Chapter

02

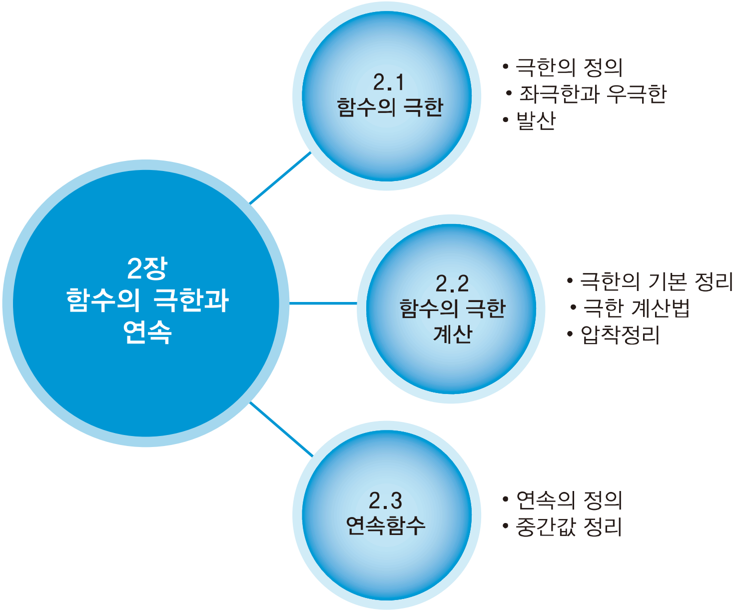
함수의 극한과 연속

Limit and Continuity of a Function

학습목표

- 함수의 극한에 대한 정의와 우극한, 좌극한의 개념을 이해할 수 있다.
- 극한 계산법을 익혀 극한 계산을 할 수 있다.
- 한 점에서 함수의 연속에 대한 정의와 구간에서 함수의 연속을 이해할 수 있다.
- 중간값 정리를 이해할 수 있다.
- 절별 연습문제로 해당 절의 내용을 제대로 이해했는지 확인할 수 있다.

【 미리보기 】



이 장에서는 함수의 극한을 왼쪽으로부터 접근하는 좌극한과 오른쪽으로부터 접근하는 우극한을 이용하여 정의하고, 극한의 수렴과 발산을 판정하는 방법을 학습한다. 또한 복잡한 함수의 극한을 계산하기 위한 방법으로 식을 약분하거나 유리화하는 방법을 알아본다. 마지막으로 연속함수와 관련된 가장 중요한 정리인 중간값 정리를 살펴보고, 이를 활용하는 방안을 알아본다.

2.1 함수의 극한

함수의 극한이란 x가 정의역의 점 a에 접근해 갈 때 함수의 변화를 살펴보는 것을 말한다. 이 절에서는 함수의 극한에 대해 정의하고, 이 정의를 이용하여 그림이나 식으로 설명된 함수의 극한을 구하는 방법을 알아본다.

2.1.1 극한의 정의

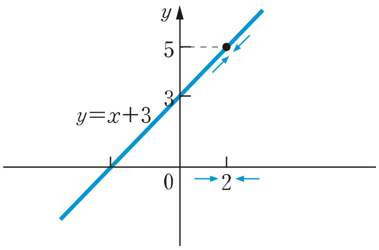
극한의 정의 x가 a는 아니면서 a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 $f(x)$의 **극한**이라 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

극한의 정의에서 'x가 a가 아니면서'란 '$x \neq a$'라는 뜻이다.

$f(x) = x + 3$일 때 x가 2로 접근한다면, $f(x)$의 값은 어떻게 될까?



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.8	4.8	2.2	5.2
1.9	4.9	2.1	5.1
1.99	4.99	2.01	5.01
1.999	4.999	2.001	5.001

[그림 2-1] x가 2로 접근할 때 $f(x)$의 극한

x가 2로 가까이 갈 때 [그림 2-1]에 있는 $f(x)$의 값들을 숫자로 제시하면 표 안의 값과 같은데, x가 2로 가까이 갈 때 $f(x)$의 값은 5로 접근해 감을 알 수 있다. 극한의 정의에 의해 $f(x)$의 극한은 5이다. 이를 식으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

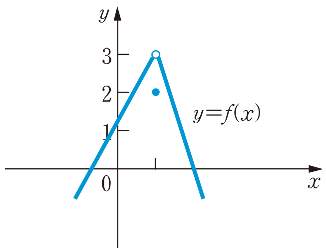
다음 예제에서는 구체적인 식이 아닌 그래프로만 표현된 함수에 대해 x가 a에 가까이 갈 때, 극한값을 구하는 방법을 알아보자.

예제 2-1

$y = f(x)$의 그래프가 [그림 2-2]와 같을 때, x가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$의 극한값은 어떻게 되는가?

풀이

x가 1이 아니면서 1에 가까이 갈 때, $f(x)$는 3에 접근한다. 따라서 $\lim_{x\to1} f(x) = 3$이므로 $f(x)$의 극한값은 3이다.

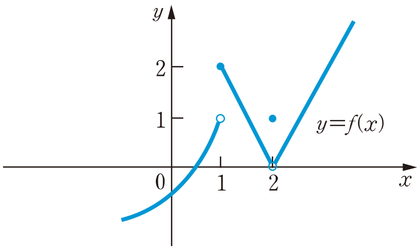


[그림 2-2] $y = f(x)$의 그래프

[예제 2-1]에서 x가 1에 가까이 갈 때 함수의 극한값은 3이므로, $f(1) = 2$와 다름을 알 수 있다.

2.1.2 좌극한과 우극한

함수 $f(x)$의 그래프가 [그림 2-3]과 같다고 하자. x가 2에 가까이 갈 때 함수의 극한값은 어떻게 될까?



[그림 2-3] 좌극한과 우극한

[예제 2-1]과 달리 x가 2에 접근할 때 어떤 방향에서 접근하는가에 따라서 그 극한이 달라진다. 이러한 점을 설명하기 위해 좌극한과 우극한의 정의가 필요하다.

좌극한과 우극한의 정의 x가 a는 아니면서 **a의 왼쪽에서부터** a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 $f(x)$의 **좌극한**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

반대로 x가 a는 아니면서 **a의 오른쪽에서부터** a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 $f(x)$의 **우극한**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

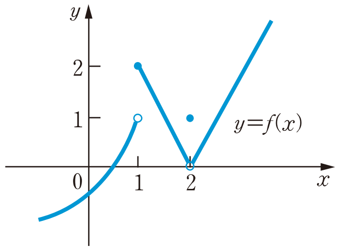
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

예제 2-2

$y = f(x)$의 그래프가 [그림 2-4]와 같을 때, 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$



[그림 2-4] $y = f(x)$의 그래프

풀이

(a) x가 1의 왼쪽에서 1로 접근하면 함수는 1로 접근하므로

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

이다.

(b) x가 1의 오른쪽에서 1로 접근하면 함수는 2로 접근하므로

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

이다.

(c) x가 2의 왼쪽에서 2로 접근하면 함수는 0으로 접근하므로

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

이다.

(d) x가 2의 오른쪽에서 2로 접근하면 함수는 0으로 접근하므로

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$$

이다.

그래프가 주어지지 않고 함수만 주어진 경우의 우극한과 좌극한을 구해보자. [예제 2-3]에서 좌극한과 우극한을 구할 때 어떤 함수를 선택하여 계산하는가가 중요하다.

예제 2-3

다음 극한을 계산하라.

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x \le 3 \\ 3x+2, & x > 3 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$와 $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(b) $g(x)=\begin{cases} x^2-1, & x < 0 \\ 2, & x=0 \\ -x^2+3, & x>0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 0^-} g(x)$와 $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

(c) $h(x)=\begin{cases} -x+4, & x \le 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 1^-} h(x)$와 $\lim_{x\to 1^+} h(x)$

풀이

좌극한과 우극한을 계산할 때 어떤 함수를 이용하는가를 알아야 한다.

(a) $x\to 3^-$일 때 x의 값은 3보다 작으므로, $f(x)=2x-1$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(2x-1)=5$$

이다. $x\to 3^+$일 때 x의 값은 3보다 크므로 $f(x)=3x+2$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(3x+2)=11$$

이다.

(b) $x\to 0^-$일 때 x의 값은 0보다 작으므로, $g(x)=x^2-1$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$$

이다. $x\to 0^+$일 때 x의 값은 0보다 크므로, $g(x)=-x^2+3$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x^2+3)=3$$

이다.

(c) $x\to 1^-$일 때 x의 값은 1보다 작으므로, $h(x)=-x+4$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x+4)=3$$

이다. $x\to 1^+$일 때 x의 값은 1보다 크므로, $h(x)=x^2+2$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2)=3$$

이다.

■ 극한의 존재성 확인

[예제 2-2]와 [예제 2-3]에서 알 수 있듯이, 우극한과 좌극한은 같을 수도 있고 다를 수도 있다. 그렇다면 우극한과 좌극한이 어떤 조건일 때 극한이 존재한다고 할 수 있을까? 우극한과 좌극한을 이용하여 극한의 존재성을 설명할 수 있는 정리를 살펴보자.

정리 2-1 극한의 존재성

$\lim_{x \to a} f(x) = L$이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$이다.

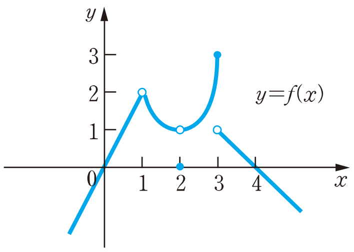
[정리 2-1]에 의해 우극한과 좌극한이 다를 경우에는 극한이 존재하지 않는다고 판정한다.

예제 2-4

$y = f(x)$의 그래프가 [그림 2-5]와 같을 때, 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 4} f(x)$



[그림 2-5] $y = f(x)$의 그래프

풀이

(a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ (d) $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$

절댓값이 들어있는 함수의 극한을 계산할 때는, 먼저 절댓값을 풀어 우극한과 좌극한을 계산하고 [정리 2-1]을 이용하여 극한의 존재성을 설명해야 한다.

예제 2-5

다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = |x|$일 때, $\lim_{x \to 0} f(x)$를 구하라.

(b) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$일 때, $\lim_{x \to 0} g(x)$를 구하라.

풀이

(a) 절댓값의 정의에 의해

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$이고, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$이다.

좌극한과 우극한이 같으므로 [정리 2-1]에 의하여

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

이다.

(b) 절댓값의 정의에 의해

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x}, & x<0\\ \dfrac{x}{x}, & x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$이고, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$이다. 좌극한과 우극한이 다르므로 [정리 2-1]에 의해 $\lim_{x\to 0} g(x)$는 존재하지 않는다.

2.1.3 발산

함수의 극한이 존재한다는 것은 그 극한값이 실수임을 의미한다. 함수에 따라서는 x가 a로 가까이 갈 때 그 극한값이 한없이 커질 수 있다.

발산의 정의 x가 a는 아니면서 a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 양의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **양의 무한대로 발산한다**고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

x가 b는 아니면서 b에 가까이 갈 때, $f(x)$가 음의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산한다**고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to b} f(x)=-\infty$$

이처럼 극한값이 ∞ 이거나 $-\infty$ 일 경우는 수렴하는 것이 아니라 발산하는 것으로 판정해야 한다.

예제 2-6

다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$

(d) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$

풀이

$y=\frac{1}{x}$ 의 함숫값은 x 값이 0에 가까이 갈 때 한없이 커진다.

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}=\infty$

(b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$

$y=\frac{1}{(x-1)^2}$ 의 함숫값은 x 값이 1에 가까이 갈 때 한없이 커진다.

(c) $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

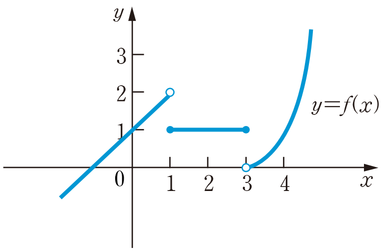
(d) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

이 절에서는 함수의 극한이 존재하는지를 확인하는 방법을 살펴보았다. 또한 함수의 극한이 무한대로 발산하는 경우를 엄밀하게 정의해 보고, 간단한 함수를 이용해 확인해 보았다.

다음 절에서는 좀 더 복잡한 함수의 극한 문제를 쉽게 계산하는 방법을 다룰 것이다.

Section 2.1 연습문제

1. $y = f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 극한을 계산하라.



(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$　　(b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$　　(d) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 일 때, 다음을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$　　(b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$　　(d) $\lim_{x \to 0^-} |f(x)|$

(e) $\lim_{x \to 0^+} |f(x)|$　　(f) $\lim_{x \to 0} |f(x)|$

3. 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2}$　　(b) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{1}{(x+1)^3}$　　(d) $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{1}{(x+1)^3}$

(e) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{3x+1}{x}$　　(f) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{3x+1}{x}$

(g) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

(h) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

4. 임의의 실수 x에 대해 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낸다. 이를 가우스 함수라 하는데, 이 정의를 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 2^-} [x]$

(b) $\lim_{x\to 2^+} [x]$

(c) $\lim_{x\to -1^-} [x]$

(d) $\lim_{x\to -1^+} [x]$

(e) $\lim_{x\to 2} [x]$

(f) $\lim_{x\to -1} [x]$

5. 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+1, & x \geq 1 \\ -ax+2, & x < 1 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재한다고 한다. 상수 a의 값을 구하라.

(b) $g(x)=\begin{cases} x^3-x-1, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 1} g(x)$ 값이 $g(1)$ 값과 같다고 한다. 상수 b의 값을 구하라.

6. 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=\begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하는가? 그 이유를 설명하라.

(b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 0} g(x)$가 존재하는가? 그 이유를 설명하라.

(c) $h(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 1} h(x)$가 존재하는가? 그 이유를 설명하라.

2.2 함수의 극한 계산

이 절에서는 극한의 기본 정리로 극한을 계산하는 방법을 먼저 살펴보고, 기본 정리로 계산할 수 없는 극한 계산법에 대해 살펴본다.

2.2.1 극한의 기본 정리

함수의 극한을 계산하기 위해 사용하는 가장 기본적인 사칙연산은 다음과 같다.

정리 2-2 극한의 기본 정리

$\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재할 때 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(2) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

(3) c가 상수일 때 $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x)$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

(5) $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$일 때 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

[정리 2-2]를 이용하여 극한을 계산한다는 것은 우변의 극한을 계산하여 이 값을 좌변의 극한값으로 한다는 의미이다.

[정리 2-2]를 사용하여 다음 예제의 극한을 계산해 보자.

예제 2-7

$f(x) = 2x + 3$이고 $g(x) = x^2 - 1$일 때, 다음을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

(b) $\lim_{x \to 2} (f(x) - g(x))$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x)\,g(x)$

(d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

풀이

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(2x+3) = 7$이고 $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}(x^2-1) = 3$이므로, [정리 2-2]에 의하여 다음과 같이 계산한다.

(a) $\lim_{x \to 2}(f(x)+g(x)) = 7+3 = 10$

(b) $\lim_{x \to 2}(f(x)-g(x)) = 7-3 = 4$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x)\,g(x) = 7 \cdot 3 = 21$

(d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{7}{3}$

2.2.2 극한 계산법

[정리 2-2]에 해당되지 않는 극한 문제는 다음에 제시하는 방법을 이용하면 쉽게 계산할 수 있다. 함수 형태에 따라 사용하는 계산법이 다르다는 점을 기억해 두어야 한다.

■ $\dfrac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$일 때

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

는 다음과 같은 방법으로 계산한다.

❶ 분자와 분모를 인수분해하여 약분한 후 극한을 계산하거나
❷ 분자 또는 분모에 있는 근호를 유리화하여 약분한 후 극한을 계산한다.

이때 식을 유리화하는 방법은 다음과 같다.

- $\sqrt{x} - a = \dfrac{(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)}{\sqrt{x}+a} = \dfrac{x-a^2}{\sqrt{x}+a}$
- $\sqrt{x} + a = \dfrac{(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}-a)}{\sqrt{x}-a} = \dfrac{x-a^2}{\sqrt{x}-a}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}-b} = \dfrac{\sqrt{x}+b}{(\sqrt{x}-b)(\sqrt{x}+b)} = \dfrac{\sqrt{x}+b}{x-b^2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}+b} = \dfrac{\sqrt{x}-b}{(\sqrt{x}+b)(\sqrt{x}-b)} = \dfrac{\sqrt{x}-b}{x-b^2}$

예제 2-8

$\frac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

풀이

(a) $x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1}(x+1) \\ &= 2\end{aligned}$$

이다.

(b) $x^2-4=(x-2)(x+2)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

이다.

(c) 분자에 있는 $\sqrt{x}-1$을 유리화해야 한다.

$$\sqrt{x}-1=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다.

(d) 분모에 있는 $\sqrt{x}-2$를 유리화해야 한다.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)\\&=4\end{aligned}$$

이다.

■ 유리함수의 극한 계산법

$f(x)$와 $g(x)$가 다항함수일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

의 계산은 분자와 분모의 차수에 따라서 결정된다.

❶ 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 큰 경우

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

❷ 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 작은 경우

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

❸ 분자인 $f(x)$의 차수와 분모인 $g(x)$의 차수가 같은 경우

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^n+a_1 x+a_0$이고, $g(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0$이며, $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$이면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_n}$$

이다.

예제 2-9

유리함수의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x+2}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{-x+1}$

(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}$

(d) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{-x^3+4}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{2x^3+3x-1}$

(f) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{-3x^2+3x+1}$

풀이

(a) 분자의 차수는 2이고 분모의 차수는 1이므로, 분자의 차수가 더 크다. 그리고 분자와 분모의 최고차항의 계수가 모두 양이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x+2}=\infty$$

이다.

(b) 분자의 차수는 3이고 분모의 차수는 1이므로, 분자의 차수가 더 크다. 그리고 분자의 최고차항의 계수는 양이지만 분모의 최고차항의 계수는 음이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{-x+1}=-\infty$$

이다.

(c) 분자의 차수는 1이고 분모의 차수는 2이므로, 분모의 차수가 더 크다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}=0$$

이다.

(d) 분자의 차수는 1이고 분모의 차수는 3이므로, 분모의 차수가 더 크다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{-x^3+4}=0$$

이다.

(e) 분자의 차수가 3이고 분모의 차수도 3이다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{2x^3+3x-1}=\frac{1}{2}$$

이다.

(f) 분자의 차수가 2이고 분모의 차수도 2이다. 따라서

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{-3x^2 + 3x + 1} = -\frac{1}{3}$$

이다.

2.2.3 압착정리

$\frac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법과 $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 극한 계산법만으로는 모든 함수의 극한 계산을 할 수 없다. 예를 들어 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$의 계산은 둘 중 어느 방법으로도 결과를 얻을 수 없다. 그 이유는 $\lim_{x \to 0} x = 0$이지만, $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$은 극한을 갖지 않고 -1과 1 사이에서 진동하기 때문이다. 이런 함수의 극한을 구할 때 [정리 2-3]의 **압착정리**(squeezing theorem)를 사용한다.

정리 2-3 압착정리

$x = a$의 적당한 근방에 있는 모든 점 x에 대해 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

이면, $\lim_{x \to a} g(x) = L$이다.

예제 2-10

압착정리를 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

풀이

(a) 0이 아닌 임의의 x에 대해 $-1 \le \sin \frac{1}{x} \le 1$ 이므로

$$-x \le x \sin \frac{1}{x} \le x$$

가 성립한다. $\lim_{x \to 0} (-x) = 0$이고 $\lim_{x \to 0} x = 0$이므로 압착정리에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

이다.

(b) 0이 아닌 임의의 x에 대해 $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$이므로

$$-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$$

가 성립한다. $\lim_{x\to 0}(-x) = 0$이고 $\lim_{x\to 0} x = 0$이므로 압착정리에 의하여

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

이다.

■ **삼각함수의 극한 계산법**

삼각함수에 관한 극한을 계산할 때는

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

을 이용한다. 이 극한을 일반화하면 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\square}{\square} = 1$이며, 이 극한의 결과는 $x\to 0$일 때, $\square\to 0$인 경우에만 성립한다.

예제 2-11

삼각함수의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{4x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}$

풀이

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{5}{2}=1\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$

(d) (c)의 계산 결과를 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{4}=1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

(e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{3}{2}=1\cdot 1\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{3}{2}=1\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

같은 함수라도 어떤 극한을 선택하는가에 따라서 다른 결과를 얻는다.

삼각함수의 극한 계산법을 이용할 때는 $x\to 0$이어야 한다. 만일 $x\to\infty$인 경우에는 압착정리를 사용해야 한다. 예제를 통해 확인해 보자.

예제 2-12

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x}{x}$를 계산하라.

풀이

모든 x에 대해 $-1\le \sin 3x \le 1$이므로

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin 3x}{x}\le\frac{1}{x}$$

이 성립한다. $\lim_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$이고 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$이므로, 압착정리에 의하여

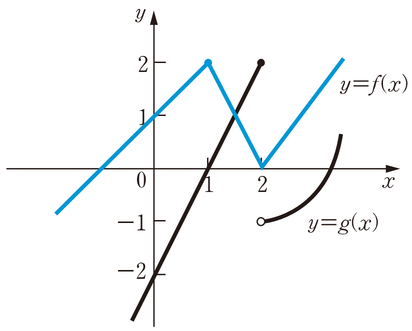
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=0$$

이다.

이 절에서는 함수의 극한을 계산하는 다양한 방법을 살펴보았다. 극한의 기본 정리와 압착정리를 정확하게 이해하여 조건에 맞춰 주어진 함수의 극한을 계산해야 함을 학습하였다.

Section 2.2 연습문제

1. 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 아래와 같을 때, 다음 극한을 구하라.



(a) $\lim_{x \to 1} (f(x) + g(x))$

(b) $\lim_{x \to 0} (3f(x) - g(x))$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)$

(d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

2. $\dfrac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

(b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

(c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

(d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x - 8}$

(f) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x - 4}$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^2 - 1}{x}$

(h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

(i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

(j) $\lim_{x \to 4} \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 형태의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2-3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{2x^3-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{x+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x-1}{x+x^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+3x+1}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5+2}}{x^3+2x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^3+3}}{\sqrt{x^3+2x+1}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x+3}}{3-x^2}$

4. 식의 유리화를 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

5. 삼각함수의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{3x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{2x}$

(e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$

(f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{7x}{\sin 3x}$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 7x}$

(h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan \frac{3}{2}x}{\sin \frac{1}{3}x}$

(i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(-x)}{\sin \pi x}$

(j) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan\left(-\frac{x}{2}\right)}$

6. 압착정리를 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin 5x}{x}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{3x}$

(c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\cos 3x}{2x}$

(d) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\cos x^2}{x^2}$

7. 다음 문제를 풀어라.

(a) 모든 x에 대해 $-x^2 + 2x \leq f(x) \leq 1$일 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$를 구하라.

(b) $\lim_{x \to 0} (x^2 + x)\cos \dfrac{1}{3x}$을 구하라.

2.3 연속함수

이 절에서는 x가 a로 가까이 갈 때 극한을 갖는 함수가 연속이 되려면 어떤 조건이 필요한지를 알아보고, 연속의 성질을 이용하여 방정식의 해가 존재함을 증명하는 과정을 살펴본다.

2.3.1 연속의 정의

한 점에서의 연속의 정의 x가 a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 L에 가까이 가고 $L=f(a)$이면, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 한다.

연속을 엄밀하게 정의하면 다음과 같다.

$y=f(x)$가 다음 세 조건을 모두 만족하면 $x=a$에서 **연속**이라 한다.

❶ $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

❷ $f(a)$가 존재한다.

❸ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$가 성립한다.

만일 세 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

예제 2-13

연속의 정의를 사용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=x^2-1$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 연속인가?

(b) $g(x)=|x|$일 때, $g(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

풀이

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$이고, $f(1)=0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

이 성립하므로, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$이고 $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$이므로, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$이다.

$g(0)=|0|=0$이므로

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$$

이 성립한다. 따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

[예제 2-13]과 달리 [예제 2-14]에서는 주어진 점에서 연속이 되지 않는 경우를 보여준다.

예제 2-14

다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \ge 0 \\ -x+2, & x < 0 \end{cases}$ 일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ 일 때, $g(x)$ 는 $x=0$에서 연속인가?

(c) $h(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$ 일 때, $h(x)$는 $x=1$에서 연속인가?

풀이

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1) = -1$ 이고, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x+2) = 2$이다.

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x)$ 가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

(b) $g(0)$가 정의되지 않으므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

(c) $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x-1) = 1$이고, $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$이다.

따라서 $\lim_{x \to 1} h(x) = 1$이지만 $h(1) = 3$이므로, $\lim_{h \to 1} h(x) \neq h(1)$이다. 따라서 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

복잡한 함수의 연속성을 설명하려면 다음에 나오는 연속 함수들의 사칙연산에 관한 정리를 알아야 한다.

정리 2-4 연속함수의 기본 정리

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, 다음의 경우도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $f(x) + g(x)$

(2) $f(x) - g(x)$

(3) $f(x) \cdot g(x)$

(4) $g(a) \neq 0$일 때 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

예제 2-15

다음 함수의 연속성을 확인해 보자.

(a) $y=x^2+\sin x$는 $x=0$에서 연속인가?

(b) $y=\dfrac{x}{\cos x}$는 $x=0$에서 연속인가?

풀이

(a) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$라 하자. $f(x)$는 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속이고, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$도 $x=0$에서 연속이다. [정리 2-4]의 (1)에 의해 $y=x^2+\sin x$는 $x=0$에서 연속이다.

(b) $f(x)=x$, $g(x)=\cos x$라 하자. $f(x)$는 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속이고, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$도 $x=0$에서 연속이다. 그리고 $g(0)=1\neq 0$이므로 [정리 2-4]의 (4)에 의해 $y=\dfrac{x}{\cos x}$는 $x=0$에서 연속이다.

구간에서의 연속의 정의 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$ 내의 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 **구간 $[a, b]$에서 연속**이라 한다.

함수가 주어졌을 때 구간 내의 모든 점에서 연속인 것을 일일이 보일 수는 없다. 함수가 연속이 되는 점들의 집합은 다음 방법을 이용하여 구한다.

How to 2-1 함수가 연속인 구간을 찾는 방법

함수가 주어졌을 때, 그 함수가 연속이 되는 점들의 집합은 그 함수의 정의역과 같다.

예제 2-16

다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y=x^3-x-1$

(b) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

(c) $y=\sqrt{x+1}$

(d) $y=\sin 2x$

(e) $y=e^{3x-2}$

(f) $y=\ln(3x-1)$

풀이

(a) $y=x^3-x-1$은 다항함수이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다. 따라서 $y=x^3-x-1$이 연속이 되는 점들의 집합은 $\mathbb{R}$이다.

(b) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$은 유리함수이므로 정의역은 분모가 0이 되지 않는 점들의 집합이다. 분모는 $x=-2$, $x=2$에서 0이 되므로, 정의역은 $\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$이다. 따라서 $y=\dfrac{1}{x^2-4}$이 연속이 되는 점들의 집합은 $\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$이다.

(c) $y=\sqrt{x+1}$은 무리함수이므로 정의역은 근호 안의 값들이 음이 되지 않는 점들의 집합이다. 근호 안의 함수는 $x\geq -1$일 때 음이 아니므로, 정의역은 $\{x:\ x\geq -1\}$이다. 따라서 $y=\sqrt{x+1}$이 연속이 되는 점들의 집합은 $\{x:\ x\geq -1\}$이다.

(d) $y=\sin 2x$는 삼각함수이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다. 따라서 $y=\sin 2x$가 연속이 되는 점들의 집합은 $\mathbb{R}$이다.

(e) $y=e^{3x-2}$은 지수함수이므로 정의역은 $\mathbb{R}$이다. 따라서 $y=e^{3x-2}$이 연속이 되는 점들의 집합은 $\mathbb{R}$이다.

(f) $y=\ln(3x-1)$은 로그함수이므로, 정의역은 $3x-1>0$인 점들의 집합이므로 $\left\{x:\ x>\dfrac{1}{3}\right\}$이다. 따라서 $y=\ln(3x-1)$이 연속이 되는 점들의 집합은 $\left\{x:\ x>\dfrac{1}{3}\right\}$이다.

예제 2-17

다음 유리함수가 불연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y=\dfrac{x^3+1}{x-1}$ (b) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

풀이

불연속이 되는 점은 $\mathbb{R}$에서 정의역에 속하지 않는 점들을 찾으면 된다.

(a) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$은 $x=1$일 때 정의되지 않으므로, $x=1$에서 불연속이다. 따라서 $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$이 불연속이 되는 점들의 집합은 $\{1\}$이다.

(b) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$는 $x^2=4$일 때 정의되지 않으므로, $x=-2$와 $x=2$에서 불연속이다. 따라서 $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$가 불연속이 되는 점들의 집합은 $\{-2,\ 2\}$이다.

두 함수의 합 또는 차로 설명되는 함수가 연속인 구간은 다음 방법을 이용하여 구한다.

How to 2-2 두 함수의 합 또는 차에 대해 연속인 구간을 찾는 방법

함수 $f(x)$가 연속인 점들의 집합이 D, 함수 $g(x)$가 연속인 점들의 집합이 E이면, $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$가 연속인 점들의 집합은 $D\cap E$이다.

예제 2-18

[How to 2-2]를 이용하여 다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y=x+\dfrac{1}{x}$

(b) $y=\sin x-\dfrac{x+1}{2x-3}$

(c) $y=\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x}{2x+1}$

(d) $y=\ln x+\dfrac{1}{2x-1}$

풀이

(a) $f(x)=x$가 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}$이고, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}-\{0\}$이므로, $y=x+\dfrac{1}{x}$이 연속인 점들의 집합은

$$\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{0\})=\mathbb{R}-\{0\}$$

이다.

(b) $f(x)=\sin x$가 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}$이고, $g(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$이 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$이므로, $y=\sin x-\dfrac{x+1}{2x-3}$이 연속인 점들의 집합은

$$\mathbb{R}\cap\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

이다.

(c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$가 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}-\{1\}$이고, $g(x)=\dfrac{x}{2x+1}$가 연속인 점들의 집합은 $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$이므로, $y=\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x}{2x+1}$가 연속인 점들의 집합은

$$(\mathbb{R}-\{1\})\cap\left(\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)=\mathbb{R}-\left\{1,\ -\frac{1}{2}\right\}$$

이다.

(d) $f(x)=\ln x$가 연속인 점들의 집합은 $\{x : x>0\}$이고 $g(x)=\dfrac{1}{2x-1}$이 연속인 점들의 집

합은 $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$이므로, $y=\ln x+\frac{1}{2x-1}$이 연속인 점들의 집합은

$$\{x : x>0\} \cap \left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\{x : x>0\}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

이다.

2.3.2 중간값 정리

[정리 2-5]의 중간값 정리는 연속함수와 관련된 가장 중요한 정리로, 이를 사용하면 방정식의 해가 존재하는지를 증명할 수 있다.

정리 2-5 중간값 정리

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ 가 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, $f(c)=0$인 c가 $[a, b]$에 적어도 하나 존재한다.

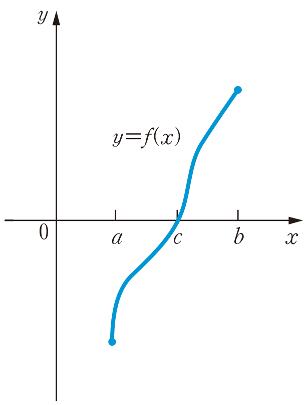
중간값 정리를 사용하려면 먼저 다음 조건을 확인해야 한다.

❶ 정의역은 폐구간이어야 한다.

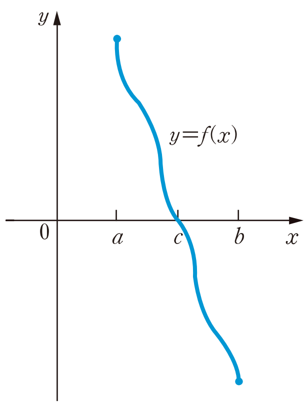
❷ f는 정의역 위에서 연속이어야 한다.

❸ $f(a)f(b)<0$인지 확인한다. 이는 정의역의 한 끝에서의 함숫값이 양이면 다른 끝에서의 함숫값이 음이 되어야 함을 의미한다.

중간값 정리는 [그림 2-6]을 이용하여 증명할 수 있다.



(a) $f(a)<0$, $f(b)>0$인 경우



(b) $f(a)>0$, $f(b)<0$인 경우

[그림 2-6] 중간값 정리 증명

중간값 정리를 이용하여 다음 예제를 풀어보자.

예제 2-19

$x^3-5x+2=0$이 구간 $[0,\ 1]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

풀이

$f(x)=x^3-5x+2$라 하면, $f(x)$는 다항함수이므로 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다. $f(0)=2$이고 $f(1)=-2$이므로, $f(0)f(1)<0$이다. 중간값 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 구간 $[0,\ 1]$에 적어도 하나 존재한다.

간혹 근의 존재성을 증명할 때 구간이 주어지지 않는 경우가 있다. 이때는 $f(a)f(b)<0$이 성립하는 적절한 구간 $[a,\ b]$를 선택하여 양의 값을 갖는 점과 음의 값을 갖는 점을 찾아야 한다.

예제 2-20

$x^3-4x-1=0$이 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

풀이

$f(x)=x^3-4x-1$이라 하자. $f(x)$는 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 $f(0)=-1$, $f(3)=14$이므로, $f(0)f(3)<0$이다. 따라서 중간값 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 구간 $[0,\ 3]$에 적어도 하나 존재한다.

이 절에서는 주어진 함수가 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알아보았고, 정의역을 이용하여 함수가 연속인 구간을 찾는 방법을 학습하였다. 또한 연속함수와 관련된 가장 중요한 정리인 중간값 정리를 이해하고, 이 정리를 활용하여 방정식의 해의 존재성을 확인할 수 있음을 살펴보았다.

Section 2.3 연습문제

1. 다음 함수가 주어진 점 $x=a$에서 연속이 되는지를 판정하라.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ a=2$

(b) $g(x)=\dfrac{1}{x},\ a=0$

(c) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases},\ a=1$

(d) $i(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1\\ 2, & x=-1\end{cases},\ a=-1$

(e) $j(x)=\begin{cases}x-1, & x\leq 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases},\ a=1$

(f) $k(x)=\begin{cases}3x-2, & x\geq 2\\ 2, & x<2\end{cases},\ a=2$

2. 다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{3}x$

(b) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$

(c) $y=\dfrac{x-3}{x-3}$

(d) $y=\sqrt{x+2}$

(e) $y=-\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$

(f) $y=\cos 3x$

(g) $y=\sin(x^2+1)$

(h) $y=e^{\frac{1}{x}}$

(i) $y=\ln\dfrac{1}{x}$

(j) $y=\ln(x^2-4)$

3. 다음 함수가 불연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

(b) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

(c) $y = \sin \dfrac{1}{x}$

(d) $y = \cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

4. [How to 2−2]를 이용하여 다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y = x + \dfrac{1}{x}$

(b) $y = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$

(c) $y = \dfrac{x}{x-3} + \ln x$

(d) $y = \sin x - \dfrac{3x-1}{2x-1}$

(e) $y = \sqrt{e^x} + x$

(f) $y = e^{x^2} + x^3 + 2$

(g) $y = \ln x + e^x$

(h) $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{x-2}{x-4}$

(i) $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

(j) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x+1}$

5. a가 상수일 때 $f(x) = \begin{cases} -ax+2, & x \le 1 \\ ax^2-1, & x > 1 \end{cases}$가 $\mathbb{R}$ 에서 연속이라 하자. a의 값을 구하라.

6. 다음을 증명하라.

(a) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$이 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

(b) $f(x) = x^3 - x^2$일 때 $f(c) = 3$이 되는 상수 c가 존재함을 증명하라.