a의 **절댓값**absolute value 이라 하고 기호 $|a|$로 나타낸다.



[그림 1-2] 실수와 수직선

예를 들어, 실수 0은 원점에 대응되므로 원점으로부터 거리가 0인 실수다. 따라서 $|0|=0$이다. 또한 실수 -2와 2는 원점으로부터 각각 2만큼 떨어진 거리에 있는 점에 대응되므로 $|-2|=2$이고 $|2|=2$다. 이때 [그림 1-3]과 같이 양수 2의 절댓값은 그 자신과 동일한 값이지만, 음수 -2의 절댓값은 자신의 수 -2에 음수 -1을 곱한 값임을 알 수 있다.

$$|-2|=2=-(-2) \qquad\qquad |2|=2$$

[그림 1-3] -2와 2의 절댓값

따라서 임의의 실수 a에 대한 절댓값은 다음과 같이 정의한다.

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

절댓값의 성질은 다음과 같다.

정리 1-6 절댓값의 성질

임의의 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2) $|a| \geq 0$

(3) $|a| = |-a|$

(4) $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$

(5) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ (단, $b \neq 0$)

(7) $|x| = a$이면 $x = \pm a$

(8) $|x| = |a|$이면 $x = \pm a$

(9) $-|a| \leq a \leq |a|$

예제 1-5

$a = -2$일 때, $|-a| + |a| \cdot |1-a| - \dfrac{|a|}{|1+a|}$의 값을 구하라.

풀이

$a = -2$이므로

$$-a = -(-2) = 2,\ \ 1-a = 1-(-2) = 3,\ \ 1+a = 1+(-2) = -1$$

이다. 따라서

$$|a| = |-2| = 2,\ \ |-a| = |2| = 2$$
$$|1-a| = |3| = 3,\ \ |1+a| = |-1| = 1$$

이므로 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$|-a| + |a| \cdot |1-a| - \frac{|a|}{|1+a|} = 2 + 2 \cdot 3 - \frac{2}{1} = 6$$

다음과 같이 실수 a를 n번 거듭하여 곱한 결과를 a의 n **거듭제곱**power 이라 하고 a^n 으로 나타낸다. 이때 a를 거듭하여 곱한 횟수 n을 a의 **지수**exponent, a를 **밑**base 이라 한다.

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n}$$

예를 들어, 2를 5번 반복하여 곱하면 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ 으로 나타낸다.

2^5과 2^3을 곱하면

$$2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)$$

이고, 실수는 곱셈에 대하여 결합법칙이 성립하므로

$$2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$$

이 되고, 따라서 $2^5 \cdot 2^3 = 2^8 = 2^{5+3}$이 성립한다. 또한 같은 방법으로

$$(2^5)^3 = \overbrace{2 \cdots 2}^{5} \cdot \overbrace{2 \cdots 2}^{5} \cdot \overbrace{2 \cdots 2}^{5} = 2^{15} = 2^{5 \cdot 3}$$

이 성립한다. 이와 같은 성질을 **지수법칙**law of exponents이라 하며, 임의의 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

정리 1-7 지수법칙

임의의 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & , \ m > n \\ 1 & , \ m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & , \ m < n \end{cases}$

이때 $a^0 \equiv 1$ 그리고 $\dfrac{1}{a^n} \equiv a^{-n}$이라 약속하면

$$a^{m-m} = a^0 = 1, \ \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

이므로 [정리 1–7]의 식 (5)는 m과 n의 크기에 상관없이 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

그리고 [정리 1–7]의 식 (4)는 $b \neq 0$에 대하여

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$$

으로 표현할 수 있다. 따라서 자연수인 지수뿐만 아니라 정수인 지수에도 확장하여 지수법칙을 적용할 수 있다.

정리 1-8 실수의 제곱과 절댓값의 성질

임의의 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^2 \geq 0$

(2) $|a|^2 = a^2$

(3) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (삼각부등식)

한편 어떤 실수 a를 다음과 같이 n번 반복하여 곱한 결과를 b라 할 때

$$b = \overbrace{a \cdots a}^{n} = a^n$$

a를 b의 n **제곱근** nth root 이라 하고, $a = \sqrt[n]{b}$로 나타낸다. 특히 $n = 2$인 경우에 a를 b의 **제곱근** square root 이라 하고, 간단하게 $a = \sqrt{b}$로 표현한다. 따라서 $a = \sqrt{b}$일 때, $b = a^2 \geq 0$이므로 근호 안의 수 b는 항상 0보다 크거나 같아야 한다. 즉, $b \geq 0$이고, $\sqrt{b} \geq 0$이다. 예를 들어, $a^2 = 4$라 하면 간단히 $a = \sqrt{4}$로 나타내고, 이 경우

$$2 \cdot 2 = 2^2 = 4,\ (-2) \cdot (-2) = (-2)^2 = 4$$

이므로 4의 제곱근은 양수 $2 = \sqrt{4}$와 음수 $-2 = -\sqrt{4}$가 존재한다. 이때 $2 = \sqrt{4}$를 양의 제곱근, $-2 = -\sqrt{4}$를 음의 제곱근이라 한다. 따라서 어떤 실수 a에 대하여 $a^2 = b$라 하면, $b = a^2$의 제곱근은 항상 $\sqrt{a^2}$과 $-\sqrt{a^2}$뿐이다. 이때 $a \geq 0$이면 $\sqrt{a^2} = a$이고 $a < 0$이면 어떤 양수 c에 대하여 $a = -c$이므로

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-c)^2} = \sqrt{c^2} = c = -a$$

가 성립한다. 따라서 a^2의 제곱근과 절댓값 사이에 다음 관계가 성립한다.

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

또한 $2^3 = 8$이므로 $2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3}$이고, $(-2)^3 = -8$이므로 $-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3}$이다. 이와 같이 세제곱하여 a가 되는 수를 a의 **세제곱근** cubic root 이라 하고, 이 경우에는 제곱근과 달리 a의 부호

에 관계없이 $\sqrt[3]{a^3}=a$다. 따라서 일반적으로 n이 짝수이면

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

이고, n이 홀수이면 다음과 같다.

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

정리 1-9 제곱근의 성질

임의의 양의 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

(4) $0 \leq a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이고 역도 성립한다.

이때 지수가 음의 정수인 경우와 동일하게

$$\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$$

으로 약속하면, 유리수를 지수로 갖는 경우에도 지수법칙을 적용할 수 있다.

정리 1-10 유리수의 지수법칙

임의의 양의 실수 a, b와 유리수 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^p a^q=a^{p+q}$

(2) $(a^p)^q=a^{pq}$

(3) $(ab)^p=a^p b^p$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=a^p \cdot b^{-p}$

(5) $a^p \div a^q=a^{p-q}$

예제 1-6

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}$ 를 간단히 하라.

풀이

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{729}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\sqrt{729}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{729}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\sqrt{3^6}\right)^{\frac{1}{6}} = \left((3^6)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= (3^6)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

예제 1-7

양의 실수 a, b에 대하여 $\sqrt[4]{a^{-8}b^{12}}$ 을 간단히 하라.

풀이

$$\sqrt[4]{a^{-8}b^{12}} = (a^{-8}b^{12})^{\frac{1}{4}} = (a^{-8})^{\frac{1}{4}}(b^{12})^{\frac{1}{4}}$$

$$= a^{(-8)\cdot\frac{1}{4}}b^{12\cdot\frac{1}{4}} = a^{-2}b^3 = \frac{b^3}{a^2}$$

예제 1-8

$\sqrt{2}$ 는 유리수가 아님을 보여라.

풀이

유리수는 서로 소인 정수 p와 $q(q \neq 0)$에 대하여 기약분수로 나타낼 수 있으므로, $\sqrt{2}$ 가 유리수라면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $p^2 = 2q^2$이고, p^2은 2의 배수이므로 p도 역시 2의 배수다. (왜냐하면 p가 2의 배수가 아닌 홀수라면, p^2은 홀수일 수밖에 없기 때문이다.) 그러므로 어떤 정수 k에 대하여 $p = 2k$라 할 수 있고, $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$이므로

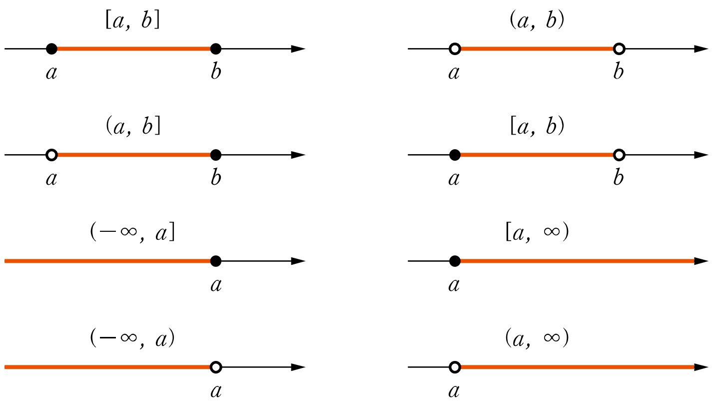
$$p^2 = 4k^2 = 2q^2, \quad q^2 = 2k^2$$

이고 q도 2의 배수가 된다. 따라서 p와 q가 서로 소인 정수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

임의의 두 실수 a와 b에 대하여 다음과 같은 $\mathbf{R}$의 부분집합을 **구간** interval 이라고 한다.

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\},\quad (a,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\},\quad (a,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$(-\infty,\ a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\},\quad [a,\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$$
$$(-\infty,\ a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\},\quad (a,\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$$
$$(-\infty,\ \infty) = \mathbf{R}$$

특히 $[a,\ b]$를 **폐구간** closed interval, $(a,\ b)$를 **개구간** open interval, $[a,\ b)$와 $(a,\ b]$를 **반개구간** half-open interval 또는 **반폐구간** half-closed interval, $(-\infty,\ a]$와 $[a,\ \infty)$를 **무한폐구간** infinite closed interval 그리고 $(-\infty,\ a)$와 $(a,\ \infty)$를 **무한개구간** infinite open interval 이라 한다. [그림 1-4]는 이러한 구간의 형태를 수직선 위에 나타낸 것이다.



[그림 1-4] 여러 가지 구간의 형태

특히 양수 a에 대하여 부등식 $|x| < a$를 만족하는 모든 x의 집합은 원점에서 x까지의 거리가 원점에서 a까지의 거리보다 작은 실수 x의 집합이므로

$$(-a,\ a) = \{x \in \mathbf{R} \mid -a < x < a\}$$

로 나타내며, $|x| \leq a$를 만족하는 모든 x의 집합은 원점에서 x까지의 거리가 원점에서 a까지의 거리보다 작거나 같은 실수 x의 집합이므로

$$[-a,\ a] = \{x \in \mathbf{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$

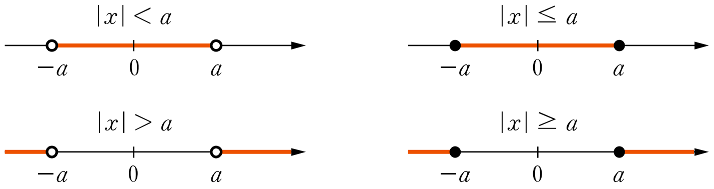
이다. 또한 $|x| > a$를 만족하는 모든 x의 집합은 원점에서 x까지의 거리가 원점에서 a까지의 거리보다 큰 실수 x의 집합이므로

$$(-\infty,\ -a) \cup (a,\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -a\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$$

이고, $|x| \geq a$를 만족하는 모든 x의 집합은 원점에서 x까지의 거리가 원점에서 a까지의 거리보다 크거나 같은 실수 x의 집합이므로

$$(-\infty,\ -a] \cup [a,\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$$

이다. [그림 1-5]는 이와 같은 구간을 수직선 위에 나타낸 것이다.



[그림 1-5] **절댓값으로 주어진 구간**

Section 1.1 연습문제

1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 임의의 원소를 a라 할 때, 다음을 만족하는 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 $M+n$을 구하라.

$$|a-1|+|a-2|+|a-3|+|a-4|+|a-5|$$

2. $\sqrt{5}$는 유리수가 아님을 보여라.

3. $0 < a < b < c$를 만족하는 실수 a, b, c에 대하여 다음 세 실수 A, B, C의 대소관계를 비교하라.

$$A = \frac{a}{c},\quad B = \frac{a+b}{b+c},\quad C = \frac{a-c}{c-a}$$

4. $|a| + a = 0$을 만족하는 실수 a에 대하여 $\sqrt{a^2} + 2a - |3a| + \sqrt[3]{8a^3}$을 구하라.

5. $a = \sqrt{2}$일 때, $|a-1| + |1-a|$를 구하라.

6. 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$, $ab<0$일 때, $\big||2b| - |3a-4b|\big|$을 구하라.

7. $1 < a < 2$일 때, $|a-3| - |a-1| - |a-2| + |a+3|$을 구하라.

8. 0이 아닌 실수 a, b, c, d에 대하여 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{d}{|d|}$의 값을 모두 구하라.

9. $1<a<2$일 때 $\sqrt{\left(\sqrt{(a-1)^2}-1\right)^2}-|a-2|$를 구하라.

10. 실수 $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$을 유리화하고, 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 각각 구하라.

11. 등식 $(a-b)+(a+b)\sqrt{3}=5+2\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 a와 b를 구하라.

1.2 복소수

모든 실수는 제곱하면 음이 아닌 실수가 된다는 사실을 앞에서 살펴보았다. 그러나 카르다노Cardano가 삼차방정식의 근의 공식을 연구하던 중 어떤 수를 제곱하여 음이 되는 기묘한 현상을 발견하게 되었고, 데카르트Descartes는 음수의 제곱근에 존재하지 않는 수라는 의미에서 허수라는 이름을 붙였다. 이러한 허수와 실수의 합을 복소수라 하며, 양자역학을 비롯하여 대부분의 공학에서 매우 폭넓게 사용되고 있다. 따라서 복소수에 대한 공부를 철저히 할 필요가 있으며, 이 절에서는 복소수의 의미와 사칙연산 그리고 복소수평면에 표현하는 방법 등에 대하여 살펴본다.

1.2.1 허수와 복소수

삼차방정식의 해를 구하다보면, 어떤 수를 제곱하여 음수가 되는 경우가 나타난다. 예를 들어, 삼차방정식 $x^3-x^2+x-1=0$의 해를 구하기 위하여 인수분해하면 $(x-1)(x^2+1)=0$이고, 따라서 $x=1$이거나 $x^2=-1$을 얻는다. 이와 같이 어떤 수 x를 제곱하여 -1이 되는 수를 실수처럼 표현하면, $x=\sqrt{-1}$ 또는 $x=-\sqrt{-1}$이 된다. 그러나 이는 가상의 수이고, 실수가 아니다. 이때 $\sqrt{-1}$을 **허수단위**imaginary unit라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$i=\sqrt{-1}$$

이와 같은 허수단위 i를 포함하는 수는 실제 존재하는 수가 아니라 가상의 수다. 따라서 실수처럼 두 허수의 크기를 비교할 수 없고, 양수나 음수의 개념도 사용할 수 없다. 하지만 가상의 수일지라도, 허수

는 물리학을 비롯한 공학에서 매우 중요하게 다루어지므로 자세히 살펴볼 필요가 있다.

임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$z = a + bi$$

형태의 수를 **복소수** complex number 라 한다. 이때 a를 복소수 z의 **실수부** real part 라 하고 $\mathrm{Re}(z) = a$로 나타낸다. 그리고 b를 z의 **허수부** imaginary part 라 하고, $\mathrm{Im}(z) = b$로 나타낸다. 특히 $a = 0$인 복소수, 즉 $z = bi$를 **순허수** pure imaginary number 라 하며, $b = 0$인 복소수는 $z = a$이므로 실수가 된다. 따라서 복소수 집합은 실수 집합을 포함하는 더 큰 집합이다.

복소수 $z = a + bi$는 홀로 존재하지 않고 항상 짝을 이루어 존재한다. 마치 '신발 한 켤레'처럼 한 복소수 $z = a + bi$의 짝을 **켤레복소수** 또는 **공액복소수** conjugate 라 하고, $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 즉,

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

이다. 따라서 $a = 0$인 순허수 $z = bi$에 대하여 $\bar{z} = \overline{bi} = -bi = -z$이므로, $z = -\bar{z}$이다. 또한 $b = 0$인 실수 $z = a$에 대하여 $\bar{z} = \bar{a} = a = z$이므로 $z = \bar{z}$이다.

예제 1-9

다음 허수를 허수단위 i를 이용하여 나타내라.

(a) $\sqrt{-2}$　　(b) $\sqrt{-4}$　　(c) $\sqrt{-27}$　　(d) $\sqrt{-50}$

풀이

(a) $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,i$

(b) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,i = 2i$

(c) $\sqrt{-27} = \sqrt{27}\,i = 3\sqrt{3}\,i$

(d) $\sqrt{-50} = \sqrt{50}\,i = 5\sqrt{2}\,i$

예제 1-10

다음 복소수의 켤레복소수를 구하라.

(a) $2+i$　　(b) $3-2i$　　(c) $-3i$　　(d) 4

풀이

(a) $\overline{2+i} = 2-i$

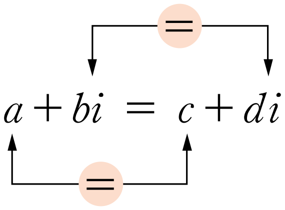
(b) $\overline{3-2i} = 3-(-2)i = 3+2i$

(c) $\overline{-3i} = -(-3)i = 3i$

(d) $\bar{4} = 4$

1.2.2 복소수의 사칙연산

복소수의 사칙연산을 살펴보기에 앞서 두 복소수의 상등에 대하여 살펴보자. 우선 임의의 실수 a, b, c, d에 대하여 두 복소수를 $z=a+bi$와 $w=c+di$라 할 때, $a=c$이고 $b=d$이면 두 복소수 z와 w는 **상등**equal 이라 하고 $z=w$로 나타낸다. 즉, [그림 1-6]과 같이 두 복소수 $z=a+bi$와 $w=c+di$에 대하여 대응하는 실수부와 허수부가 모두 같을 때 두 복소수를 같다고 정의한다. 이때 $0+0i=0$이므로 $z=a+bi=0$이기 위한 필요충분조건은 $a=0$, $b=0$이다.



[그림 1-6] 복소수의 상등

예제 1-11

다음 등식을 만족하는 실수 a와 b를 구하라.

(a) $2a+4i=2-2bi$

(b) $3+ai=\overline{b-2i}$

(c) $(a-1)-(2b-1)i=0$

(d) $(a-1)+(b-1)i=(1-2b)-(2a-3)i$

풀이

(a) a와 b가 실수이므로 $2a=2$, $4=-2b$이고, 따라서 $a=1$, $b=-2$다.

(b) a와 b가 실수이므로 $3+ai=\overline{b-2i}=b+2i$이고, 따라서 $a=2$, $b=3$이다.

(c) $a-1$과 $2b-1$이 실수이므로 $a-1=0$, $2b-1=0$, 즉 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이다.

(d) $a-1$, $b-1$, $1-2b$, $2a-3$이 실수이므로

$$a-1=1-2b,\quad b-1=-(2a-3)$$

이고, 이 연립방정식을 풀면 $a=2$, $b=0$이다.

이제 복소수의 사칙연산을 살펴보자. 두 복소수 $z=a+bi$와 $w=c+di$에 대하여 복소수의 사칙연산과 실수배를 각각 다음과 같이 정의한다.

❶ 복소수의 합 : $z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

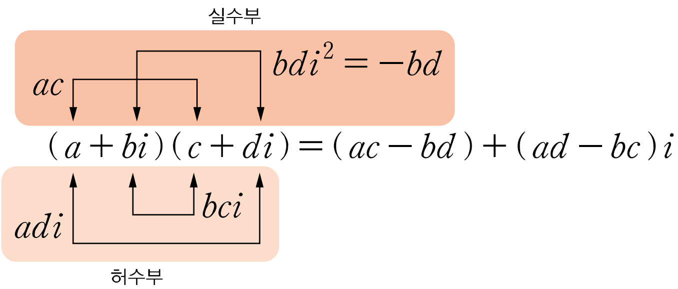
❷ 복소수의 차 : $z-w=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

❸ 복소수의 곱 : $z\cdot w=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

❹ 복소수의 역수 : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}$, $z \neq 0$

❺ 실수배 : $kz=k(a+bi)=ka+(kb)i$ (단, k는 임의의 실수)

두 복소수의 합과 차는 각각 두 복소수의 실수부와 허수부에 대한 합과 차가 된다. 또한 두 복소수의 곱은 [그림 1-7]과 같이 실수부끼리의 곱과 허수끼리의 곱을 합한 값이 실수부로 나타나고 실수부와 허수부의 곱을 합한 값을 허수부로 나타난다.



[그림 1-7] **복소수의 곱**

복소수의 역수는 다음과 같이 분모와 분자에 각각 켤레복소수 $a-bi$를 곱하여 실수부와 허수부의 합으로 표현한다.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

따라서 두 복소수 $z=a+bi$와 $w=c+di$의 나눗셈은 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}&=(a+bi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{di}{c^2+d^2}\right)\\&=\frac{1}{c^2+d^2}(a+bi)(c-di)\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

또한 $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$, $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad b=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

를 얻을 수 있고, $z=a+bi$의 실수부와 허수부는 켤레복소수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = b = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

예제 1-12

두 복소수 $z=3+2i$ 와 $w=2-i$ 에 대하여 다음을 구하라.

(a) $z+w$ (b) $2z-w$ (c) $\frac{2}{z}$ (d) zw

(e) z^2 (f) $z\bar{z}$ (g) $\frac{z}{w}$

풀이

(a) $z+w=(3+2i)+(2-i)=(3+2)+(2-1)i=5+i$

(b) $2z=2(3+2i)=6+4i$ 이므로

$$2z-w=(6+4i)-(2-i)=(6-2)+(4+1)i=4+5i$$

(c) $\frac{1}{z}=\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i}{13}$ 이므로

$$\frac{2}{z}=\frac{6-4i}{13}$$

(d) $zw=(3+2i)(2-i)=(6+2)+(4-3)i=8+i$

(e) $z^2=(3+2i)(3+2i)=(9-4)+(6+6)i=5+12i$

(f) $z\bar{z}=(3+2i)\overline{(3+2i)}=(3+2i)(3-2i)=9+4=13$

(g) $\frac{z}{w}=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{(6-2)+(4+3)i}{4+1}=\frac{4+7i}{5}$

한편 복소수 전체의 집합 C는 덧셈과 곱셈에 관하여 닫혀있으며, 복소수는 다음과 같이 실수가 갖는 성질을 만족한다.

정리 1-11 복소수의 성질

임의의 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$ (교환법칙)

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)=z_2(z_1z_3)$ (결합법칙)

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$, $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ (분배법칙)

(4) $z_1+0=0+z_1=z_1$ (덧셈에 관한 항등원 '0')

(5) $(-z_1)+z_1 = z_1+(-z_1)=0$ (덧셈에 관한 역원 '$-z_1$')

(6) $1 \cdot z_1 = z_1$ (곱셈에 관한 항등원 '1')

(7) $z_1 \neq 0$에 대하여 $z_1 \cdot \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{z_1} \cdot z_1 = 1$ (곱셈에 관한 역원 '$\dfrac{1}{z_1}$')

예제 1-13

다음 표를 완성하고, 자연수 n에 대하여 i^n의 값을 구하라.

i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8

풀이

제곱하여 -1이 되는 수를 허수단위 i로 정의하였으므로 $i^2=-1$이다. 그리고

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

이므로 표를 완성하면 다음과 같다.

i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

이 표에서 보는 것처럼 i^n의 값은 자연수 k에 대하여 다음과 같다.

$$i^n = \begin{cases} i, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ -i, & n=4k+3 \\ 1, & n=4k \end{cases}$$

예제 1-14

다음 식을 간단히 하라.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-50}\sqrt{-6}$

(c) $\sqrt{16}\sqrt{-2} + \sqrt{-16}\sqrt{-2} + \dfrac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}}$

(d) $\sqrt{-2} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-4}} + \sqrt{-4}\sqrt{-2} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-4}}$

풀이

(a) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}\,i}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12}\,i}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}} = 2i$

(b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-50}\,\sqrt{-6} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\,i} + (\sqrt{50}\,i)(\sqrt{6}\,i)$

$$= \frac{\sqrt{2}\,i}{i^2} - (5\sqrt{2})(\sqrt{2}\,\sqrt{3}) = -10\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$$

(c) $\sqrt{16}\,\sqrt{-2} + \sqrt{-16}\,\sqrt{-2} + \dfrac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}}$

$$= 4\sqrt{2}\,i + (\sqrt{16}\,i)(\sqrt{2}\,i) + \frac{\sqrt{16}\,i}{\sqrt{2}\,i}$$

$$= 4\sqrt{2}\,i - 4\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$$

(d) $\sqrt{-2} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-4}} + \sqrt{-4}\,\sqrt{-2} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-4}}$

$$= \sqrt{2}\,i + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}\,i} + (\sqrt{4}\,i)(\sqrt{2}\,i) + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{4}\,i}$$

$$= \sqrt{2}\,i + \frac{\sqrt{2}}{i} - 2\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}\,i - \sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2} + 1$$

$$= 1 - 2\sqrt{2}$$

예제 1-15

다음 복소수를 $a+bi$ 형태로 표현하라.

(a) $\dfrac{1+2i}{2+i}$ (b) $\left(\dfrac{1+2i}{2+i}\right)^2$ (c) $\overline{\left(\dfrac{1+2i}{2+i}\right)}$ (d) $\dfrac{\overline{1+2i}}{\overline{2+i}}$

풀이

(a) $\dfrac{1+2i}{2+i} = \dfrac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{(2+2)+(4-1)i}{4+1} = \dfrac{4+3i}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

(b) $\dfrac{1+2i}{2+i} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$이므로

$$\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{4+3i}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}(4+3i)^2 = \frac{1}{25}[(16-9)+(12+12)i]$$

$$= \frac{1}{25}(7+24i) = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$$

(c) $\dfrac{1+2i}{2+i} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$이므로

$$\overline{\left(\frac{1+2i}{2+i}\right)} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

(d) $\overline{1+2i}=1-2i$, $\overline{2+i}=2-i$이므로

$$\frac{\overline{1+2i}}{\overline{2+i}}=\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{(2+2)+(-4+1)i}{4+1}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

[예제 1-15]에서 켤레복소수에 대하여 다음 식이 성립하는 것을 확인할 수 있다.

$$\overline{\left(\frac{1+2i}{2+i}\right)}=\frac{\overline{1+2i}}{\overline{2+i}}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

켤레복소수는 이런 성질 이외에 다음과 같은 성질도 갖는다.

정리 1-12 켤레복소수의 성질

임의의 복소수 z_1, z_2에 대하여

(1) $\overline{\overline{z_1}}=z_1$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(4) $\overline{kz_1}=k\,\overline{z_1}$ (k는 실수)

(5) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$

예제 1-16

$z=1+2i$ 와 $w=3-i$ 에 대하여 다음을 구하라.

(a) $\overline{z+w}$ (b) $\overline{z-w}$ (c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ (d) $\overline{\overline{z}}$ (e) $z\overline{z}$

풀이

(a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}=(1-2i)+(3+i)=4-i$

(b) $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}=(1-2i)-(3+i)=-2-3i$

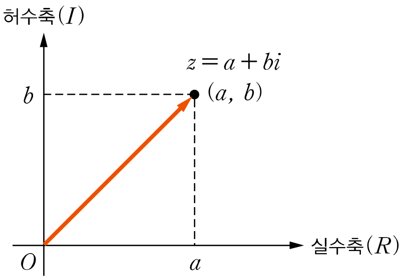
(c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{1-2i}{3+i}=\frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{1-7i}{10}$

(d) $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{1+2i}}=\overline{1-2i}=1+2i$

(e) $z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=1+4=5$

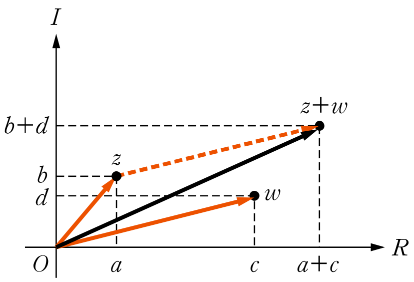
임의의 복소수 $z=a+bi$를 [그림 1-8]과 같이 수평축과 수직축이 한 점에서 만나는 평면 위의 점

$(a,\ b)$로 표현할 수 있다. 이때 수평축을 **실수축**real axes, 수직축을 **허수축**imaginary axes이라 하고, 이러한 평면을 **복소수평면**complex plane이라 한다.



[그림 1-8] 복소수평면

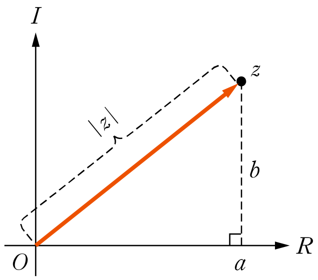
그러면 두 복소수 $z=a+bi$와 $w=c+di$의 합은 [그림 1-9]와 같이 평행사변형의 대각선으로 표시되는 것을 알 수 있다.



[그림 1-9] 복소수의 합

원점으로부터 복소수 $z=a+bi$까지 거리는 [그림 1-10]과 같이 $|z|$으로 표시하며, 이 거리를 복소수 z의 **절댓값**absolute value 또는 **길이**length라 한다. 피타고라스 정리를 이용하면 z의 길이는 다음과 같다.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$



[그림 1-10] 복소수의 길이

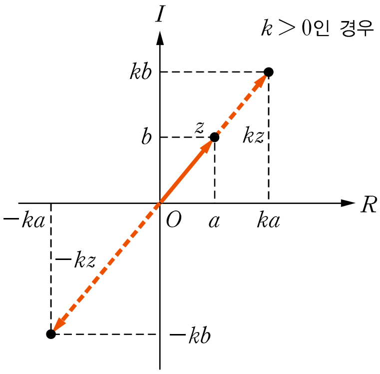
이때 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$, 즉

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

이다. 또한 실수 k와 복소수 z에 대하여 kz는

$$kz = k(a+bi) = ka + (kb)i$$

이므로 $k>0$이면 kz는 [그림 1-11]과 같이 복소수 z의 크기를 k배만큼 증가시키거나($k>1$) 감소시킨($0<k<1$) 복소수이고, $k<0$이면 kz는 복소수 z의 반대 방향으로 크기를 k배만큼 증가시키거나 감소시킨 복소수다.



[그림 1-11] 복소수의 상수배

예제 1-17

$z=1+2i$와 $w=3-i$에 대하여 다음을 복소수평면 위의 점으로 나타내라.

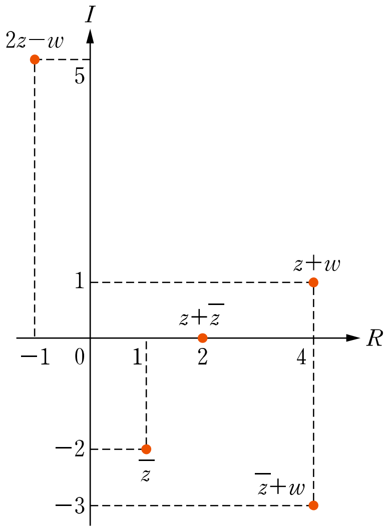
(a) $z+w$ (b) $2z-w$

(c) $\bar{z}$ (d) $\bar{z}+w$

(e) $z+\bar{z}$

풀이

$z+w=4+i$, $2z-w=-1+5i$, $\bar{z}=1-2i$, $\bar{z}+w=4-3i$, $z+\bar{z}=2$이므로 이들 점을 복소수평면 위의 점으로 표시하면 오른쪽 그림과 같다.

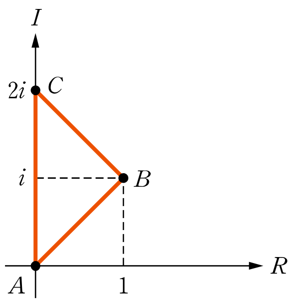


예제 1-18

$z=1+i$ 에 대하여 0, z, z^2이 나타내는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, 삼각형 $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하라.

풀이

$z^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로 점 A, B, C는 다음 그림과 같다. 그러므로 삼각형 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다.



따라서 복소수평면 위의 점을 이용하면 복소수 길이는 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

정리 1-13 복소수 길이의 성질

임의의 복소수 z, w에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|z|\ge 0$, $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

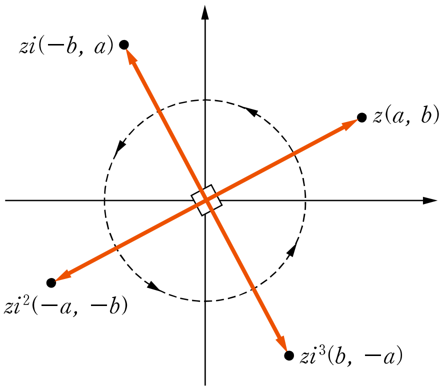
(2) $|z+w|\le|z|+|w|$ (삼각부등식)

(3) $|z|-|w|\le|z+w|$

또한 복소수 $z=a+bi$에 대하여

$$zi=(a+bi)i=-b+ai$$
$$zi^2=(-b+ai)i=-a-bi$$
$$zi^3=(-a-bi)i=b-ai$$

이므로 [그림 1-12]와 같이 복소수 z를 시계 반대 방향으로 $90°$만큼씩 회전하면 zi, zi^2, zi^3인 것을 알 수 있다.



[그림 1-12] 복소수의 회전

예제 1-19

$z=1+2i$ 와 $w=3-i$ 에 대하여 $|z|$, $|w|$, $|z+w|$를 구하라.

풀이

$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|w|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ 이고, $z+w=4+i$이므로 $|z+w|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$ 이다.

Section 1.2 연습문제

1. 다음 식을 간단히 하라.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}\ \sqrt{-5}}{\sqrt{-3}\ \sqrt{-4}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-9}}+\sqrt{-256}$

2. 다음에 주어진 복소수를 $a+bi$ 형태로 나타내라.

(a) $2i^5-3i^4-i^3+\dfrac{i^2}{2}+3i$

(b) $(1+2i)(3-i)$

(c) $i(2-3i)$

(d) $(1-i)^2(1+i)$

(e) $\dfrac{1-i}{3+2i}$

(f) $\dfrac{2-3i}{(2+i)^2}$

3. $z=a+bi$라 할 때, 다음을 구하라.

(a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(b) $\mathrm{Im}(z^2+i)$

(c) $\mathrm{Im}\left(z^2+\overline{z^2}\right)$

(d) $|z-2+3i|$

4. 한 학생이 허수단위를 이용하여 다음과 같이 '$1=-1$'을 증명했다. 이 학생은 어느 과정에서 잘못 구하였는가?

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1} & ❶ \\ &= \sqrt{(-1)(-1)} & ❷ \\ &= \sqrt{(-1)} \cdot i & ❸ \\ &= i \cdot i & ❹ \\ &= -1 & \end{aligned}$$

5. 다음 등식을 만족하는 실수 a, b의 값을 구하라.

(a) $(a-2)+(b+1)i=3-i$

(b) $(a+1)+(a+b-1)i=0$

(c) $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=2-i$

(d) $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=3$

6. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2013}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2013}$을 간단히 하라.

7. $z=\dfrac{1+i}{1-i}$일 때, $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2012}+z^{2013}+z^{2014}+z^{2015}$를 구하라.

8. $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$일 때, 다음을 구하라.

(a) z^2을 구하라.

(b) $1+z+z^2+\cdots+z^7$을 구하라.

9. 다음 식의 값을 구하라.

(a) $i-i^2+i^3-i^4+i^5-i^6+i^7-i^8$

(b) $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+7i^7-8i^8$

10. $z=1-2i$일 때, $\dfrac{\bar{z}-2i}{z}-\dfrac{z-1}{\bar{z}}$의 값을 구하라.

11. 두 실수 x, y에 대하여 복소수 $x+yi$를 복소수평면 위의 점 (x, y)에 대응시킨다. 자연수 n에 대하여 복소수 $(1+i)\cdot i^n$을 복소수평면 위에 대응시킨 점을 P_n이라 할 때, 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 구하라.

1.3 식과 연산

이 절에서는 단항식과 다항식의 의미를 살펴보고, 곱셈공식에 의하여 식을 전개하는 방법과 전개된 식을 간단히 하기 위한 인수분해 방법을 알아본다. 또한 파스칼의 삼각형을 이용하여 $(a+b)^n$ 형태의 식을 전개하는 방법과 고차다항식의 인수분해를 쉽게 구하기 위한 인수정리에 대하여 배운다.

1.3.1 단항식과 다항식

수 또는 문자의 곱으로 이루어진 식을 **항**term 이라 한다. 수와 몇 개의 문자의 곱으로 이루어진 식을 **단항식**monomial, 두 개 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식을 **다항식**polynomial이라고 한다. 예를 들어, 식 $3x-2y+xy+2$는 단항식 $3x$, $-2y$, xy, 2가 합해진 다항식이다. 이때 단항식 2와 같이 문자를 갖지 않고 숫자로만 이루어진 항을 **상수항**constant term 이라 하고, 문자에 곱해진 숫자는 **계수**coefficient 라 한다. 앞의 예에서 x, y의 계수는 각각 3, -2이고, xy의 계수는 1이다. 그리고 단항식에서 곱해진 문자의 개수를 그 문자에 대한 **차수**order 라 하고, 다항식에서 특정한 문자에 대하여 차수가 가장 큰 항의 차수를 다항식의 차수로 정한다. 예를 들어, 단항식 x^3y^4은 x에 대하여 3차식, y에 대하여 4차식이다. 식 $x^3-y^2+x^2y^3+1$은 x에 대하여 3차식, y에 대하여 3차식이다. 또한 x와 y에 대하여 $2+3=5$차식인 다항식이다.

두 개 이상의 단항식에서 문자의 차수가 동일한 항을 **동류항**similar term 이라 한다. 예를 들어 단항식 $-2a^2$, $3a^2$은 동류항이다. 아래 식에서는

$$x^3-2x-2x^3+5x+4x^3+x$$

$-2x$, $5x$, x가 동류항이고 x^3, $-2x^3$, $4x^3$이 동류항이다. 그러면 다항식은 덧셈과 뺄셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙과 분배법칙이 성립한다. 다음과 같이 다항식을 동류항끼리 묶어서 정리하는 것을 "**동류항을 간단히 한다.**"고 한다.

$$\begin{aligned} x^3-2x-2x^3+5x+4x^3+x &= (x^3-2x^3+4x^3)+(-2x+5x+x) \\ &= (1-2+4)x^3+(-2+5+1)x \\ &= 3x^3+4x \end{aligned}$$

예제 1-20

동류항을 간단히 하여 다음 두 다항식의 합과 차를 구하라.

$$A = x^2 - 2x - 2,\ \ B = -3x^2 + 4x + 3$$

풀이

$$A + B = (x^2 - 2x - 2) + (-3x^2 + 4x + 3) = (x^2 - 3x^2) + (-2x + 4x) + (-2 + 3)$$
$$= (1 - 3)x^2 + (-2 + 4)x + 1 = -2x^2 + 2x + 1$$

$$A - B = (x^2 - 2x - 2) - (-3x^2 + 4x + 3) = (x^2 + 3x^2) + (-2x - 4x) + (-2 - 3)$$
$$= (1 + 3)x^2 + (-2 - 4)x - 5 = 4x^2 - 6x - 5$$

1.3.2 곱셈공식

이제 두 개 이상의 다항식의 곱을 전개하기 위한 곱셈공식을 살펴보자.

정리 1-14 곱셈공식

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ \ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(4) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(5) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$

(6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

(7) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\ \ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(8) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,\ \ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

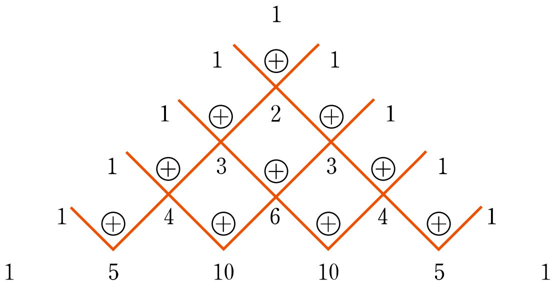
(9) $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(10) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$

또한 곱셈공식을 변형하여 두 제곱수의 합 또는 두 세제곱수의 합과 차를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

특히 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식은 [그림 1-13]과 같은 **파스칼의 삼각형** Pascal's triangle 을 통하여 구할 수 있다. 파스칼의 삼각형은 윗줄의 두 수를 더하면 두 수 밑의 가운데 수가 되도록 삼각형 모양으로 수를 배열한 그림을 의미한다. 수의 배열을 살펴보면 [그림 1-13]과 같이 두 번째 줄의 수 1과 1은 $a+b$의 계수를 나타내고, 세 번째 줄의 수 1, 2, 1은 $(a+b)^2$의 전개식 $a^2+2ab+b^2$의 각 항의 계수를 나타낸다.



$1a+1b$

$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^2$

$(a+b)^4=1a^3+4a^3b+6a^2b+4ab^3+1b^4$

[그림 1-13] **파스칼의 삼각형**

한편 복잡한 다항식의 곱을 전개할 때는 전개한 식을 쉽게 얻기 위해 공통부분을 하나의 문자 t로 치환하거나 또는 식을 변형하여 공통부분을 유도한다. 그리고 최종적으로 문자 t 대신에 공통부분으로 바꾸면 원하는 전개식을 얻을 수 있다.

예제 1-21

다음 식을 전개하라.

(a) $(2a-3b)^2$

(b) $(a-3b)(a+3b)$

(c) $(2a-b+c)^2$

(d) $(a-b+c)(a-b-c)$

(e) $(a^2-b)(a^2-b+2)$

(f) $(a+3)(a+1)(a-2)(a-4)$

풀이

(a) $(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$

(b) $(a-3b)(a+3b)=a^2-(3b)^2=a^2-9b^2$

(c) $(2a-b+c)^2=(2a)^2+(-b)^2+c^2+2(2a)(-b)+2(-b)c+2(2a)c$
$=4a^2+b^2+c^2-4ab-2bc+4ac$

(d) $t=a-b$라 하면

$$(a-b+c)(a-b-c)=(t+c)(t-c)=t^2-c^2$$

이고, $t^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$이므로 $(a-b+c)(a-b-c)=a^2-2ab+b^2-c^2$이다.

(e) $t=a^2-b$라 하면

$$(a^2-b)(a^2-b+2)=t(t+2)=t^2+2t$$

이고, $t^2=(a^2-b)^2=(a^2)^2-2(a^2)b+b^2=a^4-2a^2b+b^2$, $2t=2(a^2-b)=2a^2-2b$이므로 $(a^2-b)(a^2-b+2)=a^4-2a^2b+2a^2+b^2-2b$다.

(f) 식을 정리하면 다음과 같다.

$$(a+3)(a+1)(a-2)(a-4)=\{(a+3)(a-4)\}\{(a+1)(a-2)\}=(a^2-a-12)(a^2-a-2)$$

이때 $t=a^2-a$라 하면

$$(a^2-a-12)(a^2-a-2)=(t-12)(t-2)=t^2-14t+24$$

이고, $t^2=(a^2-a)^2=(a^2)^2-2(a^2)a+a^2=a^4-2a^3+a^2$, $14t=14(a^2-a)=14a^2-14a$이므로 $(a+3)(a+1)(a-2)(a-4)=a^4-2a^3-13a^2+14a+24$다.

예제 1-22

$a+b=2$, $ab=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하라.

(a) a^2+b^2 (b) $a-b$ (c) a^3+b^3 (d) a^4+b^4

풀이

(a) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2(-1)=6$

(b) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=6-2(-1)=8$이므로 $a-b=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$다.

(c) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3(-1)\cdot 2=14$

(d) $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=6^2-2(-1)^2=34$

1.3.3 인수분해

곱셈공식의 역으로 전개된 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 간단하게 표현하는 것을 **인수분해** factorization 라 한다.

정리 1-15 인수분해 공식

(1) $ab+ac=a(b+c)$, $ab-ac=a(b-c)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(6) $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc=(x+a)(x+b)(x+c)$

(7) $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2$

(8) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2+b^3=(a-b)^3$

(9) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(10) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(11) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

예제 1-23

다음 식을 인수분해하라.

(a) $9a^2+6a+1$

(b) $9a^2-16$

(c) $8a^3-1$

(d) $4a^2+b^2+9c^2+2(6ac-2ab-3bc)$

풀이

(a) $9a^2+6a+1=(3a)^2+2(3a)+1=(3a+1)^2$

(b) $9a^2-16=(3a)^2-4^2=(3a-4)(3a+4)$

(c) $8a^3-1=(2a)^3-1^3=(2a-1)\{(2a)^2+(2a)+1\}=(2a-1)(4a^2+2a+1)$

(d) $4a^2+b^2+9c^2+2(6ac-2ab-3bc)$

$$=(2a)^2+(-b)^2+(3c)^2+2\{(2a)(-b)+(-b)(3c)+(2a)(3c)\}$$
$$=(2a-b+3c)^2$$

이제 다음과 같이 다항식을 다항식으로 나눈 식을 생각해보자.

$$\frac{a+ab+b}{a-b},\ \frac{3x^3-x+1}{x^2+x+2}$$

이처럼 다항식을 다항식으로 나눈 식을 **유리식**rational expression 이라 한다. 특히 x에 관한 다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$로 나눌 때, 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 하면

$$\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)\cdots R(x)$$

와 같이 표현한다. 이때 $R(x)$의 차수는 $B(x)$의 차수보다 작다. 그러면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)$$

만일 $R(x) = 0$이면 $A(x)$는 $B(x)$로 "나누어떨어진다."고 하고, 이 경우에 $A(x) = B(x)\,Q(x)$이므로 $B(x)$와 $Q(x)$는 $A(x)$의 인수가 된다. 즉, 다항식 $A(x)$는 두 다항식의 곱 $B(x)\,Q(x)$로 인수분해 되는 것을 알 수 있다. 이때 $B(x) = x - a$라 하면

$$A(x) = (x - a)\,Q(x)$$

이고 $A(x)$는 $x - a$로 나누어떨어진다. 그러므로 위 식의 양변에 $x = a$를 대입하면

$$A(a) = (a - a)\,Q(a) = 0$$

이 성립하는 것을 알 수 있다. 즉, $A(a) = 0$이면 다항식 $A(x)$는 인수 $x - a$를 갖는다. 따라서 인수에 대한 다음 성질을 얻는다.

정리 1-16 인수정리

x에 관한 다항식 $A(x)$가 $x - a$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $A(a) = 0$이다.

여기서 $A(x)$의 인수 $x - a$를 어떻게 구할지 의문이 생길 것이다. 이를 해결하기 위해, 다항식 $A(x)$에서 상수항의 약수(음의 약수 포함) 중의 하나를 a로 놓고, $A(a) = 0$이 되는지를 살펴본다. 예를 들어, 다항식 $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$에서 상수항 2의 약수는 -2, -1, 1, 2다. 이 약수들을 $A(x)$에 대입하면

$$A(-2) = -36,\ A(-1) = -6,\ A(1) = 0,\ A(2) = 0$$

이므로 $A(x)$는 인수 $x - 1$과 $x - 2$를 갖는다. 따라서

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x - 1)(x - 2)(ax + b)$$

와 같이 인수분해 되는 것을 알 수 있다. 이제 우변을 전개하여 동류항을 비교하거나 특정한 계수들을 비교하여 미정계수 a와 b를 구하면, $A(x)$의 인수분해가 완성된다. 이 예에서 좌변의 3차항의 계수는 2이고 우변에서 3차항이 나올 수 있는 경우는 $x \cdot x\,(ax) = ax^3$이므로 $a = 2$다. 또한 좌변의 상수항은 2이고 우변의 상수항은 $(-1)(-2) \cdot b = 2b$이므로 $b = 1$이다. 따라서 $A(x)$는 다음과 같이 인수분해 된다.

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x - 1)(x - 2)(2x + 1)$$

예제 1-24

다음 식을 인수분해하라.

(a) $3x^2+5x-2$

(b) $x^3-6x^2+11x-6$

(c) x^4-13x^2+36

(d) x^4-2x^2+1

풀이

(a) $A(x)=3x^2+5x-2$라 하면 2의 약수 중에서 $A(-2)=0$이므로 다음과 같다.

$$3x^2+5x-2=(x+2)(ax+b)$$

좌변의 2차항의 계수는 3이고 우변의 2차항의 계수는 a이므로 $a=3$이다. 또한 좌변과 우변의 상수항은 각각 -2와 $2b$이므로 $b=-1$이다. 따라서 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$$

(b) $A(x)=x^3-6x^2+11x-6$이라 하면 6의 약수 중에서 $A(1)=0$, $A(2)=0$, $A(3)=0$이므로 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

(c) $A(x)=x^4-13x^2+36$이라 하면 36의 약수 중에서 $A(-3)=0$, $A(-2)=0$, $A(2)=0$, $A(3)=0$이므로 $A(x)$는 $x+3$, $x+2$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다. 따라서 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^4-13x^2+36=(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$$

(d) $A(x)=x^4-2x^2+1$이라 하면 1의 약수 -1과 1에 대하여 $A(-1)=0$, $A(1)=0$이므로 $x+1$과 $x-1$을 인수로 갖는다. 또한 $A(x)$는 4차식이므로 $A(x)$는 $x+1$, $x-1$ 그리고 2차식의 곱으로 표현된다.

$$A(x)=x^4-2x^2+1=(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)$$

한편 $(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)=(x^2-1)(ax^2+bx+c)$이므로 다음과 같다.

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)(ax^2+bx+c)$$

양변의 4차항의 계수는 1과 a이므로 $a=1$이고, 상수항은 각각 1과 $-c$이므로 $c=-1$이다. 한편 좌변에는 1차항이 없으므로 1차항의 계수는 0이다. 따라서 우변에서 1차항 $-bx$의 계수도 0이어야 한다. 즉, $b=0$이다. 그러므로 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x^4-2x^2+1&=(x-1)(x+1)(x^2-1)\\&=(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)\\&=(x-1)^2(x+1)^2\end{aligned}$$

예제 1-25

다항식 $x^4+3x^3-ax^2+x-b$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 그리고 몫을 구하라.

풀이

$A(x)=x^4+3x^3-ax^2+x-b$라 하면 $(x-1)(x+2)$으로 나누어떨어지므로

$$A(1)=1+3-a+1-b=-(a+b)+5=0$$
$$A(-2)=-(4a+b)-10=0$$

이 성립한다. 따라서 $a+b=5$, $4a+b=-10$에서 $a=-5$, $b=10$을 얻는다. 즉,

$$x^4+3x^3+5x^2+x-10=(x-1)(x+2)(px^2+qx+r)$$

이 성립한다. 이때 양변의 4차항은 x^4, px^4이므로 $p=1$이고 상수항은 -10, $-2r$이므로 $r=5$이다. 그러므로

$$x^4+3x^3+5x^2+x-10=(x-1)(x+2)(x^2+qx+5)$$

다. 또한 좌변의 1차항은 x이고 우변의 1차항은 다음 그림과 같이 $10x-5x-2qx=(5-2q)x$이므로 $5-2q=1$, 즉 $q=2$다. 따라서 주어진 식은

$$x^4+3x^3+5x^2+x-10=(x-1)(x+2)(x^2+2x+5)$$

와 같이 인수분해되므로 구하려는 몫은 x^2+2x+5다.

$$(x-1)(x+2)(x^2+qx+5) \longrightarrow 10x-5x-2qx$$

한편 $\sqrt{x}$와 같이 근호 안에 미지수 x 또는 x에 관한 유리식을 포함하는 식을 **무리식**irrational expression이라 하며, 1.1절에서 언급한 것처럼 근호 안의 식의 값은 항상 0보다 크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{A(x)}$가 존재하기 위해서는

$$A(x) \geq 0$$

이어야 하며, 이때 제곱근 역시 $\sqrt{A(x)} \geq 0$이다.

예제 1-26

다음 무리식의 값이 실수가 되기 위한 x의 범위를 구하라.

(a) $\sqrt{x+2}$

(b) $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

풀이

(a) $\sqrt{x+2}$ 가 실수가 되기 위하여 $x+2 \geq 0$이어야 하므로 $x \geq -2$다.

(b) 주어진 무리식이 실수가 되기 위하여 $2-x \geq 0$이고 $x+2 \geq 0$이어야 한다. 그러므로 $-2 \leq x \leq 2$이어야 한다. 그러나 $x=-2$이면 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$의 값은 분모가 0이 되므로 $x=-2$는 안 된다. 따라서 주어진 무리식이 실수가 되기 위한 x의 범위는 $-2 < x \leq 2$이다.

예제 1-27

다음 주어진 x에 대한 무리식의 값을 구하라.

(a) $x=\sqrt{2}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(b) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$

풀이

(a) $x=\sqrt{2}$ 이므로 $x+1=1+\sqrt{2}>0$이고 $x-1=-1+\sqrt{2}>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)} \\ &= \frac{(x+1)+(x-1)+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{2} \\ &= \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x+\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

(b) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $1+x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>0$, $1-x=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}>0$이고 $1-x^2=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \frac{(1-x)+(1+x)}{1-x^2}\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{2}{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Section 1.3 연습문제

1. 동류항을 간단히 하여 다음 두 다항식의 합과 차를 구하라.

(a) $A(x)=x^2-5x+6$, $B(x)=x^2+x-2$

(b) $A(x)=x^3-3x^2-6x+8$, $B(x)=x^3+3x-4$

(c) $A(x, y)=(x+y-2)^2$, $B(x, y)=(x-2y+3)^2$

(d) $A(x, y)=(x+y)^2+2(x+y)-3$, $B(x, y)=(x-y)^2-2(x-y)+1$

2. 다음 식을 전개하라.

(a) $(3x+2)(3x-2)$

(b) $(3a+1)^3$

(c) $(2a-1)(4a^2+3a+1)$

(d) $(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)$

3. 다음 식의 값을 구하라.

(a) $a+b=2$, $ab=1$일 때, a^2+b^2

(b) $a+b=3$, $ab=-2$일 때, a^3+b^3

(c) $a-\dfrac{1}{a}=3$일 때, $a^3-\dfrac{1}{a^3}$

(d) $a+b=4$, $a^2+b^2=6$일 때, a^3+b^3

4. 다음 식을 인수분해하라.

(a) a^3-2a^2-5a+6

(b) $a^2b-a^2c+b^2c-ab^2$

(c) $a^2-a(2b-1)+b(b-1)$

(d) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

5. 다음 식을 인수분해하라.

(a) a^4-5a^2+4

(b) $a^2+ab-2b^2-3b-1$

(c) $(a+b)^2+2(a+b)-3$

(d) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

6. 복소수 범위에서 다음 식을 인수분해하라.

(a) x^2-2x-1

(b) x^2-2x+2

(c) x^2+1

(d) x^4-16

7. 다음 식을 인수분해하라.

(a) x^3-4x^2+x+6

(b) $2x^3-5x^2-4x+3$

(c) x^4-2x^2+3x-2

(d) $(x+1)^3-(2x-1)^3+(x-2)^3$

8. 다항식 x^4+x^2+a가 $(x^2+b)(x^2-2)$의 형태로 인수분해 될 때, a와 b를 구하라.

9. 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$이 이차식의 완전제곱 형태 $(x^2+ax+b)^2$이 되기 위한 상수 a, b의 값을 구하라.

10. 다음 식의 값을 구하라.

(a) $x=\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$

(b) $x=1+\sqrt{2}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

(c) $x=1-\sqrt{2}$, $y=1+\sqrt{2}$일 때, x^2+y^2과 x^3-y^3

(d) $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$일 때, x^3-y^3

11. 삼각형 ABC에서 세 변의 길이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$가 다음 식을 만족한다면

$$(a+b+c)(a-b+c)=(a+b-c)(-a+b+c)$$

삼각형 ABC가 어떤 형태의 삼각형인지 구하라.

1.4 항등식과 방정식

이 절에서는 항등식의 의미를 정확히 이해하고, 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 살펴본다. 그리고 방정식의 의미를 이해하고, 일차·이차방정식의 해가 존재하기 위한 조건과 근의 공식에 대하여 학습한다. 또한 인수정리를 이용하여 고차방정식의 해를 구하는 방법과 삼차방정식 $x^3-1=0$의 허근에 대한 여러 가지 성질을 분석한다.

1.4.1 항등식

주어진 등식에 포함된 문자에 어떠한 수를 대입해도 등식이 성립하는 식을 **항등식**identity이라 한다. 반면 어떤 특정한 값에 대하여 등식이 성립하는 식을 **방정식**equation이라 한다. 예를 들어, 식 $0 \cdot x=0$에 대하여 임의의 실수에 0을 곱한 결과는 항상 0이다. 이때 x 대신에 어떠한 실수를 대입하여도 등식이 성립하므로 $0 \cdot x=0$은 항등식이다. 특히 유리수 a, b에 대하여

$$ax+b=0$$

이 항등식이면 임의의 실수 x에 대하여 등식이 성립해야 하므로 $a=0$, $b=0$이어야 한다. 또한 역으로 $a=0$, $b=0$이면 임의의 실수 x에 대하여 $0 \cdot x+0=0$이므로 항등식이 된다. 또한 다음 식을 같은 방법으로 살펴보면

$$ax+b=cx+d$$

에서 동류항을 간단히 하면

$$(a-c)x+(b-d)=0$$

이므로 항등식이 되기 위한 필요충분조건은 $a-c=0$이고 $b-d=0$이다. 즉, $a=c$, $b=d$다. 항등식의 필요충분조건을 정리하면 [정리 1-17]과 같다.

정리 1-17 실수가 포함된 항등식

임의의 실수 x에 대하여 왼쪽에 주어진 식이 항등식이 되기 위한 필요충분조건은 오른쪽과 같다. 이때, a, b, c와 a', b', c'는 유리수다.

항등식	필요충분조건
(1) $ax+b=0$	$a=0$, $b=0$
(2) $ax+b=cx+d$	$a=c$, $b=d$
(3) $ax^2+bx+c=0$	$a=0$, $b=0$, $c=0$
(4) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$	$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

또한 유리수와 무리수로 구성된 식이 항등식이 되기 위한 필요충분조건은 [정리 1-18]과 같다.

정리 1-18 무리수가 포함된 항등식

a, b, c, d가 유리수이고, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ 그리고 $\sqrt{k}$가 무리수일 때, 왼쪽에 주어진 식이 항등식이 되기 위한 필요충분조건은 오른쪽과 같다.

항등식	필요충분조건
(1) $a+b\sqrt{m}=0$	$a=0$, $b=0$
(2) $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$	$a=c$, $b=d$
(3) $a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{k}=0$	$a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$

한편 복소수의 상등을 이용하여 복소수에 대한 항등식을 정리하면 [정리 1-19]와 같다.

정리 1-19 허수가 포함된 항등식

a, b, c, d가 실수일 때, 왼쪽에 주어진 식이 항등식이 되기 위한 필요충분조건은 오른쪽과 같다.

항등식	필요충분조건
(1) $a+bi=0$	$a=0$, $b=0$
(2) $a+bi=c+di$	$a=c$, $b=d$

예제 1-28

다음 항등식을 만족하는 x, y, z를 구하라.

(a) $(x-1+\sqrt{2})+(y-2)\sqrt{2}=0$

(b) $(x+1)+3\sqrt{2}=2+(y-2)\sqrt{2}$

(c) $(x-1)\sqrt{2}+(y-2)\sqrt{3}+(1-x+y+z)\sqrt{5}=0$

(d) $(x-y)+3i=1+(x+y)i$

풀이

(a) 주어진 식을 $\sqrt{2}$에 대하여 정리하면

$$(x-1+\sqrt{2})+(y-2)\sqrt{2}=(x-1)+(y-1)\sqrt{2}=0$$

이므로 $x-1=0$, $y-1=0$ 즉, $x=1$, $y=1$이다.

(b) $(x+1)+3\sqrt{2}=2+(y-2)\sqrt{2}$에서 $x+1=2$, $y-2=3$이므로 $x=1$, $y=5$다.

(c) 주어진 식에서 $x-1=0$, $y-2=0$, $1-x+y+z=0$이어야 하므로 $x=1$, $y=2$, $z=-2$다.

(d) 주어진 식에서 $x-y=1$, $x+y=3$이므로 $x=2$, $y=1$이다.

1.4.2 방정식

항등식에 반하여 식 $1+x=0$에서 0은 덧셈에 대한 항등원이고, 덧셈에 대한 1의 역원이 -1이므로 $x=-1$일 때만 식 $1+x=0$이 성립한다. 그러므로 $1+x=0$은 방정식이고, 이 방정식을 만족하는 특정한 x 값을 방정식의 **근**root 또는 **해**solution라 한다. 즉, 방정식 $1+x=0$의 해는 $x=-1$이다.

이제 방정식 중에서 일차·이차·삼차 방정식의 해법에 대하여 살펴보자. 어떤 상수 a, b에 대하여 방정식 $ax=b$처럼, 방정식의 미지수 x에 대한 최고 차수가 1인 방정식을 **일차방정식**linear equation이라 한다. 일차방정식 $ax=b$는 상수 a, b에 대하여 다음 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

❶ $a \neq 0$인 경우, 일차방정식의 양변에 $\dfrac{1}{a}$을 곱하면 해 $x = \dfrac{b}{a}$를 얻는다.

❷ $a = 0$, $b = 0$인 경우, 주어진 방정식은 $0 \cdot x = 0$이므로 앞에서 언급한 것처럼 항등식이 된다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 등식이 성립한다.

❸ $a = 0$, $b \neq 0$인 경우, 주어진 방정식은 $0 \cdot x = b$이므로 좌변은 0이고 우변은 0이 아닌 실수 b이므로 방정식 $0 \cdot x = b$를 만족하는 x가 존재하지 않는다.

❷와 같이 주어진 방정식이 무수히 많은 해를 가질 때, 이 방정식을 **부정방정식**indeterminate equation이라 하고, 이 경우의 해를 **부정해**indeterminate solution라 한다. 그리고 ❸과 같이 방정식을 만족하는 해가 존재하지 않을 때, 이 방정식을 **불능**impossible이라 한다.

따라서 일차방정식 $ax = b$의 해를 정리하면 [표 1-1]과 같다.

[표 1-1] **일차방정식 $ax = b$의 해**

조건	방정식	해
❶ $a \neq 0$	$ax = b$	$x = \dfrac{b}{a}$
❷ $a = 0$, $b = 0$	$0 \cdot x = 0$	부정해
❸ $a = 0$, $b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	불능해

예제 1-29

방정식 $ax - 2 + x = 0$의 해를 구하라.

풀이

$ax - 2 + x = (a+1)x - 2 = 0$에서 $(a+1)x = 2$이므로 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

(i) $a \neq -1$이면, $x = \dfrac{2}{a+1}$다.

(ii) $a = -1$이면, $0 \cdot x = 2$이므로 이 방정식을 만족하는 해가 존재하지 않는다.

상수 $a(a \neq 0)$, b, c에 대하여 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$과 같이 방정식 안에 포함된 미지수 x의 최고 차수가 2인 방정식을 **이차방정식**quadratic equation이라 한다. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$($a \neq 0$, a, b, c는 상수)의 근을 복소수 범위로 확대하면, 실수인 근과 허수인 근을 갖는 경우가 있다. 이때 실수인 근을 **실근**real root이라 하고, 허수인 근을 **허근**imaginary root이라 한다. 그리고 이차방정식의 근은 다음과 같이 쉽게 인수분해되면 근 $x = p$, $x = q$를 얻을 수 있다.

$$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q)=0$$

예제 1-30

이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 구하라.

풀이

주어진 이차방정식을 인수분해하면

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$$

이므로 $x=3$, $x=-1$이다.

그러나 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$이 쉽게 인수분해 되지 않는다면, 양변을 a로 나누어 다음과 같은 식을 얻는다.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

이제 좌변의 식을 완전제곱식이 되도록 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$을 양변에 더하면

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

를 얻는다. 완전제곱식을 풀어 해를 구하면

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 해

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

를 얻으며, 이것을 **근의 공식**formula of root 이라 한다. 특히 $b=2b'$이면, 즉 이차방정식

$ax^2 + 2b'x + c = 0\,(a \neq 0)$의 해는

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

를 이용할 수 있다. 이때 근호 안의 값에 따라 이차방정식의 근은 다음과 같이 구분된다.

❶ $b^2 - 4ac > 0$이면, 이차방정식은 다음과 같은 **서로 다른 두 실근**을 갖는다.

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

❷ $b^2 - 4ac = 0$이면, 이차방정식은 다음과 같은 동일한 두 실근을 가지며, 이러한 근을 **중근**multiple root이라 한다.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

❸ $b^2 - 4ac < 0$이면, 이차방정식은 다음과 같은 **서로 다른 두 허근**을 가지며, 두 허근은 켤레복소수다.

$$x = \frac{-b - i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a},\quad x = \frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}$$

이와 같이 근호 안의 값에 따라 서로 다른 두 실근, 중근인 실근 그리고 허근으로 분류할 수 있으므로 $D = b^2 - 4ac$를 이차방정식의 **판별식**discriminant이라 한다. 따라서 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$의 해를 정리하면 [표 1-2]와 같다.

[표 1-2] **이차방정식의 판별식**

판별식	해	해의 종류
❶ $D = b^2 - 4ac > 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	서로 다른 두 실근
❷ $D = b^2 - 4ac = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$	중근인 실근
❸ $D = b^2 - 4ac < 0$	$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}$	켤레복소수인 허근

이때, $D > 0$이고 이차방정식의 한 근이 $p + q\sqrt{m}$ 형태의 무리수이면 이차방정식의 다른 한 근은 반드시 $p - q\sqrt{m}$ 형태가 된다.

예제 1-31

근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하라.

(a) $2x^2-3x+1=0$

(b) $x^2-2x+1=0$

(c) $x^2+2x-8=0$

(d) $x^2+2x+4=0$

풀이

(a) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4}$이므로 이차방정식의 해는 서로 다른 두 실근 $x=1$, $x=\dfrac{1}{2}$이다.

(b) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$이므로 이차방정식의 해는 실근인 중근 $x=1$ 이다.

(c) 2차항의 계수가 짝수이므로 $b'=1$이라 하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-8)}}{1}=-1\pm\sqrt{1+8}=-1\pm3$$

이므로 이차방정식의 해는 서로 다른 두 실근 $x=-4$, $x=2$다.

(d) 2차항의 계수가 짝수이므로 $b'=1$이라 하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot4}}{1}=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}\,i$$

이므로 이차방정식의 해는 서로 다른 두 허근 $x=-1-\sqrt{3}\,i$, $x=-1+\sqrt{3}\,i$이다.

이때 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α와 β라 하면, 즉

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이면, 두 근의 합과 곱은

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

가 성립한다. 따라서 이차방정식의 계수를 이용하여 두 근의 합과 곱을 얻을 수 있다.

예제 1-32

이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하라.

(a) $\alpha^2+\beta^2$ (b) $\alpha-\beta$ (c) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ (d) $\alpha^5+\beta^5$

풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-3$이다.

(a) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-3)=10$

(b) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=10-2\cdot(-3)=16$이므로 $\alpha-\beta=-4$ 또는 $\alpha-\beta=4$

(c) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)^3-3\cdot(-3)\cdot(-2)=-26$이므로

$$\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{-26}{-3}=\frac{26}{3}$$

(d) $$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2\\&=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)\\&=10\cdot(-26)-(-3)^2\cdot(-2)=-242\end{aligned}$$

이때 두 근이 모두 양수이면, 즉 $\alpha>0$이고 $\beta>0$이면

$$D\geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$

이다. 또한 두 근이 모두 음수이면, 즉 $\alpha<0$이고 $\beta<0$이면

$$D\geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$$

이다. 그리고 두 근의 부호가 서로 다르면 다음과 같이 두 근의 곱이 음수가 된다.

$$\alpha\beta<0$$

예제 1-33

다음 조건을 만족하는 a의 범위를 구하라.

(a) $x^2-2x+a=0$의 두 근이 모두 양수

(b) $x^2+2ax+a^2-2a+6=0$의 두 근이 모두 음수

(c) $x^2-2x+a=0$의 두 근이 서로 다른 부호

풀이

(a) $D=4-4a \geq 0$, $\alpha+\beta=2>0$, $\alpha\beta=a>0$이므로 $0<a \leq 1$이다.

(b) $D=(2a)^2-4(a^2-2a+6)=8(a-3) \geq 0$, $\alpha+\beta=-2a<0$, $\alpha\beta=a^2-2a+6=(a-1)^2+5>0$이므로 $a \geq 3$이고 $a>0$이다. 그러므로 a의 범위는 $a \geq 3$이다.

(c) $\alpha\beta=a<0$이므로 $a<0$이다.

한편 x에 관한 3차 이상의 방정식을 **고차방정식**equation of higher order이라 하며, 고차방정식은 인수정리 등을 이용하여 인수분해하는 방법으로 근을 구한다. 여기서는 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ($a \neq 0$, a, b, c, d는 실수)의 해법에 대하여 다룰 것이다. 삼차방정식의 근을 살펴보면 다음과 같다.

❶ $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-p)(x-q)(x-r)=0$인 경우, 삼차방정식은 서로 다른 세 실근 $x=p$, $x=q$, $x=r$을 가진다.

❷ $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-p)(x-q)^2=0$인 경우, 삼차방정식은 한 실근과 두 중근 $x=p$, $x=q$(중근)를 가진다.

❸ $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-p)^3=0$인 경우, 삼차방정식은 세 중근인 실근 $x=p$를 가진다.

❹ $ax^3+bx^2+cx+d=(x-p)(ax^2+qx+r)=0$일 때, 이차방정식의 판별식 $D=q^2-4ar<0$인 경우, 삼차방정식은 한 실근과 켤레복소수인 두 허근을 가진다.

특히, 방정식이 허근을 갖는다면 그 허근은 켤레복소수를 근으로 가지므로 삼차방정식의 세 근이 모두 허근이 되는 경우는 나타나지 않는다.

예제 1-34

다음 삼차방정식의 해를 구하라.

(a) $x^3-x^2-4x+4=0$

(b) $x^3+x^2-3x+1=0$

(c) $x^3-3x^2+5x-3=0$

(d) $x^3-6x^2+12x-8=0$

풀이

(a) $A(x)=x^3-x^2-4x+4$라 하면 $A(-2)=0$, $A(1)=0$, $A(2)=0$이므로 인수정리를 이용하면

$$x^3-x^2-4x+4=(x+2)(x-1)(x-2)=0$$

이다. 따라서 구하려는 해는 $x=-2$, $x=1$, $x=2$다.

(b) $A(x)=x^3+x^2-3x+1$이라 하면, $A(1)=0$이므로 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^3+x^2-3x+1=(x-1)(x^2+2x-1)=0$$

이제 $x^2+2x-1=0$의 해를 구하기 위하여 근의 공식을 사용하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$$

이므로 구하고자 하는 해는 $x=1$, $x=-1\pm\sqrt{2}$ 다.

(c) $A(x)=x^3-3x^2+5x-3$이라 하면, $A(1)=0$이므로 인수정리를 이용하면

$$x^3-3x^2+5x-3=(x-1)(x^2-2x+3)=0$$

이다. 이제 $x^2-2x+3=0$의 해를 구하기 위하여 근의 공식을 사용하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 3}}{1}=1\pm\sqrt{2}\,i$$

이고, 구하고자 하는 해는 $x=1$, $x=1\pm\sqrt{2}\,i$이다.

(d) $A(x)=x^3-6x^2+12x-8$이라 하면, $A(2)=0$이므로 인수정리를 이용하면

$$x^3-6x^2+12x-8=(x-2)(x^2-4x+4)=(x-2)^3=0$$

이다. 따라서 주어진 방정식의 해는 삼중근 $x=2$다.

삼차방정식의 특수한 경우인 $x^3=1$의 해를 구하기 위해 식 x^3-1을 인수분해하면 다음과 같다.

$$x^3-1=(x+1)(x^2+x+1)$$

따라서 $x^3=1$의 해, 즉 $x^3-1=0$의 해는

$$x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

이다. 이때 두 허근 $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$와 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 중에서 어느 하나를 ω^{omega}로 나타내면, 나머지 하나는 $\overline{\omega}$로 나타난다. 이때 ω는 $x^3=1$의 해이므로 $\omega^3=1$을 만족할 뿐만 아니라 $x^2+x+1=0$의 해이므로 $\omega^2+\omega+1=0$도 역시 만족한다. 또한 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω와 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계로부터

$$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

이 성립하며, 특히 $\omega^2 = \overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$ 이 성립하는 것을 확인할 수 있다. 즉, $x^3 = 1$의 한 허근 ω는 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 1-20 $x^3 = 1$의 허근 ω의 성질

(1) $\omega^3 = 1$

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(3) $\omega + \overline{\omega} = -1$

(4) $\omega\overline{\omega} = 1$

(5) $\omega^2 = \overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$

(6) $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

(7) $\omega^n = \begin{cases} 1 &, n = 3k \\ \omega &, n = 3k+1 \\ \omega^2 &, n = 3k+2 \end{cases}$ (단, k는 자연수)

Section 1.4 연습문제

1. 다음 항등식을 만족하는 상수 a, b를 구하라.

(a) $(x+1)^2 = (x-2)^2 + a(x+2) + b$

(b) $(a^2-3) + (b-1)\sqrt{2} = 2a + \sqrt{2}$

(c) $2x^2 - 3x - 2 = ax(x-1) + b(x-c)$

(d) $(a+2b) + (b-a)i = 4 - i$

2. x에 관한 방정식 $(a^2-6)x - 2 = a(x+1)$이 무수히 많은 해를 갖기 위한 실수 a의 값을 구하라.

3. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 한 근이 $1-3i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하라.

4. 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하라.

(a) $x^2 + 6x - 16 = 0$

(b) $x^2 + 4x - 4 = 0$

5. 이차방정식 $x^2 - 4x - 6 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하라.

(a) $\alpha^2 + \beta^2$

(b) $\alpha - \beta$

(c) $\dfrac{\beta^2}{\alpha} + \dfrac{\alpha^2}{\beta}$

(d) $\alpha^5 + \beta^5$

6. 다음 고차방정식의 해를 구하라.

(a) $x^3+x-2=0$

(b) $x^3-2x^2+2x+5=0$

(c) $x^4-3x^2+2=0$

(d) $x^4+2x^2+9=0$

7. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 구하라.

(a) $\omega^{14}+\omega^{13}+1$

(b) $1+\omega^{99}+2\omega^{47}+2\omega^{10}$

(c) $\omega^{2013}+\dfrac{1}{\omega^{2013}}$

(d) $\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)+\left(\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}\right)$

8. $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 다음 식의 값을 구하라.

(a) $(\omega+1)+(\omega+1)^2+(\omega+1)^3+(\omega+1)^4+(\omega+1)^5$

(b) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2015}$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b를 구하라.

10. x에 대한 이차방정식 $x^2-2mx+(m-1)(m+2)=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 상수 m의 값 또는 그 값의 범위를 구하라.

(a) 서로 다른 두 실근

(b) 중근

(c) 서로 다른 두 허근

Chapter 01 연습문제

1.1 서로 다른 두 실수 a와 b에 대하여, 두 수 중에서 큰 수를 $\max(a, b)$ 그리고 작은 수를 $\min(a, b)$라 한다. 이때 $0<a<b<c<d<e$에 대하여 다음 값을 구하라.

$$\max(a, \max(\min(b, c), \min(d, \min(a, e))))$$

1.2 $\sqrt{2}$가 유리수가 아니라는 사실을 이용하여 $1+\sqrt{2}$가 유리수가 아닌 것을 보여라.

1.3 집합 $A=\{x \mid x=n^2+m^2,\ n$과 m은 정수$\}$는 어떤 연산에 대하여 닫혀있는지 조사하라.

1.4 집합 $A=\{a+b\sqrt{3} \mid a,\ b\in\mathbb{Q}\}$의 한 원소인 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$의 덧셈에 관한 역원을 $a+b\sqrt{3}$, 곱셈에 관한 역원을 $c+d\sqrt{3}$라 할 때 $a+b+c+d$의 값을 구하라.

1.5 임의의 실수 a에 대하여 a보다 작거나 같은 수 중에서 가장 큰 정수를 $[a]$ 그리고 a보다 크거나 같은 수 중에서 가장 작은 정수를 $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$라 할 때, $\left\langle\!\!\left\langle \left[\frac{4x+15}{x+3}\right]+\frac{x}{3} \right\rangle\!\!\right\rangle=5$를 만족하는 양의 정수 x들의 합을 구하라.

1.6 임의의 두 실수 a와 b에 대하여 $\left|\frac{a+b}{2}-b\right|+\left|\frac{a+b}{2}-a\right|$를 구하라.

1.7 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$, $ab>0$, $a+b<0$일 때, $\sqrt{a^2}+|3b|-|a+3b|$를 구하라.

1.8 $a=1+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{3}$일 때, $b=xa^2+ay$를 만족하는 두 유리수 x와 y를 구하라.

1.9 $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 a, b를 구하라.

1.10 임의의 두 복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)에 대하여 $a\ge c$이고 $b\ge d$일 때, $z_1 \gg z_2$로 나타내기로 하자. 예를 들어, $z_1=3-i$, $z_2=1-2i$이면, $z_1 \gg z_2$이다. 이때 임의의 세 복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$(a, b, c, d, e, f는 실수)에 대하여 다음을 보여라.

(a) 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $z_1 \gg z_2$이고, $z_2 \gg z_1$이면, $z_1=z_2$이다.
(b) 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 $z_1 \gg z_2$이고, $z_2 \gg z_3$이면 $z_1 \gg z_3$이다.
(c) 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 $z_1 \gg z_2$이면 $z_1+z_3 \gg z_2+z_3$이다.

1.11 소수 $z=k(1+i)-3+i$의 제곱에 대하여 다음을 구하라.

(a) z^2이 실수가 되는 실수 k를 구하라.
(b) z^2이 순허수가 되는 실수 k를 구하라.

1.12 $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots+99i^{99}-100i^{100}=a+bi$라고 할 때, $a-b$를 구하라.

1.13 $\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\cdots+\frac{1}{i^{99}}\right)^2$의 값을 구하라.

1.14 복소수 $z=1+2i$일 때, $w=\frac{z-i}{\overline{z}}$에 대하여 $w\overline{w}$를 구하라.

1.15 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족할 때, $\sqrt{c^2}-|a+b|+\sqrt{(a+b+c)^2}$을 구하라.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}},\quad |c|<|a+b|$$

1.16 복소수 z를 입력하면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다고 하자. 이 프로그램에 z를 입력하여 나온 결과를 다시 반복하여 입력하는 과정을 2013번 반복하여 $1-2i$를 얻었을 때 처음에 입력한 복소수 z를 구하라.

1.17 $A=2x^2+xy-y^2-x+y$, $B=x^2+2xy-2y^2+2x+3$, $C=2x^2+y^2-x+2y$에 대하여 $A-(3B-2C)$를 구하라.

1.18 다항식 $(1-2x+3x^2)^2(1+2x-x^2)^2$을 전개했을 때, x와 x^2의 계수를 구하라.

※ 다음 식을 전개하라.

1.19 $(a-b+c)(a+b-c)$

1.20 $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$

※ 다음 식의 값을 구하라.

1.21 $a^2+3a+1=0$일 때, $a^3+\frac{1}{a^3}$

1.22 $a^2-a-1=0$일 때, $a^5-\frac{1}{a^5}$

1.23 인수분해를 이용하여 $2013^2-2014^2-2015^2+2016^2$을 구하라.

1.24 실수 a, b, c에 대하여 $[a, b, c]=(b-a)(b-c)$로 정의할 때, $[2, x, 3]+[x, 2, 2x]$를 인수분해하라.

1.25 $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$를 인수분해하고, 다음 값을 구하라.

$$\sqrt{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43+1}$$

1.26 $a^2-b^2=1$일 때, $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 다음 값을 구하라.

$$\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$$

※ 다음 식을 인수분해하라.

1.27 $(x^2+3x+12)(x^2+3x-2)+49$

1.28 $x^4+x^2y^2+y^4$

1.29 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

1.30 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

1.31 $x^4-3x^3-3x^2+11x-6$

1.32 $2x^4+9x^3+9x^2+4x+12$

1.33 다항식 $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2$를 인수분해했더니 $(ax-y+b)(x-cy-d)$가 되었다면 이때, $a+b+c+d$의 값을 구하라. 단, a, b, c, d는 실수다.

1.34 삼각형 ABC에서 세 변의 길이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$가 다음 식을 만족할 때, 실수 p를 구하고 삼각형 ABC가 어떤 형태의 삼각형인지 구하라.

$$x^2-2bx+(a+c)(a-c)=(x+p)^2$$

1.35 $2x^2-4x-1=0$의 두 근이 α, β일 때 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$, $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$를 두 근으로 갖는 이차방정식을 구하라.

1.36 이차방정식 $x^2-2x+4k^2+2k+1=0$의 두 근의 차가 2일 때, k를 구하라.

1.37 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에 대하여 다음을 구하라.

(a) 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 값을 구하라.
(b) 한 근이 $1+2i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하라.

1.38 x에 대한 이차방정식 $x^2-12x+m^2-6m=0$의 두 근의 비가 $1:3$일 때 m의 값을 구하라. 단, $m>1$이다.

1.39 x에 대한 이차방정식 $x^2-(a^2-3a-4)x-a+2=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 상수 a를 구하라.

1.40 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m-a)x+m^2+a^2-b+1=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 가질 때, 상수 a, b를 구하라.

1.41 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+2a-3=0$의 두 근이 모두 음수일 때 a의 범위를 구하라.

※ 다음 이차방정식을 풀어라.

1.42 $(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)x+2=0$

1.43 $(1+i)x^2-2(1-i)x-(1+i)=0$

1.44 $x^2-2|x|-8=0$

1.45 $x^2+|2x-1|=7$

1.46 유리계수 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 일 때, 이차방정식 $bx^2+ax+b=0$의 두 근의 제곱의 합을 구하라.