

03

전달함수와 상태방정식

Transfer Functions and State Equations

전달함수 _3.1

블록선도 _3.2

신호흐름선도 _3.3

상태방정식 _3.4

핵심요약

연습문제

학습목표

- 모델링의 개념을 이해할 수 있다.
- 전달함수의 정의를 이해하고, 간단한 물리시스템의 전달함수를 구할 수 있다.
- 블록선도를 그리는 방법을 이해하고, 블록선도의 등가변환을 구할 수 있다.
- 신호흐름선도를 그리는 방법을 이해할 수 있다.
- 메이슨의 이득공식을 이용하여 전체 전달함수를 구할 수 있다.
- 상태변수와 상태방정식이 무엇인지 알 수 있다.
- 미분방정식으로 나타낸 시스템의 상태방정식을 구할 수 있다.



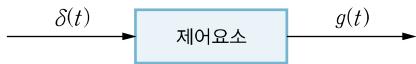
1장에서 설명한 바와 같이 제어란 어떤 시스템이 목표한 동작을 제대로 수행하도록 시스템을 조절하는 것이다. 이때 시스템에 어떤 입력을 가하면 어떤 출력이 나오는지를 알아야 한다. 따라서 제어시스템을 해석하고 설계할 때, 제어시스템 각 요소의 입출력 관계를 수식적으로 표현하는 일은 매우 중요하다. 이를 제어시스템의 모델링modeling이라고 하고, 모델링을 통해 얻은 수식적 표현을 제어시스템의 모델model이라고 한다.

모델링에서 가장 기본이 되는 것은 물리적인 법칙이다. 예를 들어, 기계시스템의 모델링에서는 기본적으로 뉴턴의 법칙이 적용되며, 전기회로망의 모델링에서는 옴의 법칙과 키르히호프의 법칙이 적용된다. 이들 법칙은 미분방정식으로 표현되는데, 미분방정식은 차수order가 커지면 그 해를 구하기가 어려우므로 입출력 관계를 직관적으로 파악하기 어렵다. 따라서 제어시스템에서는 사용하기 편리하도록 입출력 관계를 라플라스 변환으로 나타내는 전달함수법과 고차 미분방정식을 상태방정식이라고 하는 1차 연립 미분방정식으로 표현하는 상태공간기법을 사용한다. 이 장에서는 전달함수법과 상태공간기법으로 시스템을 모델링하는 데 필요한 전달함수와 상태방정식에 대하여 살펴보고자 한다.

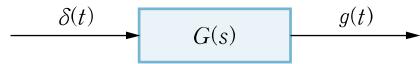
3.1 전달함수

어떤 제어요소에 단위임펄스함수를 입력으로 인가할 때 얻는 출력을 **임펄스응답 impulse response**이라고 한다. 일반적으로 [그림 3-1]과 같이 단위임펄스함수는 $\delta(t)$, 임펄스응답은 $g(t)$ 로 표시한다. 이때 임펄스응답의 라플라스 변환을 그 요소의 **전달함수 transfer function**라고 한다. 따라서 이 제어요소의 전달함수는 [그림 3-2]와 같이 임펄스응답을 라플라스 변환한 $G(s)$ 가 된다.

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$$



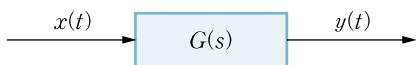
[그림 3-1] 임펄스응답

[그림 3-2] 제어요소의 전달함수 $G(s)$ 표시

예를 들어, [그림 3-3]과 같이 전달함수가 $G(s)$ 인 제어요소에 식 (3.1)과 같은 입력 $x(t)$ 를 가하면 출력 $y(t)$ 는 식 (3.2)가 된다.

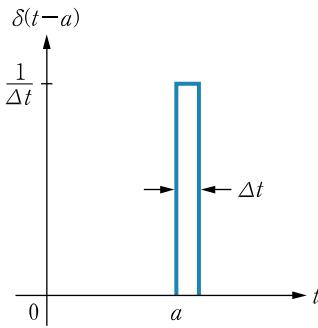
$$x(t) = 4\delta(t) + 2\delta(t-5) + 0.3\delta(t-10) \quad (3.1)$$

$$y(t) = 4g(t)u_s(t) + 2g(t-5)u_s(t-5) + 0.3g(t-10)u_s(t-10) \quad (3.2)$$

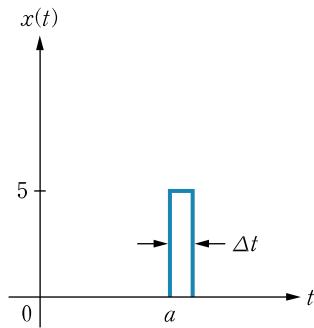
[그림 3-3] 전달함수가 $G(s)$ 인 제어요소

단위임펄스함수는 크기는 대단히 크지만 시간 폭은 대단히 작은 [그림 3-4]와 같은 함수이므로 식 (3.1)의 $4\delta(t)$ 는 크기가 단위임펄스함수의 4배가 되는 함수를 의미한다. 이제 [그림 3-5]와 같이 크기가 5인 **펄스함수 pulse function**를 생각해보자. 펄스함수는 시간 폭은 단위임펄스함수처럼 대단히 작지만, 함수의 크기가 무한히 크지 않다. 그러나 펄스함수도 시간 폭이 대단히 작다는 점에서 단위임펄스함수와 유사하므로 입력 $x(t)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = 5\Delta t \delta(t-a) \quad (3.3)$$



[그림 3-4] 단위임펄스함수



[그림 3-5] 펄스함수

따라서 [그림 3-3]의 제어요소에 [그림 3-5]의 펄스함수를 입력으로 가하면 출력 $y(t)$ 는 다음과 같다.

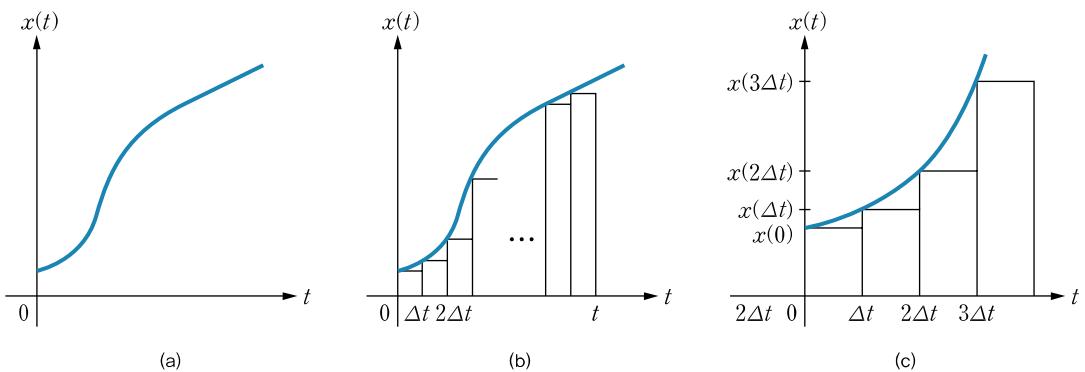
$$y(t) = 5\Delta t g(t-a) u_s(t-a) \quad (3.4)$$

이제 [그림 3-3]의 제어요소에 [그림 3-6(a)]와 같은 입력 $x(t)$ 를 인가할 때 출력 $y(t)$ 를 구해보자. 이때 입력 $x(t)$ 는 [그림 3-6(b)]와 같이 펄스의 합으로 바꾸어 생각할 수 있다. 이러한 펄스들은 [그림 3-6(c)]와 같이 크기가 다음과 같은 펄스들로 나타낼 수 있다.

$$x(0)\Delta t, x(\Delta t)\Delta t, x(2\Delta t)\Delta t, x(3\Delta t)\Delta t, \dots$$

이때 제어요소가 $G(s)$ 이므로 입력 $x(0)\Delta t \delta(t)$ 이면 출력은 $x(0)\Delta t g(t) u_s(t)$, 입력이 $x(\Delta t)\Delta t \delta(t-\Delta t)$ 이면 출력이 $x(\Delta t)\Delta t g(t-\Delta t) u_s(t-\Delta t)$ 이다. 또한 입력으로 $x(2\Delta t)\Delta t \delta(t-2\Delta t)$ 를 인가하면 출력이 $x(2\Delta t)\Delta t g(t-2\Delta t) u_s(t-2\Delta t)$ 가 된다. 이러한 출력을 합하면 출력 $y(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(t) &\doteq x(0)\Delta t g(t) u_s(t) + x(\Delta t)\Delta t g(t-\Delta t) u_s(t-\Delta t) \\ &\quad + x(2\Delta t)\Delta t g(t-2\Delta t) u_s(t-2\Delta t) \dots \end{aligned}$$



[그림 3-6] 입력 $x(t)$ 를 펄스로 분해

(a) 입력 $x(t)$ (b) 입력 $x(t)$ 를 펄스의 합으로 분해 (c) 확대한 펄스 표시

$t < 0$ 일 때 $g(t) = 0$ 으므로 출력을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &\doteq x(0)\Delta t g(t) + x(\Delta t)\Delta t g(t - \Delta t) + x(2\Delta t)\Delta t g(t - 2\Delta t) + \dots \\
 &\quad \cdots + x(t - \Delta t)\Delta t g\{t - (t - \Delta t)\} \\
 &= x(0)g(t)\Delta t + x(\Delta t)g(t - \Delta t)\Delta t + x(2\Delta t)g(t - 2\Delta t)\Delta t + \dots \\
 &\quad \cdots + x(t - \Delta t)g\{t - (t - \Delta t)\}\Delta t \\
 &= \sum_{\tau=0}^{\tau=(t-\Delta\tau)} x(\tau)g(t - \tau)\Delta\tau
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

식 (3.5)는 $\lim \Delta\tau \rightarrow 0$ 일수록 더욱 정확하므로 출력 $y(t)$ 는 다음과 같다.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

식 (3.6)의 양변을 라플라스 변환하면 식 (3.7)을 얻을 수 있다([정리 2-6]의 합성곱정리). 앞의 유도 과정은 조금 복잡하므로 생략해도 좋지만, 이 결과 식은 대단히 중요하므로 잘 기억하고 있기를 권한다.

$$Y(s) = G(s) X(s) \tag{3.7}$$

전달함수를 구하는 방법

지금까지 논의한 이야기를 정리하면, 전달함수가 $G(s)$ 인 제어요소에 입력 $x(t)$ 를 가했을 때 출력 $y(t)$ 를 구하는 순서는 다음과 같다.

- ❶ 입력 $x(t)$ 의 라플라스 변환 $X(s)$ 를 구해 전달함수 $G(s)$ 에 곱하여 식 (3.7)과 같이 출력 $y(t)$ 의 라플라스 변환 $Y(s)$ 를 구한다.

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

- ❷ 구한 $Y(s)$ 를 다음과 같이 역변환하여 출력 $y(t)$ 를 얻는다.

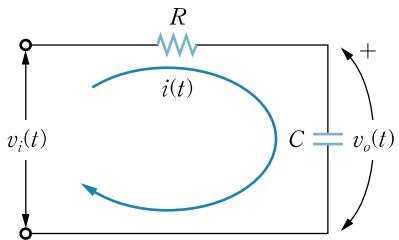
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)] \tag{3.8}$$

위에서 언급한 방법과는 달리 식 (3.7)을 이용하여 출력의 라플라스 변환을 입력의 라플라스 변환으로 나눈 값으로 전달함수를 정의하기도 한다. 이때 모든 초기 조건은 0이라고 가정한다. 여기에서 모든 초기 조건을 0으로 한다는 것은 그 제어요소에 입력을 하기 전, 즉 $t < 0$ 에서는 그 요소가 쉬고 있는 상태 initially at rest 였다는 것을 의미한다. 일반적으로 어떤 제어요소의 전달함수를 구할 때, ‘입력의 라플라스 변환에 대한 출력의 라플라스 변환’ 방법을 주로 사용한다.

이제 선형시스템의 간단한 제어요소에 대한 전달함수를 구해보자.

예제 3-1 RC 직렬회로망의 전달함수

[그림 3-7]과 같은 RC 직렬회로망에서 $v_i(t)$ 를 입력 전압으로, $v_o(t)$ 를 출력 전압으로 하는 전달함수 $G(s)$ 를 구하라.



[그림 3-7] RC 직렬회로망

풀이

이 회로망의 입력 전압과 출력 전압의 미분방정식은

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (3.9)$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (3.10)$$

이므로, 식 (3.9)와 식 (3.10)의 라플라스 변환을 구하면

$$V_i(s) = RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} \quad (3.11)$$

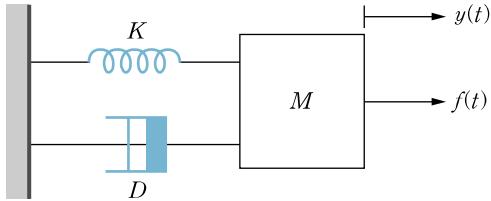
$$V_o(s) = \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} \quad (3.12)$$

이다. 따라서 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (3.13)$$

예제 3-2 기계시스템의 전달함수

[그림 3-8]과 같은 기계시스템에서 입력 $f(t)$ 에 대한 변위 $y(t)$ 를 출력으로 할 때, 이 시스템의 전달함수 $G(s)$ 를 구하라.



[그림 3-8] 기계시스템의 구성

풀이

이 시스템의 힘의 방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + D \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (3.14)$$

식 (3.14)의 라플라스 변환을 구하면

$$M \{s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\} + D \{s Y(s) - y(0)\} + K Y(s) = F(s)$$

이고, 이때 모든 초기 조건을 0으로 가정하면

$$\begin{aligned} M s^2 Y(s) + D s Y(s) + K Y(s) &= F(s) \\ \{Ms^2 + Ds + K\} Y(s) &= F(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

가 된다. 따라서 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} \quad (3.16)$$

만일 어떤 시스템의 미분방정식이 다음과 같을 때

$$5 \frac{d^3}{dt^3} c(t) + 3 \frac{d^2}{dt^2} c(t) - 4 \frac{dc(t)}{dt} + 2 c(t) = 10 \frac{dr(t)}{dt} + 7 r(t) \quad (3.17)$$

라플라스 변환을 구하고, 모든 초기 조건을 0으로 가정하면

$$(5s^3 + 3s^2 - 4s + 2) C(s) = (10s + 7) R(s) \quad (3.18)$$

이므로, 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 7}{5s^3 + 3s^2 - 4s + 2}$$

지금까지 제어공학을 공부하는 데 가장 중요한 전달함수에 대하여 설명하였다. 지금까지는 하나의 제어요소에 대한 전달함수를 다루었지만, 제어시스템을 모델링할 때는 전체 시스템을 몇 개의 작은 시스템을 분해하여 각각의 전달함수를 구한 후 결합한다. 이때 각각의 작은 시스템을 하나의 블록으로 나타낸다. 따라서 전체 제어시스템의 전달함수를 구하기 위해서는 블록선도를 알아야 한다.

3.2 블록선도

제어시스템은 여러 가지 요소의 결합으로 구성되며, 제어시스템 내의 각 요소 사이의 신호 전달 모양은 블록선도^{block diagram}를 사용하여 표시한다. 다시 말해, 블록선도란 제어시스템에서 신호가 전달되는 모양을 나타내는 방법이다. 제어시스템을 블록선도로 표시하는 이유는 각 요소의 역할에 대한 물리적인 개념이나 전체 제어시스템에서 그들의 상호 관계를 파악할 때 미분방정식보다 훨씬 효과적이다.

3.2.1 블록선도 표기법

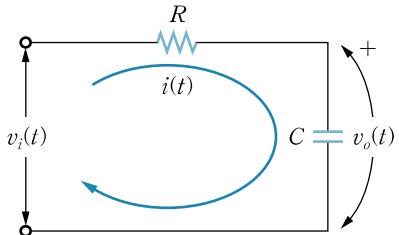
제어시스템의 블록선도는 단방향성^{unidirectional}의 블록들로 구성된다. 블록들은 선도의 경로를 따라 입력과 출력 사이의 관계를 알 수 있도록 각 요소의 동작 특성 및 신호의 흐름을 나타낸다. 이때 블록선도를 간단히 나타내기 위해 블록 간 신호의 흐름을 나타낼 때는 선을 하나만 긋는다. 또한 제어시스템의 에너지원이 무엇이든 표시하는 방법은 [표 3-1]과 같이 네 개의 구성 단위만 사용한다.

[표 3-1] 블록선도의 구성 단위

종류	기호	연산
신호		화살표 방향으로만 전달
전달요소		$C(s) = G(s)R(s)$
가산점		$Y(s) = X(s) \pm Z(s)$
인출점		$X(s) = Y(s) = Z(s)$

예제 3-3 블록선도

[그림 3-9]와 같은 전기회로망에서 $v_i(t)$ 를 입력 전압으로, $v_o(t)$ 를 출력 전압으로 하는 블록선도를 그려라.



[그림 3-9] 전기회로망

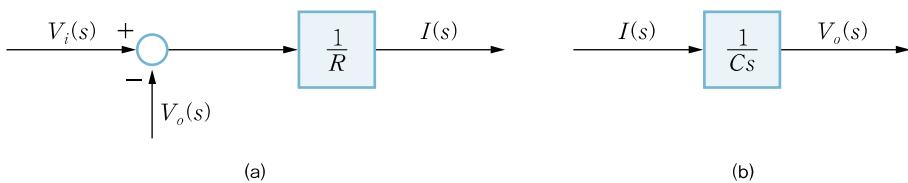
풀이

저항 R 에 흐르는 전류와 콘덴서에 걸리는 전압을 각각 구하면

$$i(t) = \frac{1}{R} \{v_i(t) - v_o(t)\} \rightarrow I(s) = \frac{1}{R} \{V_i(s) - V_o(s)\} \quad (3.19)$$

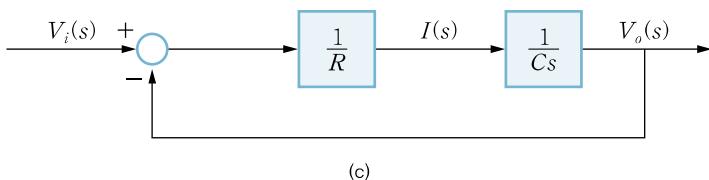
$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \rightarrow V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (3.20)$$

이다. 식 (3.19)에서 블록선도에 가산점이 필요함을 알 수 있다. 이를 식을 이용하여 블록선도를 그리면 [그림 3-10]과 같다.



(a)

(b)

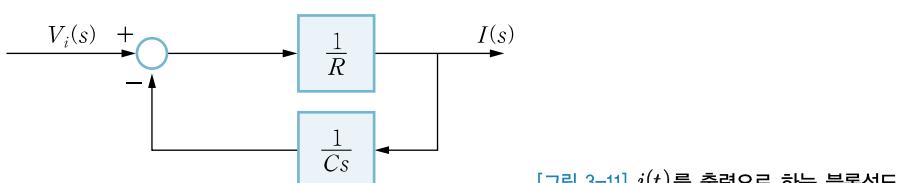


(c)

[그림 3-10] $v_o(t)$ 를 출력으로 하는 블록선도

(a) 저항 R 에 흐르는 전류 (b) 콘덴서 C 에 걸리는 전압 (c) 전체 시스템

위의 블록선도에서는 출력을 $v_o(t)$ 로 했으나, 만일 출력을 $i(t)$ 로 한다면 블록선도는 [그림 3-11]과 같다.



[그림 3-11] $i(t)$ 를 출력으로 하는 블록선도

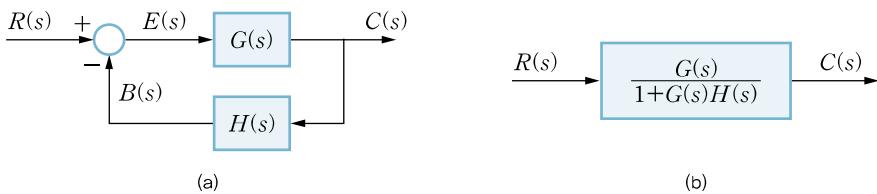
3.2.2 블록선도의 등가변환

제어시스템을 해석하고 전체 전달함수를 구하기 위해서는 먼저 제어시스템의 신호전달 경로를 블록선도로 표시하고, 그 다음에 해석하기 편하도록 블록선도를 정리해야 한다. 이때 사용하는 몇 가지 중요한 블록선도의 등가변환 법칙을 정리하면 [표 3-2]와 같다.

[표 3-2] 블록선도의 등가변환

번호	블록연산	블록선도	등가블록선도
1	교환	$X \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow Y$	$X \rightarrow G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow Y$
2	직결결합	$X \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow Y$	$X \rightarrow G_1 \cdot G_2 \rightarrow Y$
3	병렬결합	$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ G_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \rightarrow Y$ $\begin{array}{c} \\ \downarrow \\ G_2 \end{array}$	$X \rightarrow G_1 + G_2 \rightarrow Y$
4	가산점을 앞으로 이동	$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ G \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \rightarrow Y$ $Z \quad \text{---} \quad \downarrow$	$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \rightarrow G \rightarrow Y \\ Z \rightarrow \frac{1}{G} \end{array}$
5	가산점을 뒤로 이동	$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \rightarrow G \rightarrow Y \\ Z \quad \text{---} \quad \downarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} X \rightarrow G \rightarrow \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \rightarrow Y \\ Z \rightarrow G \end{array}$
6	인출점을 앞으로 이동	$X \rightarrow G \rightarrow Y$ $Z \quad \text{---} \quad \downarrow$	$\begin{array}{c} X \rightarrow G \rightarrow Y \\ Z \rightarrow G \end{array}$
7	인출점을 뒤로 이동	$X \rightarrow G \rightarrow Y$ $Z \quad \text{---} \quad \downarrow$	$\begin{array}{c} X \rightarrow G \rightarrow Y \\ Z \rightarrow \frac{1}{G} \end{array}$

[표 3-2]에 없으나 대단히 중요한 귀환결합 블록선도의 등가변환에 대하여 알아보자.



[그림 3-12] 귀환결합 블록선도의 등가변환

(a) 귀환결합 블록선도 (b) 등가변환 블록선도

[그림 3-12(a)]의 블록선도를 살펴보면

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) \\ C(s) &= G(s) E(s) \end{aligned} \tag{3.21}$$

이다. 이때 $B(s) = H(s) C(s)$ 이므로

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s) C(s) \\ C(s) &= G(s) E(s) = G(s) \{R(s) - H(s) C(s)\} \end{aligned}$$

가 된다. 이를 정리하면

$$\begin{aligned} C(s) + G(s) H(s) C(s) &= G(s) R(s) \\ \{1 + G(s) H(s)\} C(s) &= G(s) R(s) \end{aligned}$$

이므로, $C(s)$ 는 다음과 같다.

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} R(s) \tag{3.22}$$

따라서 식 (3.22)에 의해 블록선도를 다시 그리면 [그림 3-12(b)]와 같다. [그림 3-12(a)]는 귀환제어시스템의 기본 블록선도를 나타낸다. 여기에서 전달함수를 구하면

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)}$$

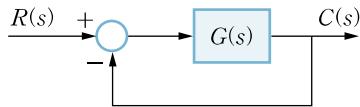
이다. 전달함수를 정리하면 다음과 같다.

- 전향경로 전달함수 feed forward transfer function : $G(s)$

- 개루프 전달함수 open-loop transfer function : $G(s) H(s)$

- 폐루프 전달함수 closed-loop transfer function : $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)}$

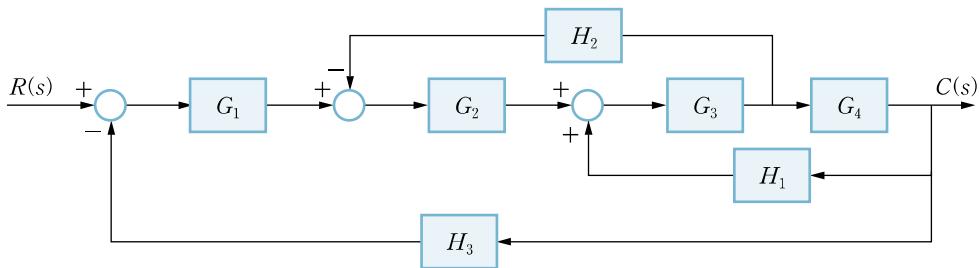
[그림 3-12(a)]와 같이 어떤 제어시스템을 하나의 귀환 요소에 의한 귀환 제어시스템으로 표시한 것을 표준형 canonical form이라고 하고, [그림 3-13]과 같이 귀환 요소의 전달함수 $H(s) = 1$ 인 제어시스템을 특별히 단위귀환제어시스템 unity feedback control system 또는 직결귀환제어시스템 direct feedback control system이라고 한다.



[그림 3-13] 단위귀환제어시스템

예제 3-4 블록선도의 등가변환

[그림 3-14]와 같이 복잡한 귀환 제어시스템의 전체 페루프 전달함수를 구하라.



[그림 3-14] 복잡한 귀환제어시스템

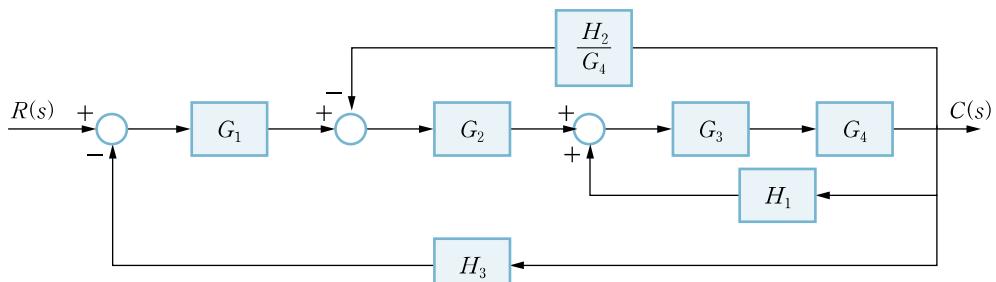
풀이

다음과 같은 순서로 페루프 전달함수 $M(s)$ 를 구한다.

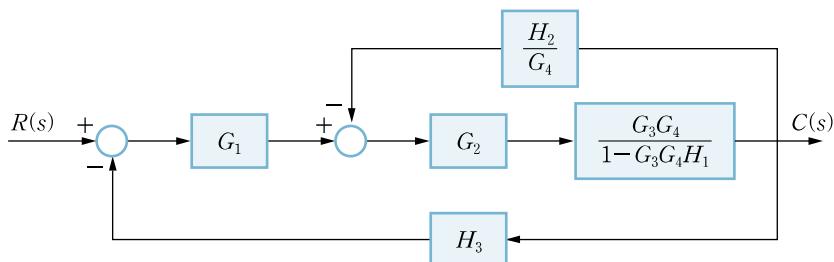
- ① 블록선도를 간단히 하기 위하여 G_3 과 G_4 사이의 인출점을 G_4 의 뒤로 이동시키면 [그림 3-15(a)]와 같다.
- ② 페루프 $G_3G_4H_1$ 을 간단히 하면 [그림 3-15(b)]와 같다.
- ③ 귀환 요소 $\frac{H_2}{G_4}$ 를 포함시켜 다시 간략화하면 [그림 3-15(c)]와 같은 표준형을 얻을 수 있다.
- ④ 전체 페루프 전달함수를 구하면

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_1}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2} \times H_3} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3} \end{aligned}$$

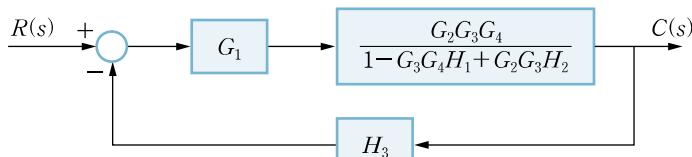
이고, 블록선도로 나타내면 [그림 3-15(d)]와 같다.



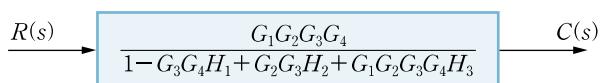
(a)



(b)



(c)



(d)

[그림 3-15] [예제 3-4]의 블록선도 등가변환

3.3 신호흐름선도

귀환제어시스템의 도식적 표현 방법으로 가장 널리 사용되는 것은 블록선도다. 그러나 블록선도는 제어시스템을 구성하고 있는 요소의 상호 관계를 이해하는 데에는 편리하나 수식적으로 취급할 때는 불편하다. 따라서 수식적으로 취급하기 편한 메이슨^{S. J. Mason}의 신호흐름선도를 사용한다. 신호흐름선도는 선형 대수방정식의 변수 사이의 입출력 관계를 나타내는 일종의 도식적 방법이다.

3.3.1 신호흐름선도의 정의

두 변수 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 가 다음과 같이 표현되는 경우를 생각해보자.

$$x_2(t) = a_{21} x_1(t) \quad (3.23)$$

식 (3.23)은 두 변수(또는 신호) 사이의 인과관계를 나타낸다. 이 식에서 a_{21} 은 [그림 3-16(a)]와 같이 $x_1(t)$ 를 $x_2(t)$ 로 사상시키는 수학적 연산자 mathematical operator로서, $x_1(t)$ 를 입력하면 $x_2(t)$ 가 출력되는 입출력 관계를 나타내고, 이득 또는 전송함수 transmission function라고 한다. 식 (3.23)의 관계를 신호흐름선도로 표시하면 [그림 3-16(a)]와 같다.



[그림 3-16] 간단한 신호흐름선도

이때 주의할 점은 $x_1(t)$ 가 입력되면 $x_2(t)$ 의 신호가 발생하지만, [그림 3-16(b)]처럼 $x_2(t)$ 에 의하여 $x_1(t)$ 가 생기지는 않는다는 사실이다. 그러나 수학적으로는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_1 = \frac{1}{a_{21}} x_2 \quad (3.24)$$

식 (3.24)는 입력 $x_1(t)$ 과 출력 $x_2(t)$ 의 양적인 관계를 나타내는 표현으로 받아들일 수 있으나, 식 (3.24)에 의해 [그림 3-16(a)]를 [그림 3-16(b)]와 같이 변형하여 그릴 수는 없다.

[그림 3-16(a)]에서 원으로 표시한 점을 마디^{node}라고 하고, 화살표로 마디를 이은 선을 가지^{branch}라고 한다. 즉, 신호흐름선도^{signal-flow graph}는 제어량이나 신호를 원(마디)으로, 전달함수를 화살표(가지)로 변형하여 표시하는 방법이다. 모든 가지는 단방향성이며 화살표의 방향으로만 신호가 전달된다. 일반적으로 변수나 이득은 라플라스변환으로 표시되는 경우가 많다. 그러나 반드시 그렇게 표시할 필요는 없으며 시간함수로 표시하기도 한다. 예를 들어, 다음 식들을 생각해보자.

$$x_2(t) = 5x_1(t) \quad (3.25)$$

$$x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) \quad (3.26)$$

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(t) dt \quad (3.27)$$

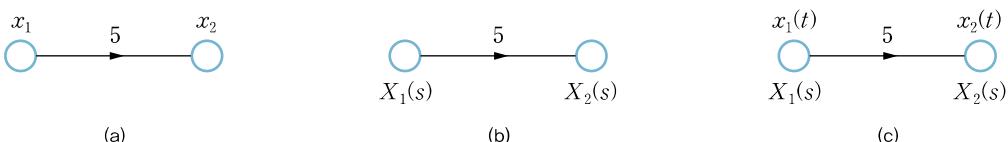
위의 세 식에 대한 신호흐름선도를 그리기 위해 각각의 라플라스 변환을 구해보자. 단, 모든 초기 조건은 0으로 가정한다.

$$X_2(s) = 5X_1(s) \quad (3.28)$$

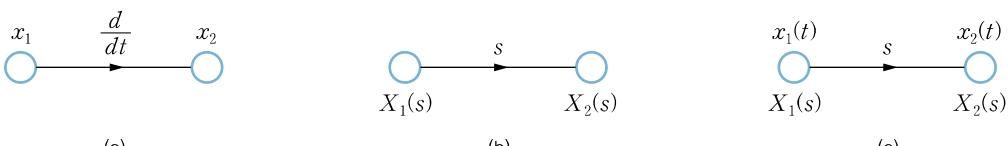
$$X_2(s) = s X_1(s) \quad (3.29)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s} X_1(s) \quad (3.30)$$

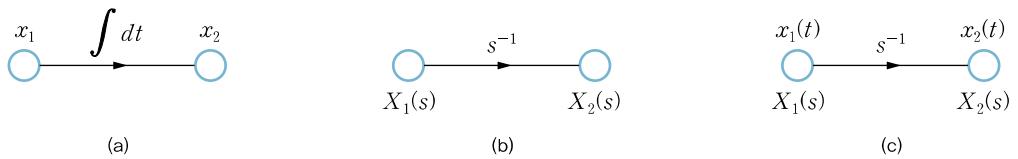
각각의 신호흐름선도는 [그림 3-17], [그림 3-18], [그림 3-19]와 같다. 각각의 그림마다 (a), (b), (c)와 같은 세 종류의 신호흐름선도가 있으나, 보통 (c)처럼 사용하는 경우가 많다. 또한 [그림 3-19(c)]에서 변수 $x_2(t)$ 는 변수 $x_1(t)$ 를 적분한 것으로, 다시 말해서 변수 $x_1(t)$ 는 변수 $x_2(t)$ 를 미분한 값과 같다는 사실을 알 수 있다.



[그림 3-17] $x_2(t) = 5x_1(t)$ 의 신호흐름선도



[그림 3-18] $x_2(t) = \frac{1}{s} x_1(t)$ 의 신호흐름선도



[그림 3-19] $x_2(t) = \int_0^t x_1(t) dt$ 의 신호흐름선도

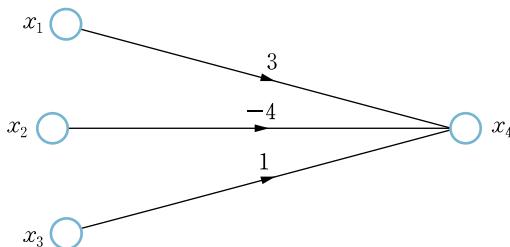
3.3.2 신호흐름선도의 기본 법칙

신호흐름선도를 그리거나 해석하는 데 필요한 몇 가지 기본 법칙에 대하여 살펴보자.

더하기 법칙

신호흐름선도에서 마디로 표시되는 변수의 값은 그 마디로 들어가는 모든 신호의 합과 같다. 따라서 [그림 3-20]을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_4 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \quad (3.31)$$



[그림 3-20] 신호흐름선도의 더하기 법칙

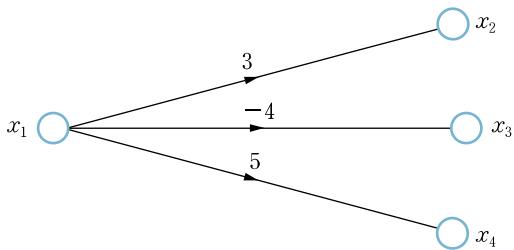
전송 법칙

어떤 한 마디에서 여러 마디로 신호가 전달될 때, 신호 크기는 한 마디에서 다른 한 마디로 각각 전송될 때와 똑같다. 따라서 [그림 3-21]을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_2 = 3x_1 \quad (3.32)$$

$$x_3 = -4x_1 \quad (3.33)$$

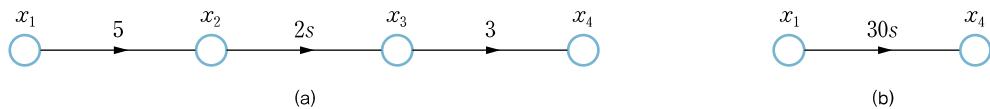
$$x_4 = 5x_1 \quad (3.34)$$



[그림 3-21] 신호흐름선도의 전송 법칙

곱하기 법칙

여러 개의 가지가 종속접속 cascade connection 되어 있을 때 가지의 이득을 각각 구하여 곱하면 하나의 이득을 갖는 가지로 나타낼 수 있다. 예를 들어, [그림 3-22(a)]와 같이 여러 가지가 종속접속된 경우는 [그림 3-22(b)]와 같이 하나의 가지로 그릴 수 있다.

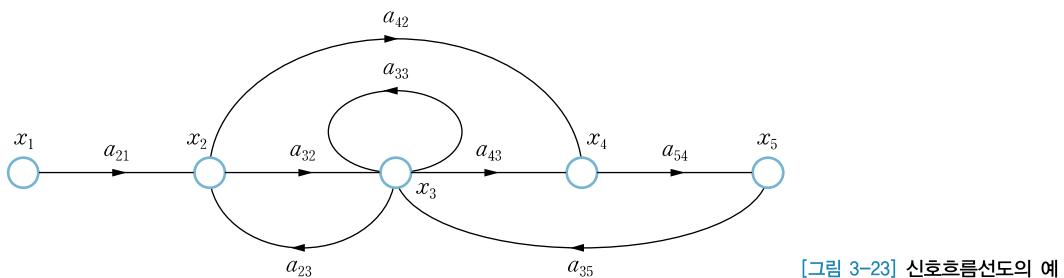


[그림 3-22] 신호흐름선도의 곱하기 법칙

(a) 여러 개의 가지가 종속접속된 경우 (b) 하나의 가지로 그린 경우

3.3.3 신호흐름선도의 용어 정리

신호흐름선도에서는 몇 가지 용어가 자주 쓰이므로 다음에 소개하는 용어는 숙지해두길 바란다.



■ 경로

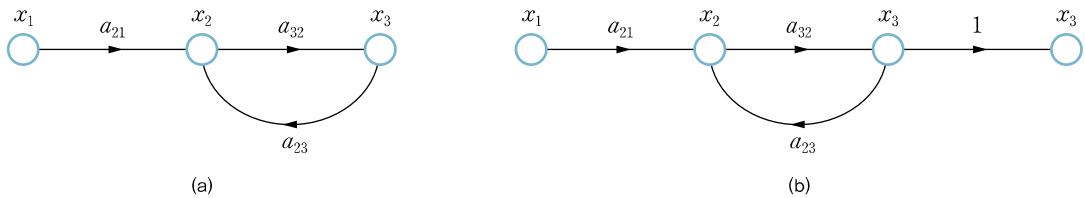
경로 path는 같은 마디를 두 번 이상 지나가지 않으면서 화살표 방향을 따라 연속으로 이어지는 것이다. [그림 3-23]를 살펴보면 신호 x_1 에서 가지 a_{21} 을 거쳐 신호 x_2 로 가는 경로가 있고, 신호 x_2 에서 가지 a_{32} 를 거쳐 신호 x_3 로 가는 경로가 있다. 또한 가지 a_{43} 을 거쳐 신호 x_4 를 지나 x_5 까지 가는 경로가 있으며, 신호 x_2 에서 가지 a_{32} 를 거쳐 신호 x_3 을 지나서 가지 a_{23} 을 거쳐 다시 신호 x_2 로 돌아오는 경로도 있다.

■ 입력마디

입력마디^{input node}는 다른 마디에서 신호를 받지 않고 신호를 다른 마디로 보내기만 하는 마디로, [그림 3-23]에서는 x_1 이 입력마디가 된다.

■ 출력마디

출력마디^{output node}는 다른 마디에서 신호를 받기만 하고 보내지는 않는 마디로, [그림 3-23]에서는 출력마디가 없다. 그러나 만약 신호 x_5 를 출력하고 싶을 때는 같은 신호 이름을 갖는 마디를 하나 더 만들어 이득 1로 이으면 된다. 예를 들어, [그림 3-24(a)]의 블록선도는 출력 마디가 없다. 그러나 신호 x_3 를 출력으로 나타내고 싶다면 [그림 3-24(b)]와 같이 수정하면 된다.



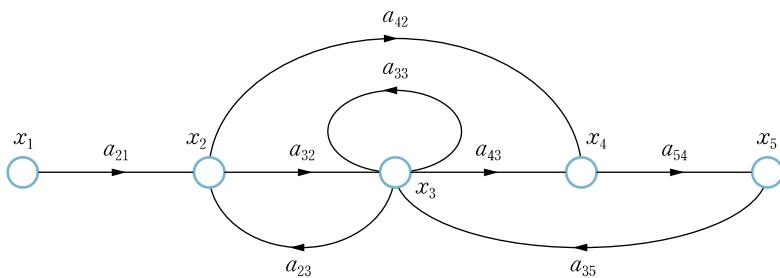
[그림 3-24] 출력마디 표시 방법

(a) 출력마디가 없는 신호흐름선도 (b) 출력마디가 있는 신호흐름선도

다만, 다른 설명이나 수식에서 x_3 이 출력이라는 것이 명백히 드러나 있는 경우에는 수정하지 않고 [그림 3-24(a)]를 그대로 사용한다. [그림 3-24(a)]의 신호흐름선도에서 변수 x_3 을 출력 신호로 하고 싶을 때, 다시 말해 x_3 을 출력마디로 하고 싶을 때는 [그림 3-24(b)]와 같이 변경시키는 것이 좀 더 확실한 표현 방법이다.

■ 전향경로

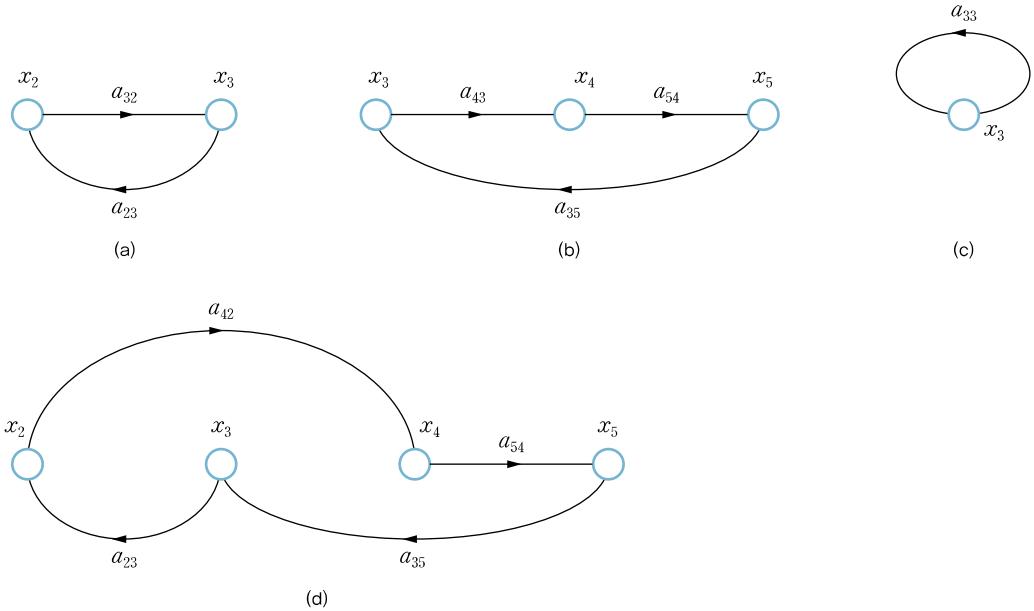
전향경로 forward path는 입력마디에서 시작하여 출력마디에서 끝나는 경로다. [그림 3-25]에서는 경로 $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ 와 경로 $x_1 - x_2 - x_4 - x_5$ 로 두 개의 전향경로가 있다.



[그림 3-25] 신호흐름선도의 예

■ 귀환루프

귀환루프 feedback loop는 어떤 마디에서 시작하여 그 마디에서 끝나는 경로로, 단순하게 루프 loop라고도 한다. [그림 3-25]의 귀환루프들을 나타내면 [그림 3-26]과 같다. 이들 귀환루프 중에서 가지가 하나뿐인 루프, 즉 [그림 3-26(c)]처럼 마디 x_3 와 가지 a_{33} 로만 만들어지는 루프를 자기루프 self loop라고 한다.



[그림 3-26] [그림 3-25]의 귀환루프들

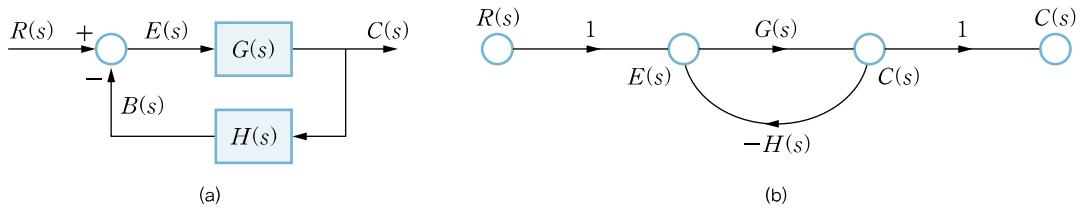
■ 경로이득

전향경로이득, 루프이득 등 경로를 이루는 가지의 모든 이득을 곱한 것을 경로이득 path gain이라 한다. 전향경로 또는 루프의 이득을 곱하여 얻은 것을 각각 전향경로이득, 루프이득이라고 한다. [그림 3-25]에서 전향경로이득은 $a_{21} a_{32} a_{43} a_{54}$ 와 $a_{21} a_{42} a_{54}$ 이다.

3.3.4 신호흐름선도의 구성

선형귀환 제어시스템의 신호흐름선도는 그 제어시스템의 블록선도가 있다면 블록선도를 이용하여 간단히 구할 수 있다. 즉, 블록선도의 각 신호들을 마디로 하고 요소의 블록을 가지로 그리면 된다. [그림 3-27(a)]와 같은 블록선도는 [그림 3-27(b)]와 같이 신호흐름선도로 쉽게 변형된다.

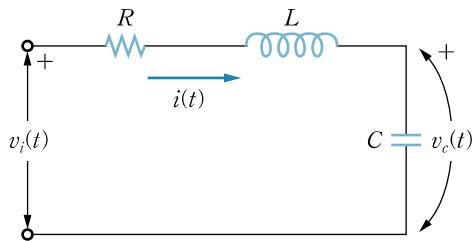
그러나 블록선도는 전달함수에 기초하므로 초기 조건이 0이어야 하지만, 신호흐름선도는 초기 조건이 반드시 0일 필요는 없다.



[그림 3-27] 블록선도를 이용하여 신호흐름선도 그리기

(a) 블록선도 (b) 신호흐름선도

[그림 3-28]과 같은 RLC 직렬회로망을 생각해보자.



[그림 3-28] RLC 직렬회로망

o] 회로망에 대한 미분방정식을 세우면 다음과 같다.

$$L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) = v_i(t) - v_c(t) \quad (3.35)$$

$$C \frac{d}{dt} v_c(t) = i(t) \quad (3.36)$$

위 두 식의 라플라스 변환을 구하여 정리하면

$$L \{s I(s) - i(0)\} + R I(s) = V_i(s) - V_c(s) \quad (3.37)$$

$$C \{s V_c(s) - v_c(0)\} = I(s) \quad (3.38)$$

$$s I(s) = i(0) + \frac{1}{L} V_i(s) - \frac{R}{L} I(s) - \frac{1}{L} V_c(s) \quad (3.39)$$

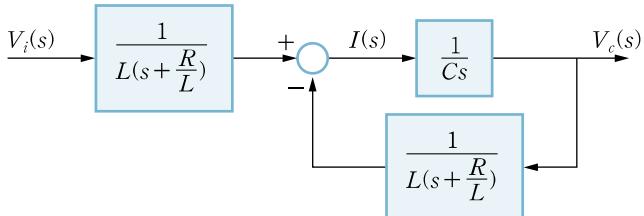
$$s V_c(s) = v_c(0) + \frac{1}{C} I(s) \quad (3.40)$$

o이고, 식을 다시 정리하면 다음과 같다.

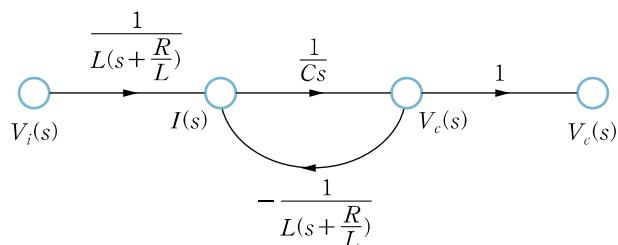
$$I(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{L}} i(0) + \frac{1}{L(s + \frac{R}{L})} V_i(s) - \frac{1}{L(s + \frac{R}{L})} V_c(s) \quad (3.41)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{s} v_c(0) + \frac{1}{Cs} I(s) \quad (3.42)$$

식 (3.41)과 식 (3.42)에서 초기 조건을 0으로 하면, 즉 $i(0) = 0$, $v_c(0) = 0$ 으로 하여 블록선도를 그리면 [그림 3-29(a)]가 된다. 또한 이 블록선도를 이용하여 신호흐름선도를 그리면 [그림 3-29(b)]를 얻을 수 있다.



(a)

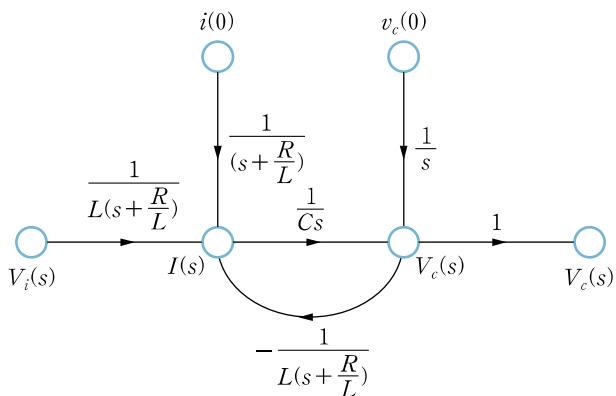


(b)

[그림 3-29] [그림 3-28] RLC 직렬회로망의 블록선도와 신호흐름선도

(a) 블록선도 (b) 신호흐름선도

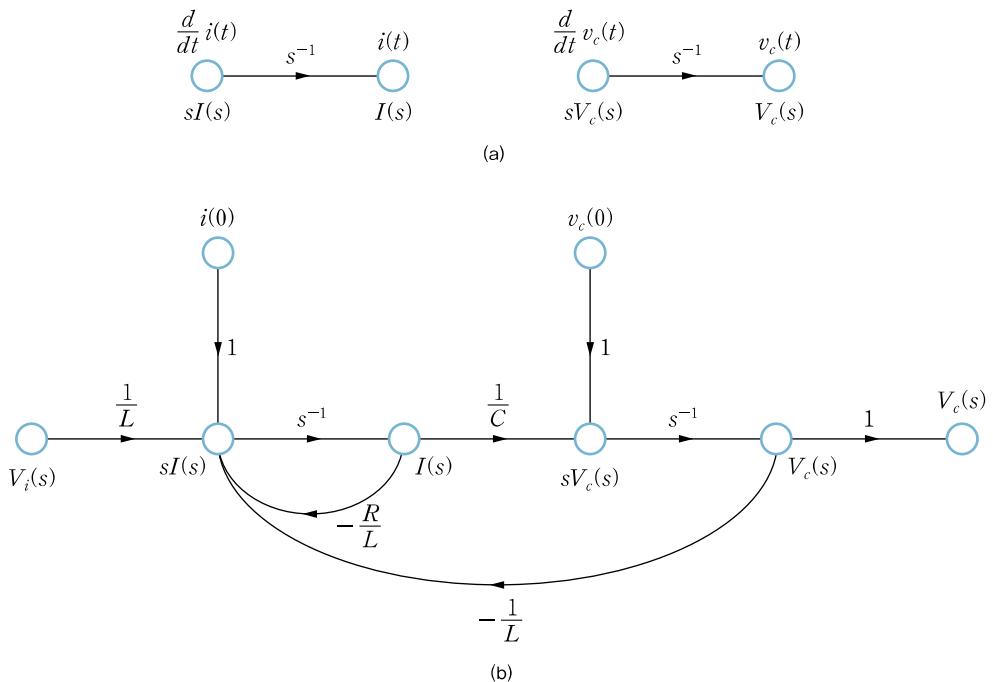
여기에 초기 조건을 포함하여 신호흐름선도를 다시 그리면 [그림 3-30]이 된다.



[그림 3-30] [그림 3-28] RLC 직렬회로망의 초기 조건을 포함한 신호흐름선도

사실 신호흐름선도를 그릴 때 반드시 블록선도를 먼저 그릴 필요는 없다. 앞의 RLC 직렬회로망의 경우에도 식 (3.39)와 식 (3.40)만 있으면 신호흐름선도를 그릴 수 있다. 먼저 [그림 3-31(a)]를

그린다. 여기에서 s^{-1} ($= \frac{1}{s}$)은 적분을 의미한다. 그 다음 식 (3.39)와 식 (3.40)을 이용하여 [그림 3-31(b)]를 완성한다.



[그림 3-31] 블록선도 없이 [그림 3-28] RLC 직렬회로망의 신호흐름선도 그리기

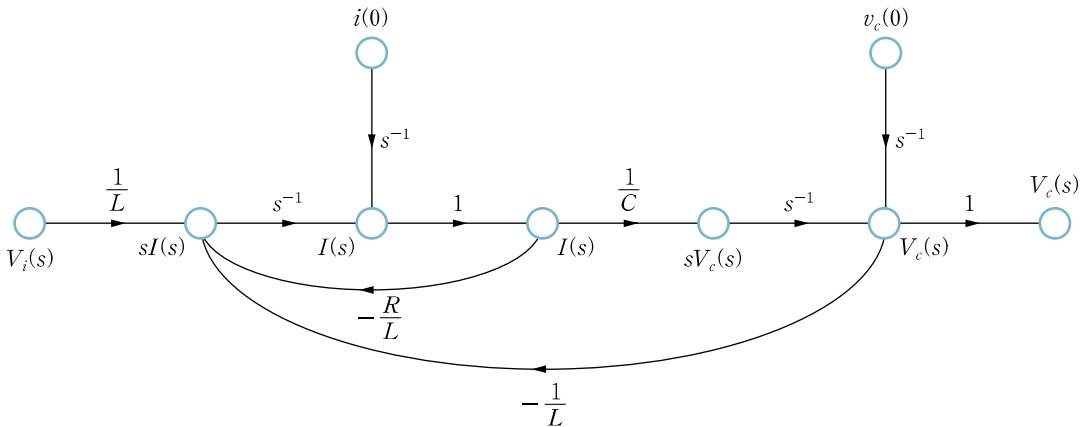
(a) 적분 가지들 (b) 전체 신호흐름선도

또한 신호흐름선도는 반드시 한 가지 모습으로 그려지는 것은 아니다. 같은 시스템일지라도 어떤 신호를 선택하느냐에 따라 다양한 형태의 신호흐름선도를 그릴 수 있다. 예를 들어, 식 (3.39)와 식 (3.40)을 변형하여 신호흐름선도를 그려보자. 먼저 각각의 식을 변형하면 다음과 같다.

$$I(s) = s^{-1}i(0) + \frac{1}{L}s^{-1}V_i(s) - \frac{R}{L}s^{-1}I(s) - \frac{1}{L}s^{-1}V_c(s) \quad (3.43)$$

$$V_c(s) = s^{-1}v_c(0) + s^{-1}\frac{1}{C}I(s) \quad (3.44)$$

식 (3.43)과 식 (3.44)에 의해 신호흐름선도를 그리면 같은 RLC 직렬회로망에 대하여 [그림 3-30]이나 [그림 3-31(b)]와는 조금 다른 [그림 3-32]의 신호흐름선도를 얻을 수 있다.



[그림 3-32] [그림 3-28] RLC 직렬회로의 또 다른 신호흐름선도

[그림 3-31]이나 [그림 3-32]에서는 가지나 경로의 이득에 미분을 나타내는 라플라스변환의 변수 s 는 없고 적분을 나타내는 s^{-1} 만 나타남을 알 수 있다. 이렇게 표시된 신호흐름선도는 제어시스템을 아날로그 컴퓨터¹ 또는 디지털 컴퓨터를 이용하여 시뮬레이션할 때 대단히 유용하게 사용된다. 따라서 이러한 신호흐름선도를 특별히 상태선도^{state diagram}라고 한다.

3.3.5 메이슨의 이득공식

어떤 시스템에서 변수들의 관계를 신호흐름선도로 나타낼 때, 그 시스템의 전달함수를 쉽게 구하기 위해 메이슨의 이득공식^{Mason's gain formula}을 사용한다. 신호흐름선도의 어떤 x_{in} 마디를 입력으로 x_{out} 마디를 출력으로 할 때의 전달함수 $M(s)$ 는 다음 공식으로 구할 수 있다.

$$M(s) = \frac{X_{out}(s)}{X_{in}(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \quad (3.45)$$

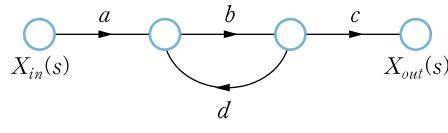
이때, 식 (3.45)의 각 요소를 정리하면 다음과 같다.

- Δ : $1 - (\text{모든 개별 루프 이득의 합})$
+ (공동 마디가 없는 떨어져 있는 루프 중 두 개씩 조합하여 이득을 곱한 값의 합)
- (공동 마디가 없이 떨어져 있는 루프 중 세 개씩 조합하여 이득을 곱한 값의 합)
+ (.....)
- Δ_k : k 번째 전향경로의 마디를 포함하고 있지 않은 루프의 Δ 값

¹ 아날로그 컴퓨터는 OP Amp로 만들어진 적분기, 가산기, 증폭기, 증폭도가 1보다 작은 전위차계로만 구성된 전자 장치로, 디지털 컴퓨터가 나오기 전에 제어시스템의 시뮬레이션에 많이 사용되었다.

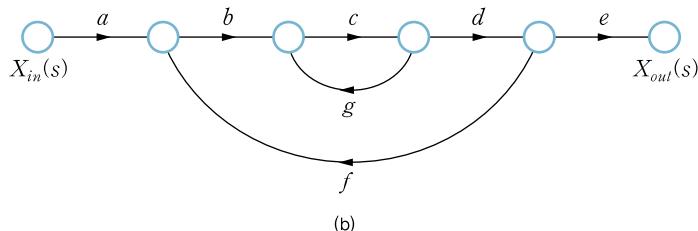
- $M(s)$: $x_{in}(t)$ 를 입력으로 $x_{out}(t)$ 를 출력으로 하는 전달함수
- N : x_{in} 마디에서 x_{out} 마디로 가는 전향경로의 총 수
- M_k : k 번째 전향경로의 이득

메이슨의 이득공식은 이해하기가 어려우므로 [그림 3-33]에 있는 몇 개의 경우에 대한 예를 풀어보기를 권한다.



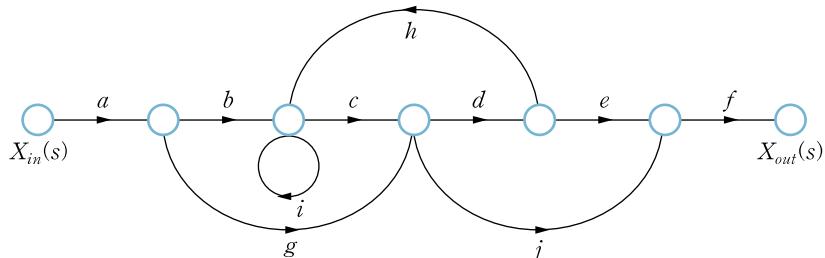
$$\begin{aligned}
 N &= 1 \\
 M_1 &= abc \\
 \Delta_1 &= 1 \\
 \Delta &= 1 - bd \\
 \therefore M(s) &= \frac{abc}{1 - bd}
 \end{aligned}$$

(a)



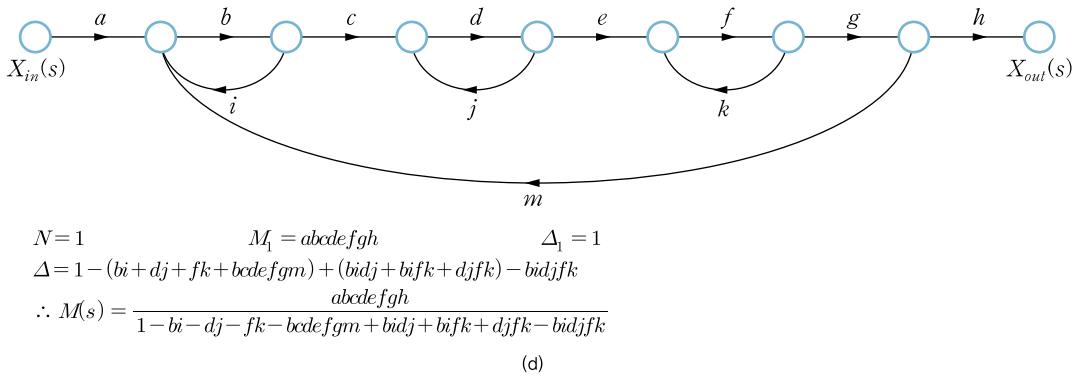
$$\begin{aligned}
 N &= 1 \\
 M_1 &= abcde \\
 \Delta_1 &= 1 \\
 \Delta &= 1 - (cg + bcd) \\
 \therefore M(s) &= \frac{abcde}{1 - cg - bcd}
 \end{aligned}$$

(b)



$$\begin{aligned}
 N &= 4 \\
 M_1 &= abcdef \quad \Delta_1 = 1 \quad M_2 = agdef \quad \Delta_2 = 1 - i \\
 M_3 &= agjf \quad \Delta_3 = 1 - i \quad M_4 = abcjf \quad \Delta_4 = 1 \\
 \Delta &= 1 - (i + cdh) \\
 \therefore M(s) &= \frac{abcdef + agdef(1-i) + agjf(1-i) + abcjf}{1 - i - cdh}
 \end{aligned}$$

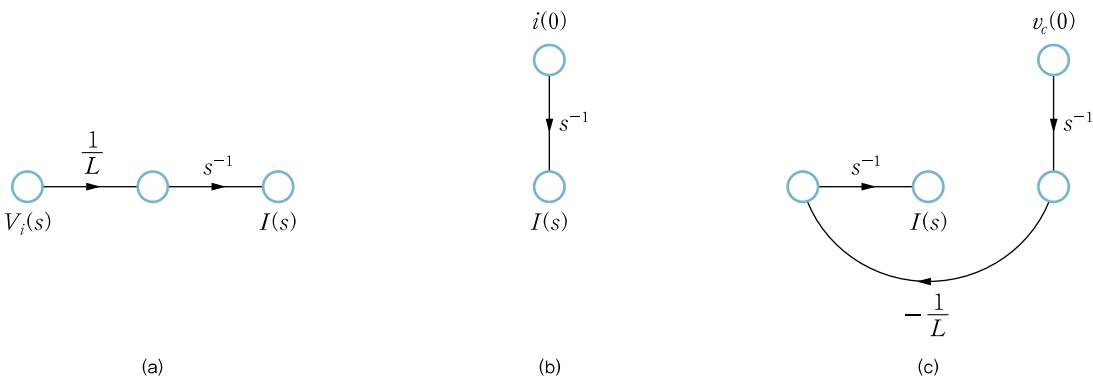
(c)



[그림 3-33] 메이슨의 이득공식의 예

- (a) 전향경로 1개, 귀환루프 1개인 경우
- (b) 전향경로 1개, 귀환루프가 2개인 경우
- (c) 전향경로 4개, 귀환루프가 2개인 경우
- (d) 전향경로 1개, 귀환루프가 4개인 경우

앞에서 언급했던 [그림 3-28] RLC 직렬회로망을 다시 생각해보자. [그림 3-32]의 신호흐름선도에서 입력을 각각 ① 전압 $v_i(t)$, ② 초기 전류 $i(0)$, ③ 초기 콘덴서 전압 $v_c(0)$ 라고 했을 때, 전류 $i(t)$ 를 출력으로 하는 경우에 대해 전달함수를 구해보자. 각 입력에 대한 전향경로는 [그림 3-34]의 (a), (b), (c)와 같다.



[그림 3-34] RLC 직렬회로망의 신호흐름선도와 전향경로

- (a) 전압 $V_i(t)$ 에서 전류 $i(t)$ 로의 전향경로
- (b) 초기전류 $i(0)$ 에서 전류 $i(t)$ 로의 전향경로
- (c) 초기 콘덴서 전압 $V_c(0)$ 에서 전류 $i(t)$ 로의 전향경로

① 입력이 $v_i(t)$ 이고 출력이 $i(t)$ 인 경우의 전달함수

$$N = 1, M_1 = \frac{1}{Ls}, \Delta_1 = 1, \Delta = 1 - \left(-\frac{R}{Ls} - \frac{1}{LCs^2} \right) \text{이므로 전달함수는 다음과 같다.}$$

$$M(s) = \frac{I(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Ls}}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}}$$

$$= \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.46)$$

② 입력이 초기 전류 $i(0)$ 이고 출력이 $i(t)$ 인 경우의 전달함수

$N = 1, M_1 = \frac{1}{s}, \Delta_1 = 1, \Delta = 1 - \left(-\frac{R}{Ls} - \frac{1}{LCs^2}\right)$ 이므로 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{I(s)}{i(0)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}} \\ &= \frac{LCs}{LCs^2 + RCs + 1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

③ 입력이 초기 콘덴서 전압 $v_c(0)$ 이고 출력이 $i(t)$ 인 경우의 전달함수

$N = 1, M_1 = -\frac{1}{Ls^2}, \Delta_1 = 1, \Delta = 1 - \left(-\frac{R}{Ls} - \frac{1}{LCs^2}\right)$ 이므로 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{I(s)}{V_c(0)} = \frac{-\frac{1}{Ls^2}}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}} \\ &= \frac{-C}{LCs^2 + RCs + 1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

각각의 입력에 대한 전달함수를 구했다면, 이번에는 세 입력이 동시에 존재할 때의 전류 $i(t)$ 에 대한 라플라스변환을 구해보자.

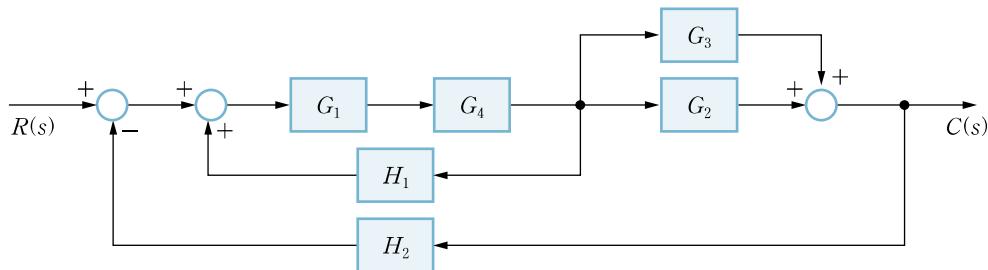
$$I(s) = \frac{1}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}} \left\{ \frac{1}{Ls} V_i(s) + \frac{1}{s} i(0) - \frac{1}{Ls^2} v_c(0) \right\} \quad (3.49)$$

만일 $i(t)$ 대신 $v_c(t)$ 를 출력으로 하면 출력식은 다음과 같다.

$$V_c(s) = \frac{1}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}} \left\{ \frac{1}{LCs^2} V_i(s) + \frac{1}{Cs^2} i(0) + \frac{1}{s} \left(1 + \frac{R}{Ls}\right) v_c(0) \right\} \quad (3.50)$$

예제 3-5 메이슨의 이득공식

[그림 3-35]와 같은 블록선도로 표시되는 제어시스템의 페루프 전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 를 구하라.



[그림 3-35] 페루프 제어시스템의 블록선도

풀이

이 예제는 블록선도의 등가변환으로 풀 수도 있지만, 신호흐름선도로 바꾼 후에 메이슨의 이득공식을 이용하여 푸는 것이 쉽다. 먼저 신호흐름선도로 변환시키면 [그림 3-36]과 같다. 여기에 이득공식을 적용하여 전달함수를 구하면 다음과 같다.

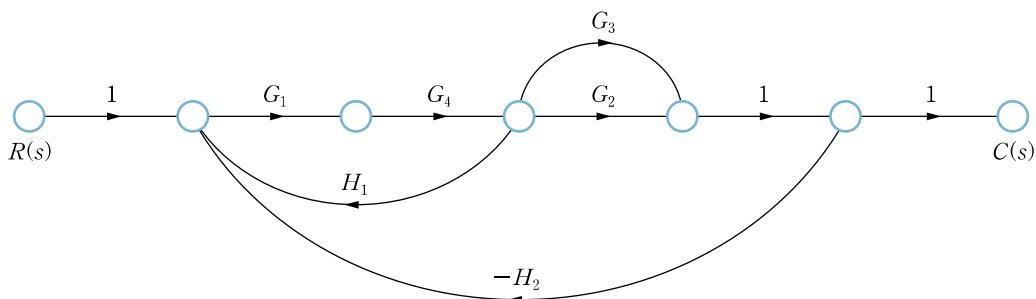
$$N=2$$

$$M_1 = G_1 G_4 G_2, \quad \Delta_1 = 1$$

$$M_2 = G_1 G_4 G_3, \quad \Delta_2 = 1$$

$$\Delta = 1 - (G_1 G_4 H_1 - G_1 G_4 G_2 H_2 - G_1 G_4 G_3 H_2)$$

$$\therefore M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_4 G_2 + G_1 G_4 G_3}{1 - G_1 G_4 H_1 + G_1 G_4 G_2 H_2 + G_1 G_4 G_3 H_2} \quad (3.51)$$



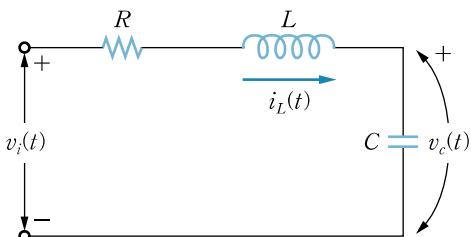
[그림 3-36] [그림 3-35]에 대한 신호흐름선도

3.4 상태방정식

3.3절에서는 전달함수를 이용하여 어떤 시스템을 모델링하는 것에 대하여 공부했다. 전달함수를 이용하여 시스템을 모델링하는 방법은 제어시스템을 해석하거나 설계할 때 유용한 장점이 많지만, 다음과 같은 결점이 있다.

- ❶ 선형시불변시스템^{linear time-invariant systems}에만 적용할 수 있으며, 시변시스템^{time-varying systems}이나 비선형시변시스템^{nonlinear system}에는 사용할 수 없다.
- ❷ 단일입력-단일출력 시스템^{single-input-single-output systems}에만 사용하기 편하고, 다중입력-다중출력 시스템^{multiple-input-multiple-output systems}에는 사용하기 불편하다.
- ❸ 시스템의 입력과 출력신호의 관계만을 취급하므로 입력과 출력 이외의 다른 신호에 대한 정보를 얻을 수 없다.

현대 제어에서는 전달함수를 이용한 시스템 모델링의 결점을 보완하고 디지털 컴퓨터에서 시뮬레이션하기 쉽도록 상태방정식^{state equation}을 사용하는 상태공간기법^{state-space technique}을 많이 사용한다. 상태방정식에 의한 시스템 모델링은 입력과 출력 이외에 상태변수^{state variable}라는 것을 사용한다. 이때 상태방정식은 상태변수들의 1차 연립미분방정식^{system of first-order differential equations}으로 구성된다.



[그림 3-37] RLC 직렬회로망

예를 들어, [그림 3-37]과 같은 RLC 직렬회로망에 대한 미분방정식을 세우면

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) + R i_L(t) = v_i(t) - v_c(t) \quad (3.52)$$

$$C \frac{d}{dt} v_c(t) = i_L(t) \quad (3.53)$$

이다. 이때 코일 L 에 흐르는 전류 $i_L(t)$ 와 콘덴서 C 에 걸리는 전압 $v_c(t)$ 를 상태변수로 정하고 다시 정리하면

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} v_c(t) + \frac{1}{L} v_i(t) \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dt} v_c(t) = \frac{1}{C} i_L(t) \quad (3.55)$$

가 된다. 두 개의 1계미분방정식 식 (3.54)와 식 (3.55)를 상태방정식이라고 하고, 행렬을 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_L(t) \\ \frac{d}{dt} v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t) \quad (3.56)$$

동적시스템에서의 상태변수

어떤 동적시스템 dynamic system에서 상태변수는 $t = t_0$ 일 때의 변수들의 값을 알고, $t \geq t_0$ 일 때의 입력에 대한 정보를 갖고 있으면, $t > t_0$ 에서 그 시스템의 모든 상태를 알 수 있는 최소 개수의 변수를 말한다. 즉, 일반적으로 시스템의 에너지 상태를 나타내는 변수다. 앞에서 살펴 본 RLC 직렬회로망에서 코일에 흐르는 전류 $i_L(t)$ 과 콘덴서에 걸리는 전압 $v_c(t)$ 를 상태변수로 정하는 이유는 $t = 0$ 에서의 코일의 전류와 콘덴서의 전압, 즉 $i_L(0)$ 와 $v_c(0)$ 의 값을 알고, $t \geq 0$ 의 입력 $v_i(t)$ 에 대한 정보만 알고 있으면 $t > 0$ 인 어떤 시각의 $i_L(t)$ 와 $v_c(t)$ 도 알 수 있기 때문이다. 또 상태변수는 일반적으로 그 시스템의 에너지 상태와 관계가 있다. 앞의 RLC 직렬회로망에서는 코일에 흐르는 전류와 콘덴서에 걸리는 전압은 그 시간에 그 시스템이 가지고 있는 에너지² 상태를 나타낸다.

시스템을 상태방정식으로 나타낼 때에는 일반적으로 상태변수를 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$ 로 표시하고, 입력은 $u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots$ 로, 출력은 $y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots$ 로 표시한다. 또한 다음과 같은 입력벡터 $\mathbf{u}(t)$ 와 출력벡터 $\mathbf{y}(t)$, 상태벡터 $\mathbf{x}(t)$ 를 사용하여 간단히 나타내기도 한다.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

² 에너지는 $W(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \frac{1}{2} C v_c^2(t)$ 로 구한다.

또한 식 (3.54)와 식 (3.55)를 일반화하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= f_1\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\} \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= f_2\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\} \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) &= f_n\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}\end{aligned}\tag{3.58}$$

또한 식 (3.58)을 벡터 기호로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\tag{3.59}$$

이때 $\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$ 이다.

위의 식 (3.59)는 시불변시스템에 대한 식이고, 시변시스템에 대한 식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\tag{3.60}$$

그리고 출력 $y(t)$ 도 일반적으로 $\mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{u}(t)$ 의 함수로 표시되며, 시변시스템에서는

$$y(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\tag{3.61}$$

로 된다. 식 (3.61)을 출력방정식 output equation이라고 하며, 식 (3.60)의 상태방정식과 식 (3.61)의 출력방정식을 합하여 동태방정식 dynamic equation이라고 한다.

선형시스템의 상태방정식

어떤 동적시스템의 상태방정식을 식 (3.58)과 같이 표시했지만, 이 시스템이 선형시스템이라면 각각의 상태변수의 미분을 상태변수와 입력의 선형결합 linear combination으로 표시한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ &\quad + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ &\quad + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ &\vdots \qquad \qquad \vdots\end{aligned}\tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \\ &\quad + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t)\end{aligned}$$

여기에서 계수 a_{ij} , b_{ij} 가 시간 함수인 경우에는 시변시스템이며, 상수인 경우에는 시불변시스템이다. 위의 식 (3.62)을 벡터와 행렬을 이용하여 간단히 표시하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.63)$$

단,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

일반적으로 선형시변시스템은 식 (3.63) 대신에

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.64)$$

로 표시하여 선형시불변시스템과 구분하여 사용한다. 그리고 선형시불변시스템의 출력방정식은

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.65)$$

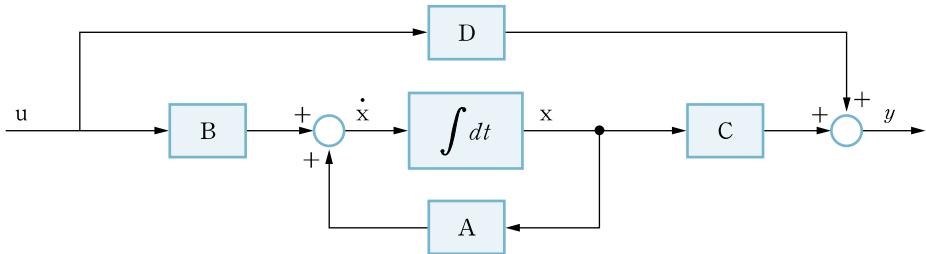
로 나타낸다. 식 (3.63)와 식 (3.65)에서의 계수 행렬 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 를 각각 시스템행렬 system matrix, 입력행렬 input matrix, 출력행렬 output matrix, 전송행렬 transmission matrix이라고 한다.

선형시불변시스템의 동태방정식은 다음 식 (3.66), 식 (3.67)과 같다.

$$\text{상태방정식} : \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.66)$$

$$\text{출력방정식} : \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.67)$$

또한 이 상태공간기법으로 표시된 시스템을 불록선도로 표시하면 [그림 3-38]과 같다.

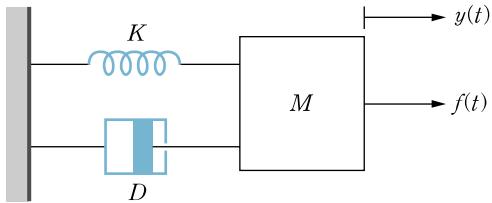


[그림 3-38] 상태공간기법으로 표시된 시스템의 블록선도

앞에서 선형시불변시스템은 식 (3.63)으로, 선형시변시스템은 식 (3.64)와 같이 나타냈으나, 비선형 시스템은 행렬을 이용하여 나타낼 수 없음을 기억하기 바란다.

예제 3-6 기계시스템의 상태방정식

[그림 3-39]와 같은 기본적인 기계시스템의 상태방정식을 구하라.



[그림 3-39] 기본적인 기계시스템

풀이

이 시스템을 미분방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + D \frac{d}{dt} y(t) + K y(t) = f(t) \quad (3.68)$$

초기 조건을 0으로 하고 라플라스 변환을 구하면

$$Ms^2 Y(s) + Ds Y(s) + KY(s) = F(s)$$

이고, 입력이 $f(t)$, 출력이 $y(t)$ 인 전달함수 $G(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} \quad (3.69)$$

이제 상태방정식을 구하기 위하여 식 (3.68)을 정리하면

$$\begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2} y(t) &= -Ky(t) - D \frac{d}{dt} y(t) + f(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y(t) &= -\frac{K}{M} y(t) - \frac{D}{M} \frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{M} f(t) \end{aligned} \quad (3.70)$$

여기에서 출력 $y(t)$ 와 출력의 변화율 $\frac{d}{dt}y(t)$ 를 각각 상태변수 $x_{1(t)}$, $x_2(t)$ 로 정하면 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned}y(t) &= x_1(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) &= \frac{d}{dt}x_2(t)\end{aligned}$$

이들 관계를 이용하여 식 (3.70)을 다시 정리하면 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{D}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t)\end{aligned}\tag{3.71}$$

행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같은 동태방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t)\tag{3.72}$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\tag{3.73}$$

■ 모델링

제어시스템의 각 요소의 입력과 출력의 관계를 수학적으로 나타내는 것으로, 제어시스템을 수식적으로 표현하는 방법에는 미분방정식법, 전달함수법, 상태공간기법이 있다.

■ 전달함수

- 제어요소에 단위임펄스함수를 입력으로 인가할 때 얻는 출력을 임펄스응답이라고 하며, 이때 임펄스응답의 라플라스변환을 그 요소의 전달함수라고 한다.
- 전달함수를 구할 때는 출력의 라플라스변환을 입력의 라플라스변환으로 나눈 식인

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$
로 구한다. 이때 모든 초기 조건은 0으로 가정한다.

■ 블록선도

제어시스템에서 신호가 전달되는 모양을 나타내는 방법으로, 블록 안에 전달함수를 표시하고 입력신호와 출력신호를 화살표로 나타낸다.

■ 신호흐름선도

수식적인 계산에 편리하도록 제어량이나 신호를 원(마디)으로, 전달함수를 화살표(가지)로 변형하여 표시하는 방법이다.

■ 메이슨의 이득공식

어떤 시스템에서 변수들의 관계를 신호흐름선도로 나타낼 때, 그 시스템의 전달함수를 쉽게 구하기 위해 메이슨의 이득공식을 사용한다.

$$M(s) = \frac{X_{out}(s)}{X_{in}(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$$

■ 상태공간기법

현대 제어에서는 전달함수를 이용한 시스템 모델링의 결점을 보완하고 디지털 컴퓨터에서 시뮬레이션하기 쉽도록 상태방정식을 사용하는 상태공간기법을 많이 사용한다.

■ 상태변수와 상태방정식

상태변수는 일반적으로 그 시스템의 에너지 상태를 나타내는 변수이고, 상태방정식은 상태변수들의 1차 연립미분방정식으로 구성된다.

→ Chapter 03 연습문제

3.1 다음과 같은 미분방정식으로 입력과 출력의 관계가 표시되는 시스템의 전달함수는?

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t)$$

Ⓐ $G(s) = \frac{2s+1}{(s+4)(s+1)}$

Ⓑ $G(s) = \frac{2s+1}{(s-4)(s-1)}$

Ⓒ $G(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s-4)}$

Ⓓ $G(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4}$

3.2 다음과 같은 전달함수를 갖는 시스템에 대한 입력과 출력 관계를 미분방정식으로 나타내면?

$$G(s) = \frac{15}{s(s+3)(s+5)}$$

Ⓐ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 8\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 15\frac{d}{dt}y(t) = 15x(t)$

Ⓑ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 8\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 15\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 15x(t)$

Ⓒ $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 15x(t)$

Ⓓ $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 15y(t) = 15$

3.3 다음과 같은 전달함수를 갖는 시스템에 대한 입력과 출력 관계를 미분방정식으로 나타내면?

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 7s^2 + 20s + 5}$$

Ⓐ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = x(t)$

Ⓑ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$

Ⓒ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 5x(t)$

Ⓓ $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 20\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5$

3.4 다음과 같은 미분방정식으로 표시되는 제어계의 전달함수는?

$$\frac{d^2}{dt^2}y + 4\frac{d}{dt}y + 3y = 2x + \frac{d}{dt}x$$

Ⓐ $G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s - 3}$

Ⓑ $G(s) = \frac{2s + 1}{3s^2 + 4s + 1}$

Ⓒ $G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$

Ⓓ $G(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 3)}$

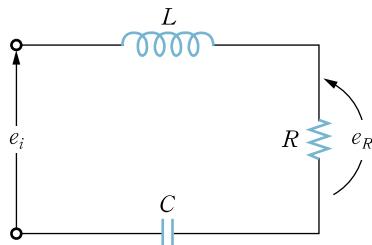
3.5 다음 RLC 직렬 회로망에서 인가전압 e_i 를 입력으로, 저항에 나타나는 전압 e_R 을 출력으로 하는 전달함수를 구하면?

Ⓐ $G(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$

Ⓑ $G(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$

Ⓒ $G(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$

Ⓓ $G(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$



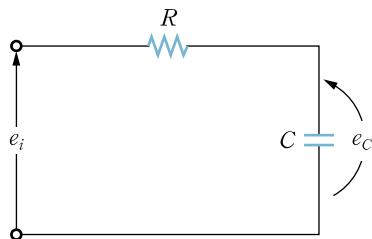
3.6 다음 RC 회로망에서 인가전압 e_i 를 입력으로, 콘덴서에 나타나는 전압 e_c 를 출력으로 하는 전달 함수를 구하면?

Ⓐ $G(s) = \frac{Cs}{s^2 + RCs + 1}$

Ⓑ $G(s) = \frac{RCs}{s^2 + s + RC}$

Ⓒ $G(s) = \frac{RC}{RCs + 1}$

Ⓓ $G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$



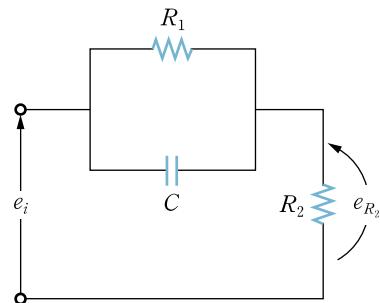
3.7 다음 RC 회로망에서 인가전압 e_i 를 입력으로, 저항 R_2 에 나타나는 전압 e_{R_2} 를 출력으로 하는 전달함수를 구하면?

$$\textcircled{A} \quad G(s) = \frac{1 + R_1 C s}{R_2 + R_1 C s}$$

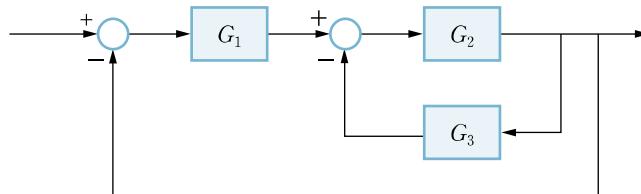
$$\textcircled{B} \quad G(s) = \frac{R_2 + R_1 R_2 C s}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}$$

$$\textcircled{C} \quad G(s) = \frac{R_2 + R_1 R_2 C s}{R_1 + R_1 R_2 C s}$$

$$\textcircled{D} \quad G(s) = \frac{(R_1 + R_2) C s}{R_1 + R_1 R_2 C s}$$



3.8 다음 페루프 제어시스템의 전체 전달함수는?



$$\textcircled{A} \quad \frac{G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 - G_2 G_3}$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

$$\textcircled{C} \quad \frac{G_1 G_2 G_3}{G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_3}$$

$$\textcircled{D} \quad \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

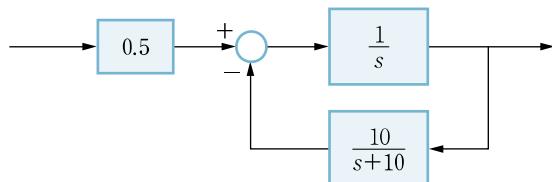
3.9 다음 페루프 제어시스템의 전체 페루프 전달함수를 구하면?

$$\textcircled{A} \quad \frac{0.5(s + 10)}{s^2 + 10s + 5}$$

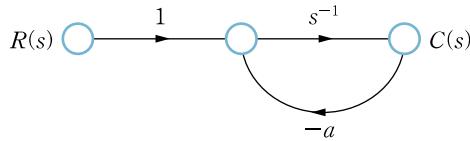
$$\textcircled{B} \quad \frac{0.5}{s(s + 10)}$$

$$\textcircled{C} \quad \frac{0.5(s + 10)}{s^2 + 10s + 10}$$

$$\textcircled{D} \quad \frac{0.5s + 5}{s^2 + 5s + 10}$$



3.10 다음 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 는?



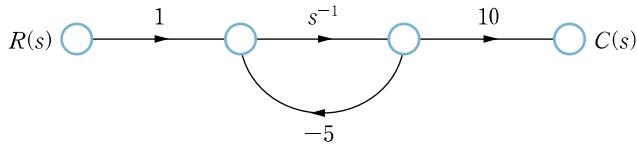
Ⓐ $\frac{1}{s+a}$

Ⓑ $\frac{a}{s+a}$

Ⓒ $\frac{a}{s}$

Ⓓ $\frac{a}{s-a}$

3.11 다음 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 는?



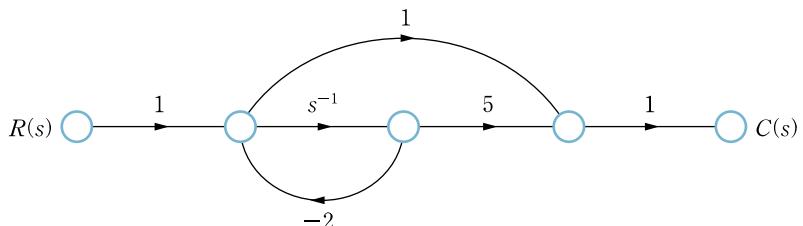
Ⓐ $\frac{10s}{s+5}$

Ⓑ $\frac{5s}{s+10}$

Ⓒ $\frac{10}{5s}$

Ⓓ $\frac{10}{s+5}$

3.12 다음 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 는?



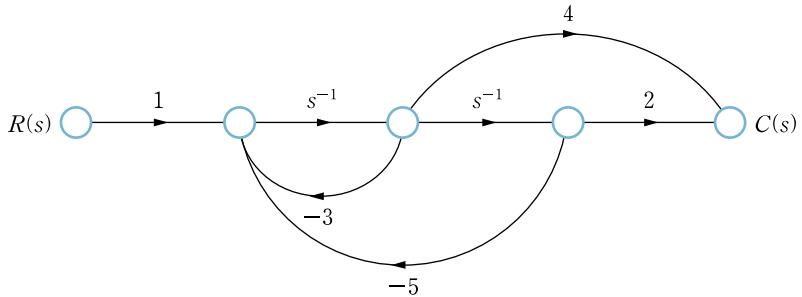
Ⓐ $\frac{s+5}{s+2}$

Ⓑ $\frac{5s}{s+2}$

Ⓒ $\frac{5s+1}{s+2}$

Ⓓ $\frac{5s+1}{s-2}$

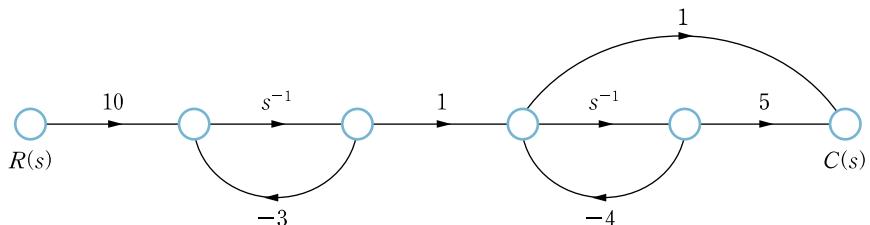
3.13 다음 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 는?



Ⓐ $\frac{2s + 4}{5s^2 + 3s + 1}$
Ⓑ $\frac{2s + 4}{s^2 + 5s + 3}$

Ⓒ $\frac{4s + 2}{s^2 + 3s + 5}$
Ⓓ $\frac{2s - 4}{s^2 - 5s - 3}$

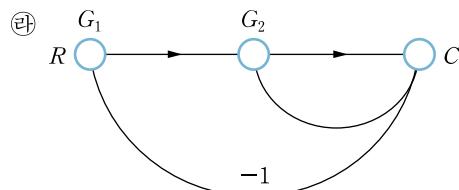
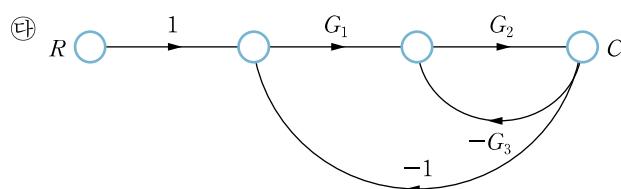
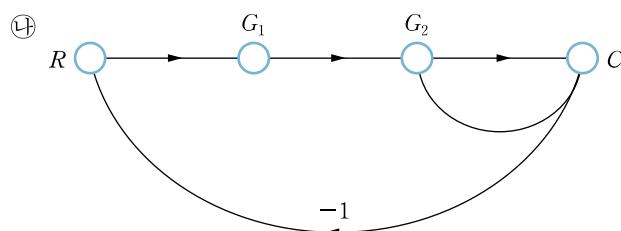
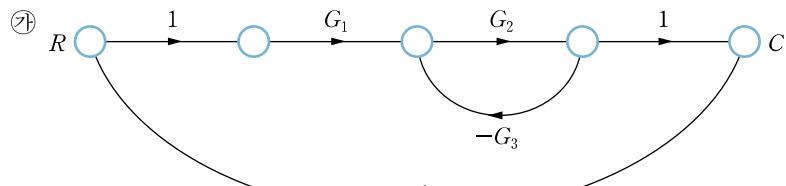
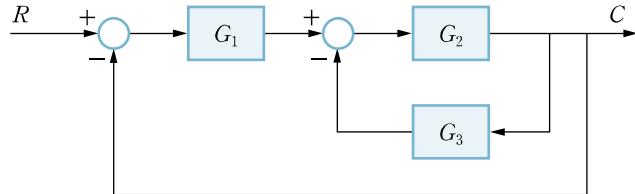
3.14 다음 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 는?



Ⓐ $\frac{10s + 50}{s^2 + 7s + 12}$
Ⓑ $\frac{10(5s + 1)}{s^2 + 3s + 4}$

Ⓒ $\frac{5s + 1}{s^2 + 3s + 4}$
Ⓓ $\frac{10}{s + 3} \times \frac{5s + 1}{s + 4}$

3.15 다음 블록선도를 신호흐름선도로 나타내면?



※ 다음 용어를 정의하라.

3.16 전달함수(transfer function)

3.17 상태방정식(state equation)

3.18 임펄스응답(impulse response)

3.19 인디셜응답(indicial response)

3.20 블록선도(block diagram)

3.21 신호흐름선도(signal-flow diagram)

3.22 상태선도(state diagram)

3.23 상태변수(state variable)

※ 다음과 같은 미분방정식으로 표시되는 시스템에 대한 전달함수를 구하라.

$$\text{3.24} \quad \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 4\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 20y(t) = 20x(t)$$

$$\text{3.25} \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 10x(t)$$

※ 다음과 같은 전달함수를 갖는 시스템의 입출력관계를 미분방정식으로 표시하라.

$$\text{3.26} \quad G(s) = \frac{s+5}{s^3 + 4s^2 + 10s}$$

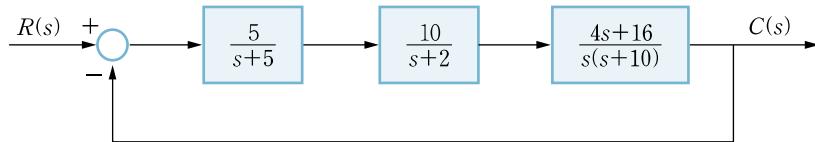
$$\text{3.27} \quad G(s) = \frac{500}{s(s+6)(s^2 + 10s + 100)}$$

※ 어떤 시스템에 입력으로 단위임펄스를 가하여 출력이 다음과 같을 때, 이 시스템의 전달함수를 구하라.

$$\text{3.28} \quad y(t) = 10$$

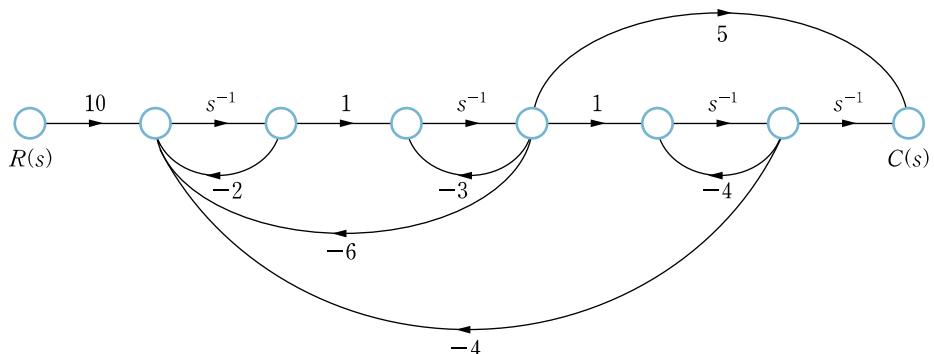
$$\text{3.29} \quad y(t) = 8e^{-5t} \sin(10t + 45^\circ)$$

3.30 다음 폐루프 제어시스템의 블록선도에 대하여 다음을 각각 구하라.

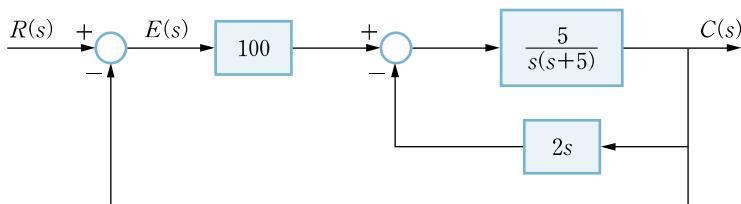


- (a) 신호흐름선도를 그려라.
- (b) 메이슨의 이득공식을 이용하여 전체 전달함수를 구하라.

3.31 다음 신호흐름선도로 표시되는 시스템의 전체 전달함수를 구하라.



3.32 **MATLAB** 다음과 같은 제어시스템 블록선도에서 전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 를 MATLAB을 이용하여 구하라.

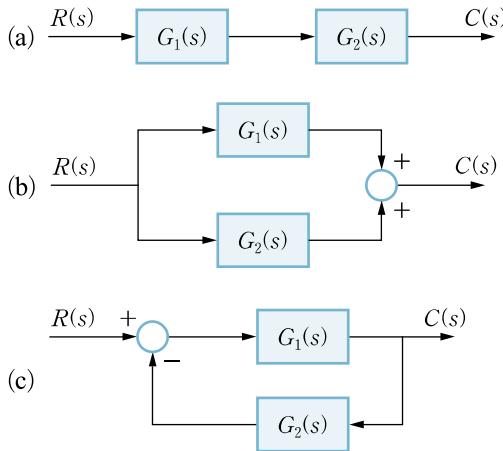


```
참고 {sys1 = tf(num1,den1);
      sys3 = feedback(sys1,sys2);
      sys = feedback(sys5,[1])}
```

3.33 [MATLAB] 제어요소의 전달함수가 각각 다음과 같다.

$$G_1(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5}, \quad G_2(s) = \frac{10}{s+10}$$

이때 다음 (a), (b), (c)의 제어시스템의 전체 전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 를 MATLAB을 이용하여 각각 구하라.



```
참고 {[num,den] = series(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)
[num,den] = parallel(num1,den1,num2,den2);
[num,den] = feedback(num1,den1,num2,den2);}
```