Chapter

02

1계 미분방정식

First Order Differential Equations

학습목표

- 물리적 시스템들로부터 미분방정식을 유도하는 과정을 이해함으로써 시스템 모델링에 대한 기초지식을 익힐 수 있다.
- 미분방정식의 가장 기본이 되는 1계 미분방정식을 이해하고, 해를 구할 수 있다.
- 가장 간단한 형태인 상수계수를 갖는 미분방정식의 해를 구하는 방법에 대해 변수분리형 미분방정식, 완전 미분방정식, 적분인자를 이용하는 미분방정식으로 구분하여 이해할 수 있다.
- 베르누이 방정식과 같이 변수계수를 갖는 미분방정식을 푸는 방법을 익힐 수 있다.

우리가 살고 있는 세상은 물리적 또는 화학적 현상, 생물학적 현상, 경제적 현상 등이 모여 있는 커다란 시스템이라고 할 수 있다. 이러한 시스템을 정확히 이해하고 해석하기 위해서는 관련 시스템들에 대한 수학적인 모델을 제시할 수 있어야 한다. 각각의 시스템에 대해 수학적인 모델을 구축하는 것을 수학적 모델링이라 한다. 수학적으로 모델링을 하려면 먼저 필요한 변수들을 정의하고, 정의된 변수에 물리법칙을 적용하여 미분방정식을 유도해야 한다. 이런 시스템에 관련된 변수들은 대부분 시간에 따라 변하기 때문에, 수학적으로 모델링하면 미분방정식으로 표현된다.

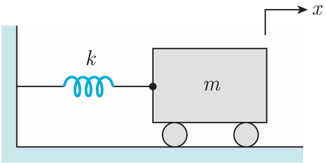
미분방정식은 형태에 따라 분류할 수 있다. 하나의 독립변수로 이루어진 미분방정식은 상미분방정식이라 하고, 두 개 이상의 다변수로 이루어진 방정식은 편미분방정식이라고 한다. 미분방정식의 **계수**는 그 방정식에서 가장 많이 미분된 함수의 미분 횟수로 정의할 수 있고, 미분 횟수에 따라 1계, 2계, 고계 미분방정식 등으로 구분된다. 또한 미분방정식에서 계수가 가장 높은 도함수의 차수에 따라 1계 2차, 2계 3차 미분방정식 등으로 불려진다. 그리고 방정식의 선형성 여부에 따라 선형 미분방정식과 비선형 미분방정식으로 구분하기도 한다.

이 장에서는 미분방정식 중에서 가장 단순한 형태인 1계 선형 상미분방정식을 기준으로 미분방정식의 여러 조건들을 이용하여 해를 구하는 방법에 대해 살펴볼 것이다.

2.1 물리적 시스템과 미분방정식

이 절에서는 물리적인 현상을 수학적으로 모델링하여 미분방정식을 얻는 과정을 살펴볼 것이다.

[그림 2-1]과 같은 그림은 물리 교과서에서 자주 보았을 것이다. 스프링(스프링 상수 k)의 한쪽은 벽에 연결되어 있고, 다른 한쪽에는 질량이 m인 수레가 연결되어 있는 시스템이다.



[그림 2-1] 질량-스프링 시스템

이 시스템을 수학적으로 모델링하려면 어떻게 해야 할까? 먼저 필요한 변수와 **매개변수** parameters를 정의한 뒤, 물리법칙을 적용할 수 있도록 적절한 가정을 해야 한다. 이를 위해 물체의 움직이는 변위를 x라 놓고, 정지 위치로부터 오른쪽 방향의 변위를 양(+)의 변위, 왼쪽 방향의 변위를 음(−)의 변위라 정의하자. 이때 물체와 지면 사이의 마찰을 무시하고, 스프링은 **후크의 법칙**Hooke's law [1]을 적용할 수 있는 **이상적인 스프링**ideal spring이라 가정한다. 그러면 [그림 2-1]의 시스템에 **뉴턴의 제2법칙**Newton's second law [2]을 적용할 수 있고, 식 (2.1)과 같은 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{2.1}$$

여기서 F_i는 질량체 m에 가해진 모든 힘을 나타내며, 이 시스템의 경우 스프링에 의한 힘 kx가 유일한 힘이다. 물론 중력 mg도 존재하지만 그것은 변위 x에 대해 수직 방향으로 작용하기 때문에 x의 변화에 아무런 영향을 미치지 못한다. 따라서 식 (2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2.2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{2.3}$$

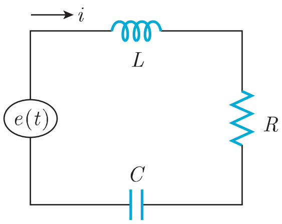
1 **후크의 법칙**
탄성체의 경우, 물체에 하중을 가하면 하중과 변형은 정비례한다.

2 **뉴턴의 제2법칙**
운동하는 물체의 가속도는 힘이 작용하는 방향으로 일어나며, 그 힘의 크기에 비례한다.

식 (2.2)에서 kx 앞에 음의 부호가 붙은 이유는 kx의 작용 방향이 변위 x와 반대 방향, 즉 왼쪽이기 때문이다.

결과적으로 [그림 2-1]의 기계적인 시스템에 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 식 (2.3)의 운동방정식을 유도했다. 식 (2.3)은 미분방정식이고, 선형이며, 도함수의 최고 계수가 2계이므로 2계 선형 미분방정식이다.

이번에는 [그림 2-2]와 같은 전기적인 시스템에 대해 고려해보자.

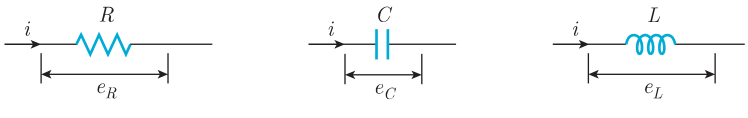


[그림 2-2] $L-R-C$ **시스템**

입력전압을 $e(t)$, **인덕터**inductor의 인덕턴스를 L, **커패시터**capacitor의 커패시턴스를 C, **저항체**resistor의 저항을 R이라 놓고, 회로 내에 전류 i가 시계방향으로 흐른다고 가정하자. 그러면 이 시스템에 **키르히호프 전압법칙**Kirchhoff's voltage law [3]이 적용된다.

3 **키르히호프 전압법칙** 닫힌 전기회로에서 전압의 대수적인 합은 0이다.

전류가 저항체, 커패시터, 인덕터를 통과할 때 발생하는 **전압강하량**voltage drop은 각각 다음과 같다.



$e_R = iR$ $\qquad$ $e_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt$ $\qquad$ $e_L = L\dfrac{di}{dt}$

그 결과 [그림 2-2]는 키르히호프 전압법칙에 따라 다음과 같이 수학적으로 모델링된다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t) \tag{2.4}$$

식 (2.4)는 적분과 미분이 섞여 있는 방정식이다. 이 식을 미분방정식으로 통일시키기 위해서는 전류 i를 전하량 q로 바꾸면 된다. 전류와 전하량 사이에는

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2.5}$$

의 관계가 성립하므로 식 (2.5)를 식 (2.4)에 대입하면

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = e(t) \tag{2.6}$$

이다. [그림 2-2]의 전기적인 시스템은 식 (2.6)과 같이 수학적으로 모델링할 수 있다. 식 (2.6)은 미분방정식이고, 선형이며, 도함수의 최고 계수가 2계이므로 식 (2.3)과 마찬가지로 2계 선형 미분방정식이다.

이 외에도 주변에 존재하는 대부분의 동적인 시스템은 물리적인 법칙들을 사용하여 수학적으로 모델링할 수 있다. 이러한 모델링 식은 위와 같이 미분방정식으로 나타난다. 모델링 식 중에는 식 (2.6)과 같은 2계 선형 미분방정식도 있고, 좀 더 복잡한 고계 미분방정식도 있다. 2장에서는 미분방정식 중에서 가장 간단한 1계 선형 미분방정식의 풀이 과정에 대해 먼저 살펴보고, 3장에서 고계 미분방정식에 대해 살펴보고자 한다.

2.2 변수분리형 미분방정식

1계 선형 미분방정식은 미분방정식 중에서 가장 간단한 형태다. 예를 들어, [그림 2-2]의 시스템에서 인덕터와 커패시터를 제거하면 식 (2.6)으로부터 L항과 C항이 사라지므로 2계 항이 사라지고 시스템은 1계 선형 미분방정식이 된다.

즉 [그림 2-2]의 시스템에서 인덕터와 커패시터를 무시한다면 식 (2.6)은 다음과 같이 간단해진다.

$$R\frac{dq}{dt} = e(t) \tag{2.7}$$

식 (2.7)에 포함된 변수들은 다음과 같이 분리할 수 있다.

$$R\,dq = e(t)\,dt \tag{2.8}$$

식 (2.8)과 같은 유형의 1계 선형 미분방정식은 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 2-1 변수분리형

대수적 방법으로 1계 선형 미분방정식을 $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$와 같은 형태로 표현할 수 있다면, 이러한 미분방정식을 **변수분리형**separation of variables이라 하고, 다음과 같이 쓴다.[4]

$$g(y)\,dy=f(x)\,dx \tag{2.9}$$

4 $\underbrace{g(y)\ dy}_{\text{동일 변수}}=\underbrace{f(x)\ dx}_{\text{동일 변수}}$

변수분리형 미분방정식을 풀기 위해서는 식 (2.9)의 양변을 적분하면 된다.

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C \tag{2.10}$$

예제 2-1 변수분리형

다음 미분방정식을 변수분리법으로 풀어라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(y-1)}{x^2-1}$ (b) $e^x\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}(1+e^x)$

풀이

(a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(y-1)}{x^2-1}$을 변수분리하면 $\dfrac{1}{y-1}dy=\dfrac{x}{x^2-1}dx$이다. 좌변을 적분하면 $\displaystyle\int\frac{1}{y-1}dy=\ln|y-1|$이고, 우변은 치환적분을 사용하여 적분하면 된다. 즉 $x^2-1=t$라 하면 $2x\,dx=dt$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^2-1}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt\\&=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|=\ln(x^2-1)^{1/2}=\ln\sqrt{x^2-1}\end{aligned}$$

이다. 그러면 좌변과 우변이 같으므로 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\ln|y-1|=\ln\sqrt{x^2-1}+C_1$$

$$\ln|y-1|=\ln\sqrt{x^2-1}+\ln C \quad \cdots\cdots ① \ C=e^{C_1}$$

$$\ln|y-1|=\ln C\sqrt{x^2-1}$$

$$y=C\sqrt{x^2-1}+1$$

(b) $e^x\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}(1+e^x)$을 변수분리하면 $e^y\,dy=e^{-x}(1+e^x)dx$이고, 이제 양변을 적분하면

$$\int e^y\, dy = \int (e^{-x}+1)dx$$

이다. 따라서 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$e^y = -e^{-x}+x+C \text{ 또는 } y=\ln(-e^{-x}+x+C)$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y; 1                                         % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U1=dsolve('Dy=x*(y-1)/(x^2-1)','x') 2               % 미분방정식 풀기
>> U2=dsolve('Dy=exp(-y)*(1+exp(x))/exp(x)','x')       % 미분방정식 풀기
```

: 결과

```
U1 = 1+(x-1)^(1/2)*(x+1)^(1/2)*C1                      % [예제 2-1(a)]의 결과와 동일
U2 = log(-1+x*exp(x)+C1*exp(x))-x                      % [예제 2-1(b)]의 결과와 동일
```

MATLAB TIP!

1 'dsolve' : 심볼릭 정의를 생략해도 된다.

2 'dsolve('f','a')'
- f : 미분방정식 입력
- a : 독립변수 지정

이제 초깃값이 주어지는 미분방정식과 관련된 예제를 풀어보자.

예제 2-2 변수분리형 : 초깃값 문제

다음 미분방정식을 변수분리법으로 풀어라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}=xy(y+1) \quad (y(0)=1)$ (b) $x^3\dfrac{dy}{dx}+y^2=0 \quad (y(1)=1)$

풀이

(a) $\dfrac{dy}{dx}=xy(y+1)$을 변수분리하면 $\dfrac{1}{y(y+1)}dy=x\,dx$이다. 우변을 적분하면 $\dfrac{1}{2}x^2+C_1$이고, 좌변은 다음과 같이 적분한다.

$$\int\frac{1}{y(y+1)}dy=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln|y|-\ln|y+1|$$
$$=\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

좌변과 우변이 같으므로

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=\frac{1}{2}x^2+C_1$$

$$\frac{y}{y+1}=Ce^{x^2/2} \quad \cdots\cdots ① \ C=e^{C_1}$$

이고, y에 대해 풀면 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$y = \frac{C\,e^{x^2/2}}{1 - C\,e^{x^2/2}}$$

위 결과에 초깃값 $y(0)=1$을 대입하면 $C=\frac{1}{2}$이 얻어지므로, 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$y = \frac{e^{x^2/2}}{2 - e^{x^2/2}}$$

(b) $x^3\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$을 변수분리하면 $\frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{x^3}dx$이다. 이제 양변을 적분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C_1$$

$$y = \frac{-2\,x^2}{1 + C\,x^2} \qquad \cdots\cdots ② \; C = 2C_1$$

위 결과에 초깃값 $y(1)=1$을 대입하면 $C=-3$이 얻어지므로, 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$y = \frac{-2\,x^2}{1 - 3\,x^2}$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y;                                          % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U1=dsolve('Dy=x*(y*(1+y))','y(0)=1','x') 1         % 미분방정식 풀기
>> U2=dsolve('Dy*x^3+y^2=0','y(1)=1','x')             % 미분방정식 풀기
```

: 결과

```
U1 = 1/(-1+2*exp(-1/2*x^2))                           % [예제 2-2(a)]의 결과와 동일
U2 = 2*x^2/(-1+3*x^2)                                 % [예제 2-2(b)]의 결과와 동일
```

MATLAB TIP!

1 'dsolve('f','a','b')'
: 초깃값이 주어질 때 사용한다.
- f : 미분방정식 입력
- a : 초깃값 입력
- b : 독립변수 지정

예제 2-3 응용 자유낙하

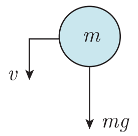
[그림 2-3]과 같이 질량이 m인 공이 자유낙하하고 있다. 공기저항을 무시하고, 공의 속도 v를 시간 t에 대해 나타내라.

풀이

[그림 2-3]의 시스템에 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg \qquad \text{또는} \qquad m\frac{dv}{dt}=mg$$

가 얻어지는데, 이는 변수분리형 미분방정식임을 알 수 있다. m을 소거한 뒤 변수분리법으로 v에 대해 풀면 다음과 같은 결과를 얻는다.



[그림 2-3] 자유낙하

$$dv=g\,dt$$

$$\int dv=\int gdt$$

$$v=gt+C$$

2.3 선형 미분방정식

주어진 미분방정식이 **선형**linear이면 방정식의 차수에 관계없이 해를 구하기가 수월해진다. 이 절에서는 선형 미분방정식으로 표현된 1계 미분방정식의 해를 구해보자.

정의 2-2 선형 미분방정식

1계 미분방정식의 유형이

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x) \tag{2.11}$$

이면, 이를 y에 대한 **선형 미분방정식**linear differential equation이라 한다. 여기서 $f(x)=0$이면 **동차형**homogeneous, $f(x)\neq 0$이면 **비동차형**nonhomogeneous이라 한다.

해를 구하기가 쉬운 동차형에 대해 먼저 살펴보자. 동차형은 2.2절에서 다뤘던 변수분리형과 같다. 따라서 식 (2.11)에서 $f(x)=0$으로 놓고, 변수분리하여 적분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int a(x)dx+C_1$$

$$\ln|y|=-\int a(x)\,dx+C_1$$

$$y=Ce^{-\int a(x)dx} \qquad \cdots\cdots \text{①} C=e^{C_1} \tag{2.12}$$

이때 식 (2.12)는 식 (2.11)의 **일반해** general solution 이다. 이미 2.2절에서 동차형과 유사한 형태의 변수분리형 문제를 풀어보았으나, 한 번 더 연습한다고 생각하고 동차형 선형 미분방정식에 대한 예제도 풀어보자.

예제 2-4 선형 미분방정식 : 동차형

다음 선형 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$　　　(b) $\dfrac{dy}{dx} - y\cos x = 0 \quad (y(0) = 1)$

풀이

Hint • 선형 미분방정식의 유형 : $\dfrac{dy}{dx} + a(x)y = f(x)$

• 동차형 선형 미분방정식의 일반解 : $y = Ce^{-\int a(x)dx}$

(a) 식 (2.12)를 사용하여 $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$을 풀면 $a(x) = 3x^2$이므로 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$y = Ce^{-\int 3x^2 dx} = Ce^{-x^3}$$

(b) $a(x) = -\cos x$이므로

$$y = Ce^{-\int (-\cos x)dx} = Ce^{\sin x}$$

이 얻어지고, 초깃값 $y(0) = 1$을 대입하면 $C = 1$이다. 따라서 초깃값 문제에 대한 특수해는 다음과 같다.

$$y = e^{\sin x}$$

MATLAB 코딩은 2.1절의 변수분리형의 경우와 같으므로 생략한다.

이제 비동차 선형 미분방정식의 해를 구하는 방법을 살펴보자. 동차형의 일반해인 식 (2.12)의 양변에 $e^{\int a(x)dx}$를 곱하면

$$ye^{\int a(x)dx} = C \tag{2.13}$$

가 된다. 식 (2.13)의 양변을 미분하면

$$\frac{dy}{dx}e^{\int a(x)dx} + y\left(e^{\int a(x)dx}\right)' = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{dy}{dx}e^{\int a(x)dx} + y\,a(x)\,e^{\int a(x)dx} = 0$$

① $\left(e^{\int a(x)dx}\right)' = e^{\int a(x)dx}\dfrac{d}{dx}\left[\int a(x)dx\right] = a(x)e^{\int a(x)dx}$

$$\left[\frac{dy}{dx}+a(x)y\right]e^{\int a(x)dx}=0 \tag{2.14}$$

이다. 식 (2.14)의 [ ] 안은 식 (2.11)의 동차형과 같다. 식 (2.14)에 포함되어 있는

$$e^{\int a(x)dx} \tag{2.15}$$

를 선형 미분방정식의 **적분인자**integrating factor라고 한다. 이 적분인자를 사용하여 비동차 선형 미분방정식의 해를 구할 수 있다.

식 (2.15)를 식 (2.11)의 양변에 곱하면

$$\left[\frac{dy}{dx}+a(x)y\right]e^{\int a(x)dx}=f(x)e^{\int a(x)dx} \tag{2.16}$$

이고, 식 (2.16)의 좌변을 변형하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int a(x)dx}\right]=f(x)e^{\int a(x)dx} \tag{2.17}$$

식 (2.17)을 x에 대해 적분한 뒤, y에 대해 풀면

$$\int\frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int a(x)dx}\right]dx=\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx+C$$

$$y\,e^{\int a(x)dx}=\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx+C$$

$$y=e^{-\int a(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx+C\right] \tag{2.18}$$

가 최종적으로 얻어진다. 이때 식 (2.18)이 식 (2.11)의 일반해다.

1계 선형 미분방정식의 풀이 공식

1계 비동차 선형 미분방정식 $\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x)$의 일반해는 다음과 같다.

$$y=e^{-\int a(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx+C\right]$$

이때 C는 적분상수, $e^{\int a(x)dx}$는 적분인자이다.

예제 2-5 선형 미분방정식 : 비동차형

다음 선형 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}+2y=2x$　　　(b) $\dfrac{dy}{dx}-y=x \quad (y(0)=1)$

풀이

(a) $a(x)=2$이므로 적분인자는 $e^{\int 2dx}=e^{2x}$이고, $f(x)=2x$다. 이를 식 (2.18)에 대입하면 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-2x}\left[\int 2x\,e^{2x}\,dx + C\right] \\
&= e^{-2x}\int 2x\,e^{2x}\,dx + Ce^{-2x} \quad \cdots\cdots \text{① 부분적분법에 의해 계산} \\
&= e^{-2x}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)+Ce^{-2x} \\
&= -\frac{1}{2}+x+Ce^{-2x}
\end{aligned}
$$

(b) $a(x)=-1$이므로 적분인자는 $e^{\int(-1)dx}=e^{-x}$이고, $f(x)=x$다. 이를 식 (2.18)에 대입하면 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{x}\left[\int x\,e^{-x}\,dx + C\right] \\
&= e^{x}\int x\,e^{-x}\,dx + Ce^{x} \quad \cdots\cdots \text{② 부분적분법에 의해 계산} \\
&= e^{x}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+Ce^{x} \\
&= -x-1+Ce^{x}
\end{aligned}
$$

여기에 초깃값 $y(0)=1$을 대입하면 $C=2$를 얻는다. 따라서 초깃값 문제에 대한 특수해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y=-x-1+2e^{x}$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y;                                 % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U1=dsolve('Dy+2*y=2*x','x')               % 미분방정식 풀기
>> U2=dsolve('Dy-y=x','y(0)=1','x')          % 미분방정식 풀기
```

: 결과

```
U1 = -1/2+x+exp(-2*x)*C1                     % [예제 2-5(a)]의 결과와 동일
U2 = -1-x+2*exp(x)                           % [예제 2-5(b)]의 결과와 동일
```

모든 미분방정식이 선형이면 앞에서 설명한 선형 미분방정식의 풀이법에 따라 풀면 된다. 그러나 일반적으로 미분방정식은 비선형이다. 그렇다면 비선형을 선형으로 변환하는 것이 가능할까? 간혹 어떤 비선형 미분방정식은 변수를 변환하여 비선형을 선형으로 바꿀 수 있기도 하다. 이 중 가장 유명한 것이 **베르누이[5] 방정식**으로, 다음과 같은 형태를 취한다.

5 Jakob Bernoulli (1654 ~ 1705) 스위스 수학자로서 '변분법'이란 계산 방법을 만들어 근대수학에 큰 공헌을 했다.

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x)y^n \qquad (2.19)$$

여기서 n은 임의의 상수이며, $n=0$이거나 $n=1$이면 식 (2.19)는 선형이고, 그 밖의 경우에는 비선형이 된다. 비선형을 선형으로 바꾸기 위해

$$u = y^{1-n}$$

으로 놓으면

$$u' = (1-n)y^{-n}y'$$

이고, 식 (2.19)의 y'을 위 식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} u' &= (1-n)y^{-n}\left[f(x)y^n - a(x)y\right] \\ &= (1-n)f(x) - (1-n)a(x)y^{1-n} \\ &= (1-n)f(x) - (1-n)a(x)u \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{du}{dx} + (1-n)a(x)u = (1-n)f(x) \qquad (2.20)$$

가 된다. 식 (2.20)은 식 (2.11)의 선형 미분방정식과 같은 유형이다.

예제 2-6 비선형 미분방정식

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3y^2$$

풀이

주어진 식은 $n=2$인 베르누이 방정식이다. $u = y^{1-n} = y^{-1}$으로 놓으면

$$u' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{x}y + x^3y^2\right) = \frac{1}{x}\frac{1}{y} - x^3 = \frac{1}{x}u - x^3$$

이므로

$$u' - \frac{1}{x}u = -x^3$$

이고, 이는 선형 미분방정식이다. 따라서 식 (2.18)을 이용하여 미분방정식의 해 u를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int(-x^3)e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx + C\right] \\ &= e^{\ln x}\left[\int(-x^3)e^{-\ln x}dx + C\right] \qquad \cdots\cdots \text{①}\ e^{\ln x} = x \\ &= x\left[\int(-x^3)\frac{1}{x}dx + C\right] \\ &= x\left[-\frac{1}{3}x^3 + C\right] \\ &= -\frac{1}{3}x^4 + Cx \end{aligned}$$

$u = y^{-1}$을 대입하여 y의 해를 구하면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$y = \frac{3}{3Cx - x^4}$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y;                              % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U=dsolve('Dy+y/x=x^3*y^2','x')         % 미분방정식 풀기
```

: 결과

```
U = -3/x/(x^3-3*C1)                       % [예제 2-6]의 결과와 동일
```

2.4 완전 미분방정식

이변수 함수 $z = f(x, y)$를 고려해보자. $z = f(x, y)$가 연속적인 편도함수라면 이 함수의 **전미분** total differential 은 다음과 같다.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.21}$$

만약 $f(x, y)$가 상수 C이면,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.22}$$

이다. 예를 들어 $f = x^2 - xy + y^2 = C$가 주어지면

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$$

이므로, 역으로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

와 같은 미분방정식을 구할 수 있다. 따라서 전미분 개념은 1계 미분방정식인

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

과 같은 유형의 해를 구할 때 매우 유용하게 쓰인다.

정의 2-3 완전 미분방정식

1계 미분방정식

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.23}$$

에 대해

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

를 만족하는 함수 $f(x, y)$가 존재하면, 그 함수의 전미분은 $df(x, y) = 0$이고, $f(x, y) = C$는 식 (2.23)의 일반해다. 이때 $M\,dx + N\,dy$를 **완전미분**exact differential이라 하고, 식 (2.23)을 **완전 미분방정식**exact differential equation이라 한다.

정리 2-1 완전미분 조건

M, N, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$가 연속이라면 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$이 완전 미분방정식이 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.24}$$

증명 [정의 2-3]에 의하면

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

이므로, 다음과 같이 편도함수를 취할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

위 식을 정리하면

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y),\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

…… ① 편도함수는 도함수를 취하는 독립변수의 순서와 무관하다.

이다. 따라서 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$ ■

예제 2-7 완전 미분방정식

다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $(2xy+1)dx+x^2dy=0$

(b) $(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \quad (y(1)=1)$

풀이

(a) $M(x,y)=2xy+1$, $N(x,y)=x^2$이라 놓으면

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

이 성립하므로, $(2xy+1)dx+x^2dy=0$은 완전 미분방정식이다. 따라서

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

를 만족하는 함수 $f(x, y)$가 존재한다. 그러면

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy + 1$$

이므로, 위 식을 x에 관해 적분하여

$$\int \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx = \int (2xy + 1) dx$$

$$f(x, y) = x^2 y + x + g(y) \quad \cdots\cdots ①$$

① x에 관한 적분은 y를 상수로 간주하므로 적분상수가 $g(y)$이다.

를 구한다. 이제 $f(x, y)$를 y에 대해 편미분하면,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

이고, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = x^2$이므로

$$x^2 + g'(y) = x^2, \quad g'(y) = 0, \quad g(y) = C_1$$

이다. 식 ①에 의하면 $f(x, y) = x^2 y + x + C_1$이며, $f(x, y) = C$이므로 $C - C_1 = C$라 놓으면 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$f(x, y) = x^2 y + x = C \quad \text{또는} \quad y = \frac{-x + C}{x^2}$$

(b) $M(x, y) = x^2 + y^2$, $N(x, y) = 2xy$라 놓으면

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

이 성립하므로, $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$은 완전 미분방정식이다. 따라서

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

를 만족하는 함수 $f(x, y)$가 존재한다. 그러면

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x^2 + y^2$$

이므로, 위 식을 x에 관해 적분하여

$$\int \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx = \int (x^2 + y^2) dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 x + g(y)$$

를 구한다. 이제 $f(x,y)$를 다시 y에 대해 편미분하면

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2xy+g'(y)$$

이고, $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=2xy$이므로

$$2xy+g'(y)=2xy,\quad g'(y)=0,\quad g(y)=C_1$$

이다. 이때 $f(x,y)=C$이므로 미분방정식의 일반해는 다음과 같다. 여기서도 적분상수 C의 처리는 (a)와 유사하다.

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y^2x=C$$

초깃값 $y(1)=1$을 대입하면 다음과 같이 상수 C를 구할 수 있다.

$$C=\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2(1)=\frac{4}{3}$$

따라서 구하고자 하는 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\frac{1}{3}x^3+y^2x=\frac{4}{3}\qquad \text{또는}\qquad y=\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y;                                     % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U1=dsolve('x^2*Dy+2*x*y+1=0','x')             % 미분방정식 풀기
>> U2=dsolve('x^2+y^2+2*x*y*Dy=0','y(1)=1','x')  % 미분방정식 풀기
```

: 결과

```
U1 = -(x-C1)/x^2                                 % [예제 2-7(a)]의 결과와 동일
U2 = 1/3/x*(-3*x*(x^3-4))^(1/2)                  % [예제 2-7(b)]의 결과와 동일
```

일반적으로 미분방정식이 완전 미분방정식인 경우는 드물다. 이러한 경우에 미분방정식에 적분인자를 곱하여 완전 미분방정식으로 만들 수 있는 경우가 있다. 예를 들어, 미분방정식 $y\,dx+2x\,dy=0$은 $\frac{\partial M}{\partial y}=1$이고 $\frac{\partial N}{\partial x}=2$이므로 완전 미분방정식이 아니다. 그러나 방정식에 y를 곱하면 $y^2\,dx+2xy\,dy=0$은 $\frac{\partial M}{\partial y}=2y=\frac{\partial N}{\partial x}$이므로 완전 미분방정식이 된다. 일반적으로 $M(x,y)\,dx+N(x,y)dy=0$이 완전 미분방정식이 아니라고 가정하고, 방정식

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2.25)$$

을 완전 미분방정식으로 만들기 위한 적분인자 $\mu(x,y)$를 찾는 것이 가능할 때가 종종 있다. 식 (2.25)가 완전 미분방정식이 되기 위해서는 식 (2.24)를 여전히 만족해야 하므로

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)]$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) = \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}N(x,y)$$

$$N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]\mu(x,y) \qquad (2.26)$$

가 된다. 식 (2.26)에서 $\mu(x,y)$를 구하려면 미분방정식을 풀어야 하는데, 풀기가 쉽지 않다. 문제를 간단히 만들기 위해 적분인자 $\mu(x,y)$가 x만의 함수라고 가정하면, 식 (2.26)은 다음과 같이 된다.[6]

6 $\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = 0$

$$N(x,y)\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]\mu(x)$$

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \qquad (2.27)$$

식 (2.27)의 좌변이 x만의 함수이므로 우변도 x만의 함수로 간주하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = k(x) \qquad (2.28)$$

식 (2.28)을 변수분리법에 의해 풀면 다음과 같이 적분인자를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = k(x)dx$$

$$\int \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = \int k(x)dx$$

$$\ln \mu(x) = \int k(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{\int k(x)\,dx} \qquad (2.29)$$

여기서

$$k(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \tag{2.30}$$

이다. 한편, $\mu(x, y)$가 y만의 함수라고 가정하면 같은 방법으로 적분인자를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu(y) = e^{\int k(y)\,dy} \tag{2.31}$$

여기서

$$k(y) = -\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \tag{2.32}$$

이다.

예제 2-8 완전 미분방정식으로 변환

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$(x^2 + x + y^2)\,dx + 2y\,dy = 0$$

풀이

$M = x^2 + x + y^2$, $N = 2y$로 놓으면

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

이므로 완전 미분방정식이 아니다. 그러므로 완전 미분방정식으로 만들기 위한 적분인자를 구하는 것이 필요하다. 식 (2.30)으로부터

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \\ &= \frac{1}{2y}(2y - 0) = 1 \end{aligned}$$

이므로, 적분인자는 식 (2.29)에 의해

$$\mu(x) = e^{\int k(x)dx} = e^{\int (1)dx} = e^x$$

이다. 주어진 미분방정식에 적분인자 e^x을 곱하여 완전 미분방정식

$$e^x(x^2 + x + y^2)\,dx + 2e^x y\,dy = 0$$

을 얻는다. 이제 [예제 2-7]과 유사한 방법으로 미분방정식의 해를 구하면 된다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x(x^2+x+y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = 2e^x y$$

로 놓고, $\frac{\partial f}{\partial x}$를 x에 관해 적분하면

$$f(x,y) = \int e^x(x^2+x+y^2)dx = x^2e^x - xe^x + e^x + y^2e^x + g(y) \quad \cdots\cdots ①$$

① $\int x^2e^x dx$: 부분적분을 2회 반복하여 구한다.

가 되고, $f(x,y)$를 다시 y에 관해 편미분하여 N과 같다고 놓으면

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2ye^x + g'(y) = 2ye^x$$

이다. 따라서 $g'(y)=0$, $g(y)=C_1$이고, 함수 $f(x,y)=C$를 만족하는 함수 $f(x,y)$는 다음과 같다.

$$f(x,y) = x^2e^x - xe^x + e^x + y^2e^x = C$$

위 식을 y에 관하여 풀면 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$y = \pm\sqrt{-1+x-x^2+Ce^{-x}}$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms x y;                                         % x, y 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U=dsolve('x^2+y^2+x+2*y*Dy=0','x') 1              % 미분방정식 풀기
```

: 결과

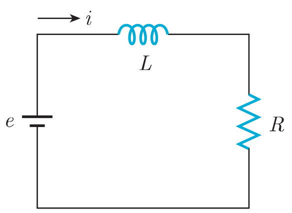
```
U = -(-1+x-x^2+exp(-x)*C1)^(1/2)
    (-1+x-x^2+exp(-x)*C1)^(1/2)                      % [예제 2-8]의 결과와 동일
```

MATLAB TIP!

1 $(x^2+x+y^2)dx + 2ydy = 0$으로부터 $x^2+x+y^2+2y\frac{dy}{dx} = 0$

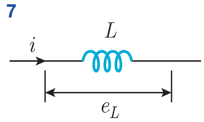
예제 2-9 응용 *RL* 전기회로

[그림 2-4]와 같은 전기회로를 고려해보자. 입력전압 $e=10\text{V}$, $L=2\text{H}$, $R=4\Omega$이다. 시간 $t=0$일 때 전류가 0A(암페어)였다면, 0.2초 뒤의 전류는 몇 A인가?

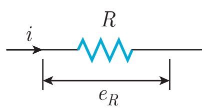


[그림 2-4] *RL* 전기회로[7]

7



전압강하 $e_L = L\frac{di}{dt}$



전압강하 $e_R = iR$

풀이

[그림 2-4]는 [그림 2-2]의 전기회로에서 커패시턴스 C가 빠진 회로이다. [그림 2-2]로부터 유도된 식 (2.4)의 미분방정식에서 C항을 소거하면 [그림 2-4]에 대한 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$L\frac{di}{dt}+Ri=e$$

매개변수 값, $L=2\mathrm{H}$, $R=4\Omega$, $e=10\mathrm{V}$와 초깃값 $i(0)=0$을 위 식에 대입하면 미분방정식은

$$2\frac{di}{dt}+4i=10 \qquad (i(0)=0)$$

이고, 이는 변수분리형 미분방정식임을 알 수 있다. 따라서 변수분리하여 적분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{di}{dt}=5-2i, \qquad \frac{di}{5-2i}=dt$$

$$\int\frac{di}{5-2i}=\int dt, \qquad -\frac{1}{2}\ln|5-2i|=t+C_1 \qquad \cdots\cdots ① \int\frac{1}{b-ax}dx=-\frac{1}{a}\ln|b-ax|$$

$$5-2i=Ce^{-2t} \qquad \cdots\cdots ② \ C=e^{-2C_1}$$

초깃값 $i(0)=0$을 대입하면 $C=5$이다. 그러므로 전류는

$$i=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}e^{-2t}$$

이다. 따라서 $t=0.2$일 때 구하고자 하는 전류는 다음과 같다.

$$i(0.2)=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}e^{-2(0.2)}\approx 0.82 \ [\mathrm{A}]$$

Command Window

: 코딩

```
>> syms i t;                                       % i, t 변수에 대한 심볼릭 정의
>> U1=dsolve('2*Di+4*i=10','i(0)=0','t') 1         % 미분방정식 풀기
>> U2=5/2-5/2*exp(-2*0.2)                          % 초깃값 t=0.2 대입
```

: 결과

```
U1 = 5/2-5/2*exp(-2*t)                             % [예제 2-9]의 결과와 동일
U2 = 0.8242                                        % [예제 2-9]의 결과와 동일
```

MATLAB TIP!

1 'dsolve('f','a','b')'에서 독립변수 b가 시간 t일 경우에는 'dsolve('f','a')'도 가능

dsolve 명령어

dsolve 명령어는 **상미분방정식**ordinary differential equations의 심볼릭 해를 구할 때 사용하는 명령어이다. 여기서 'dsolve'의 문자 'd'는 differentiation을 나타낸다. dsolve('eqn1', 'eqn2', …)는 독립변수를 t로 하여 미분방정식 'eqn1', 'eqn2', … 의 해를 구해준다. 물론 미분방정식들은 심볼릭 미분방정식도 포함한다. 이때에는 미분방정식의 해에 적분상수 C_1, C_2, … 등이 포함되어 나타난다. 미분방정식의 독립변수를 't'에서 다른 변수로 바꾸고자 할 때에는 입력항의 마지막 위치에 바꾸고자 하는 변수를 첨가해주면 된다. 예를 들면, 독립변수 't'를 'x'로 바꾸려면 dsolve('eqn', 'x')와 같이 하면 된다. 미분방정식의 계수order에 따라 미분방정식의 표현방법도 바뀌게 된다. 미분방정식('eqn')을 나타낼 때, 1계 도함수는 'Dy', 2계 도함수는 'D2y', 3계 도함수는 'D3y' 등과 같이 문자 'D' 다음에 도함수의 계수order에 해당하는 숫자를 첨가함으로써 모든 계수의 도함수에 대한 표현이 가능하다. 예를 들면, 'D2y'는 d^2y/dt^2을 의미한다. 또한, 초깃값이 주어지는 미분방정식의 경우에는 'y(a1) = b1', 'Dy(a2) = b2', … 등과 같이 입력항에 삽입해주면 된다. 그러면 미분방정식의 해에 적분상수들이 사라지게 된다. 이상에서 설명한 내용들에 대해 간단한 예들을 참고하기 바란다.

Command Window

```
>> U = dsolve('Dx=-a*x') ↵                % 1계 선형 미분방정식, 독립변수 t
U =
     C1*exp(-a*t)

>> U = dsolve('Dx=-a*x','x(0)=1','s') ↵   % 초깃값 문제, 독립변수 s
x =
     exp(-a*s)

>> y=dsolve('D2y = -a^2*y') ↵             % 2계 선형 미분방정식
y =
    C1*sin(a*t)+C2*cos(a*t)

>> y=dsolve('D2y = -a^2*y', 'y(0) = 1, Dy(pi/a) = 0') ↵
                                          % 2계 선형 미분방정식의 초깃값 문제
y =
    cos(a*t)

>> U=dsolve('D2y-4*y=sin(x)','x') ↵       % 비동차형 2계 미분방정식
U =
    exp(2*x)*C2+exp(-2*x)*C1-1/5*sin(x)

>> [f, g] = dsolve('Df=f+g', 'Dg=-f+g', 'f(0)=1', 'g(0)=2') ↵
                                 % 연립 미분방정식의 초깃값 문제, 독립변수 t
f =
    exp(t)*cos(t)+2*exp(t)*sin(t)
g =
    -exp(t)*sin(t)+2*exp(t)*cos(t)
```

Chapter 02 연습문제

2.1 **(변수분리형)** 다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx}+(x+1)y^2=0$ (b) $\dfrac{dy}{dx}-x(1+y^2)=0$

(c) $\dfrac{dy}{dx}-ye^x=0$ (d) $\dfrac{dy}{dx}+2y-xy=0$

(e) $\dfrac{dy}{dx}+2y-xy=0$ (f) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}+x-2=0$

(g) $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}+2\cos x=0$ (h) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{y+1}-\dfrac{2x}{y}=0$

(i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln x$ (j) $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$

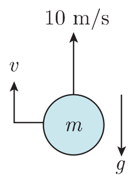
(k) $\dfrac{dy}{dx}+2y-xy=0$ (l) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}\cos x=0$

(m) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}=y^2-y \quad (y(1)=2)$ (n) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{y}=0 \quad (y(0)=-2)$

(o) $y\dfrac{dy}{dx}+x-1=0 \quad (y(1)=1)$ (p) $\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}-1 \quad (y(0)=1)$

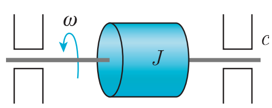
(q) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2} \quad (y(1)=2)$ (r) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2+x} \quad (y(0)=1)$

2.2 응용 **(변수분리형)** 오른쪽 그림과 같이 질량이 m인 공을 초속도 10m/s로 바로 위쪽으로 던졌다. 이때 공기저항과 같은 모든 저항을 무시하면 뉴턴의 제2법칙에 의해 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다. 1초가 지났을 때의 공의 속도를 구하라. 여기서 g는 중력가속도로 9.8m/s^{2}이다.



$$m\frac{dv}{dt}=-mg$$

2.3 응용 **(변수분리형)** 오른쪽 그림은 양 끝단이 베어링에 의해 지지되어 ω의 각속도로 회전하는 로터rotor를 보여주고 있다. 이 로터의 관성모멘트moment of inertia가 J이고, 로터와 베어링 사이의 마찰계수가 c이면, 로터에 관한 운동방정식이 뉴턴의 제2법칙에 의해 아래와 같이 얻어진다. 로터의 초기 각속도가 $\omega(0)=\omega_0$일 때, 로터의 회전 각속도 $\omega(t)$를 구하라.



$$J\frac{d\omega}{dt}+c\omega=0 \qquad (\omega(0)=\omega_0)$$

2.4 **(선형 미분방정식)** 다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - y = x \quad (y(0) = 1)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 1 \quad (y(0) = 1)$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+x}{x} \quad (y(0) = 1)$

(d) $\dfrac{dy}{dx} - y = x + 2 \quad (y(0) = 2)$

(e) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$

(g) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{x^2 - 4}y = 0$

(h) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = e^{-x}$

(i) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x^2y^2$

(j) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}y^2$

2.5 **(완전 미분방정식)** 다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $(2x + y^2)dx + 2xydy = 0$

(b) $(2xy + y)dx + (x^2 + 1)dy = 0$

(c) $(x-1)dx + (y+1)dy = 0$

(d) $(4x + y)dx + (x - 4y)dy = 0$

(e) $(2e^x + 2y)dx + (2x + ye^{-y})dy = 0$

(f) $(x^2 + y^2)dx + (2xy + 1)dy = 0$

(g) $-y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0 \quad (y(0) = 1)$

(h) $y^2dx + 2(xy + 1)dy = 0 \quad (y(0) = 1)$

2.6 **(완전 미분방정식으로 변환)** 다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $(y^2 + 2x)dx + 2xy\,dy = 0$

(b) $y(x+2)dx + 2xdy = 0$

(c) $(y+1)dx - (x+1)dy = 0$

(d) $2y\,dx + xdy = 0$

(e) $xy\,dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$

(f) $x^2y^3dx + 2x^3y^2dy = 0$

(g) $(x^2 + y^2)dx + y\,dy = 0 \quad (y(0) = 2)$

(h) $xdx + (x^2y + y)dy = 0 \quad (y(0) = 2)$

2.7 응용 **(*RC* 회로)** 오른쪽 그림과 같이 주어진 RC 전기회로에 대해 입력전압 $e = 10\text{V}$, 커패시턴스 $C = 0.5\text{F}$, 저항 $R = 4\Omega$이다. 시간 $t = 0$일 때 전하량 $q(0) = 0$이었다면, 0.2초 후의 전하량은 얼마인가?