

C H A P T E R

03

모델링

Modelling

| 학습목표

- 제어 대상이 되는 시스템을 분석하여 적절한 가정과 물리 법칙에 근거한 수학적 모델식을 얻는다.
- 시간 영역에서 임펄스 응답과 전달함수 간의 관계를 파악 한다.
- 여러 부 시스템이 연결된 블록선도로부터 전체 시스템의 입출력 관계를 유도한다.
- 수식으로 주어진 상태방정식과 전달함수를 시각적으로 이해하기 쉽게 블록선도로 나타낸다.
- 비선형 시스템을 선형화하여 제어기 설계가 용이한 선형 시스템을 얻는다.

| 목차

개요	149
3.1 시스템의 모델링	151
3.2 임펄스 응답과 전달함수	203
3.3 블록선도와 신호 흐름도	207
3.4 상태방정식과 전달함수의 블록선도 표시	220
3.5 비선형 시스템의 선형화	229
핵심요약	234
연습문제	238

개요

이 장에서는 1.4절에서 제어시스템의 설계 과정의 첫 단계로 언급되었던 제어 대상 시스템(플랜트)에 대한 이해와 수학적 모델 유도를 다룬다. 제어 대상 시스템의 수학적 모델을 얻기 위하여 여러 가지 변수들을 정의하고, 그 변수들 간의 관계식을 얻어 2장에서 배운 전달함수 또는 상태방정식 형태로 표현한다. 이러한 과정은 이미 2장에서 간단한 예제를 통해 살펴보았다. 여기에서는 좀 더 복잡한 시스템을 대상으로 모델링 과정과 표현 방법을 중점적으로 소개한다. 또 모델링된 시스템을 대상으로, 4장에서 배울 제어기의 안정성에 관한 내용을 간단히 언급할 것이다.

시스템과 모델

시스템에는 여러 종류가 있다. 대표적인 구분으로 시불변 시스템과 시변 시스템, 선형 시스템과 비선형 시스템, 연속형 시스템과 이산형 시스템 등이 있다. 이 책에서는 주로 시불변 시스템과 선형 시스템 및 연속형 시스템을 다룬다. 따라서 시스템의 성질이 시간에 따라 변하지 않고, 입출력 관계에 선형성이 보장되며, 연속적인 시간에서 정의되는 시스템을 주로 다룰 것이다.

모델이란 시스템의 특성을 수학적으로 표현한 것으로, 특히 전기 및 기계 분야의 선형 시불변 연속 시스템에 물리 법칙을 적용하여 그에 대한 수학적인 모델식을 유도할 것이다. 사실 이 책을 읽는 독자들은 여러 전공 과정에서 이미 많은 수학적 모델식을 유도해봤으리라 생각한다. 여기에서는 제어공학적 관점으로 대상 시스템의 입출력을 명확히 파악하고, 그러한 정보가 전달함수와 상태방정식과 같은 정규적인 모델로 어떻게 변환되는지를 주의 깊게 관찰하길 바란다. 또한 수학적 모델식으로부터 도출된 정보를 바탕으로 시스템의 여러 가지 성질들을 검토해보고, 이를 물리적인 의미와 연결 지어보는 것도 큰 도움이 될 것이다.

임펄스 응답

임펄스 응답을 소개하고, 선형성에 근거하여 전달함수와의 관계식을 유도해 볼 것이다. 시간 영역에서의 임펄스 응답을 통해 전달함수의 물리적인 의미를 직관적으로 명확히 파악할 수 있다. 시간 영역

에서 임펄스 응답함수와 입력의 합성곱 Convolution integral 으로 복잡하게 표현되던 출력이 s -영역에서는 단순한 곱으로 표현됨을 보면, 전달함수가 얼마나 유용한 개념인지 알 수 있을 것이다.

블록선도

기술이 점점 고도화되고 복잡해짐에 따라 대부분의 시스템은 계층적 구조로 되어있다. 많은 부 시스템들이 모여서 하나의 시스템이 되고, 또 그런 시스템들이 모여 더 복잡한 시스템이 되는 계층적 구조를 가시적으로 잘 표현할 수 있는 방식이 블록선도이다. 블록선도는 시스템 설계를 용이하게 할 뿐만 아니라, 컴퓨터 연산에 적합하여 매우 쓸모가 있다. 여기에서는 부 시스템들이 서로 연결된 블록선도에서 전체적인 입출력 관계식을 유도하는 방법을 배운다. 2장에서 배운 전달함수의 개념은 이런 블록선도에 아주 적합한 표현 방식으로, 블록선도 변형과 몇 가지 공식 등을 통해 전체적인 전달함수를 쉽게 구하는 방법을 배울 것이다.

한편 입출력 관계가 상태방정식과 전달함수로 기술될 때, 블록선도로 이를 가시적으로 나타내는 방법도 알아야 한다. 이러한 방식은 시뮬레이션 계산 또는 하드웨어 구현에도 유용하지만, 시스템을 보다 직관적으로 이해하는 데 큰 도움이 된다. 또 상태방정식을 총 네 가지의 블록선도로 표현하는 방법을 배우고, 블록선도와 전달함수 표현과의 관계도 알아볼 것이다.

선형화

비선형 시스템을 더욱 쉽게 해석하고 그에 맞는 제어기를 설계하기 위해, 동작점 근방에서 비선형 시스템을 선형 시스템으로 근사화하는 방법을 배울 것이다. 이를 통해 비선형 시스템에도 이 책에서 배운 선형 시스템에 대한 해석 및 제어 기법들을 적용할 수 있게 된다. 물론 비선형 시스템 자체로 시스템을 해석하고, 제어기를 설계하는 방법들이 많이 알려졌으나, 그러한 내용들은 이 책의 범위를 벗어나기 때문에 다루지 않는다.

3.1 시스템의 모델링

제어 대상이 되는 시스템을 모델링하는 첫 단계로 시스템의 동작을 우선 분석하여 그 원리를 이해하고, 내부 특성을 나타내는 상태변수와 입출력을 정의해야 한다. 그 다음 물리 법칙과 경험에 의한 법칙을 동원하여 시스템을 수학적으로 표현 및 정량화하고, 각 변수 간의 관계식을 얻어야 한다. 이를 모델링 과정이라 한다. 정확한 모델을 찾아내는 일이 향후 제어기 설계에 아주 중요한 영향을 미치므로, 모델이 실제와 최대한 흡사해야 한다. 그러나 정확성을 위해 너무 복잡한 모델을 고려하면 제어기 설계가 어려워지기 때문에, 모델의 단순성과 복잡성 간에 어느 정도 절충이 필요하다. 실제와 비교했을 때 허용된 오차 내에서 작동하고, 컴퓨터 연산 등에 적합하며, 시스템 분석 및 제어기 설계가 용이한 모델이면 충분하다.

우리 주변에는 수많은 제어시스템들이 있다. 전동기를 사용하는 엘리베이터, 발전용 보일러, 건물 내의 온도 조절 및 공조 시스템, 자동차 주행 시스템, 미사일, 비행기, 인공위성, 통신 시스템 등등, 오래된 시스템에서부터 최첨단 시스템에 이르기까지 각종 시스템에 제어기가 설치되어 작동하고 있다. 이러한 시스템에 대한 모델은 대부분 제조사가 보유한다. 각 제조사는 보안상 자사 모델의 외부 유출을 금지하며, 필요한 모델이 없을 경우에는 많은 돈을 들여 외국 업체에 모델링을 요청하기도 한다. 제조사 입장에서는 좋은 모델을 보유하는 것이 큰 경쟁력이 된다. 한편 정밀한 동작을 하는 고가 제품의 사양서에는 관련된 물리적 파라미터 값들과 특성 및 오차 정보까지 제품에 대한 각종 정보가 매우 자세하고 정확하게 담겨 있으므로, 제어공학자가 모델링을 할 때 큰 도움이 된다.

모델링 과정은 해당 시스템에 대한 깊은 지식을 바탕으로 이루어진다. 이 책에서는 공과대학 2학년 학생이라면 무난히 이해할 수 있는 수학과 물리 지식을 기반으로 모델링이 가능한 몇 가지 시스템을 선택하여 기술하였다. 현장에서 접할 실제 시스템은 훨씬 복잡하고, 그 모델링도 쉽지 않겠지만, 이 책에서의 모델링 과정을 충분히 익힌다면, 복잡한 시스템의 모델링도 잘 해낼 수 있으리라 믿는다.

이 절에서 소개되는 시스템은 다음과 같다.

- 동적 시스템(3.1.1절)
- 전력 시스템(3.1.3절)
- 진자 시스템(3.1.5절)
- 직류 및 교류 전동기(3.1.2절)
- 확산과 파동(3.1.4절)
- 마스터-슬레이브 시스템(3.1.6절)

3.1.1 동적 시스템

복잡한 동적 시스템을 해석하기 위해서는 기본 단위가 되는 간단한 소자부터 그 물리적인 특성과 정의된 물리량을 정확히 이해할 필요가 있다. 우선 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 기계 시스템을 살펴본 다음, 이와 유사한 전기 시스템을 설명하기로 한다.

[표 3-1]에서 직선 운동 시스템의 물리량을 보면, 고등학교 물리 시간에 이미 배웠던 내용들이다. 추상적으로 표현된 운동량과 운동 에너지, 위치 에너지의 정의가 약간 낯설게 느껴지겠지만, 조금 계산해보면 예전에 배운 mv , $\frac{1}{2}mv^2$, mgh 등과 일치함을 금방 알 수 있을 것이다. 회전 운동을 살펴보면, 직선 운동에서의 변위 x 가 0 과 2π 사이 값을 갖는 각도 θ 로 바뀌었고, 힘 대신 힘과 회전 중심으로부터 거리의 곱($r \times F$)으로 정의되는 토크가 사용된다. 회전 운동과 직선 운동은 [표 3-1]과 같이 서로 매우 유사하게 표현됨을 알 수 있다. 직선 운동의 출력은 다음과 같이 적절하게 변형하면 토크와 각속도의 곱으로도 표현할 수 있다.

$$P = Fv = \frac{F}{r}rv = \tau w$$

전기 시스템의 경우, 직선 운동의 힘을 전압으로, 변위를 전하로 바꾸어 생각하면, 두 시스템이 서로 잘 대응됨을 볼 수 있다. 이런 관점은 나름의 의미가 있다. 전압의 근원은 전기장이며, 전기장은 단위 전하에 작용하는 힘으로 정의되기 때문이다. 또한 전류는 시간당 흐르는 전하의 흐름으로 정의되므로, 전류와 전하를 각각 속도와 변위에 대응시키는 것이 매우 합당할 수 있다.

[표 3-1] 동적 시스템의 기본적인 물리량

직선 운동 시스템		회전 운동 시스템		전기 시스템	
힘	F	토크	τ	전압	e
속도	v	각속도	w	전류	i
운동량	$p = \int F dt$	각운동량	$L = \int \tau dt$	쇄교자속	$\lambda = \int e dt$
변위	x	각변위	θ	전하량	q
출력	$P = Fv$	$P = \tau w$		전력	$P = ei$
운동 에너지	$E(p) = \int vdp$	$E(L) = \int wdL$	자계 에너지		$E(\lambda) = \int id\lambda$
위치 에너지	$E(x) = \int Fdx$	$E(\theta) = \int \tau d\theta$	전계 에너지		$E(q) = \int edq$

[표 3-1]에서 정의된 물리량과 관련하여, 주변에서 흔히 쓰이는 기본적인 기계 및 전기 수동 소자

3가지를 소개한다. 수동 소자란 내부에서 에너지를 생성하지 않고, 공급받은 에너지만큼만 소비하거나 저장하는 소자를 말한다.

용량성 소자

기계 시스템에서 용량성 소자란 힘이 변위의 함수, 즉 $F = \phi(x)$ 로 표현되는 소자를 말한다. 따라서 소자의 변위가 변하면 그에 따라 힘이 변한다. 금방 생각나는 용량성 소자의 예로 스프링을 들 수 있다. 스프링을 잡아당기거나 압축하면 변형되고, 변형된 길이에 따라 작용하는 힘도 변화한다. 즉 힘이 스프링의 변형된 길이, 바로 변위의 함수가 되는 것이다. 이러한 용량성 소자는 위치 에너지를 저장하는 요소로 사용될 수 있으며, 저장된 위치 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E = \int F(x)dx = \int \phi(x)dx$$

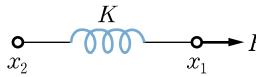
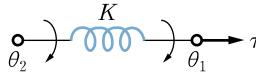
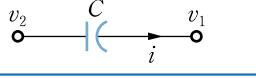
이때 출력은 $P = Fv = \phi(x)\dot{x}$ 이다.

전기 시스템에서 용량성 소자의 경우, [표 3-1]의 대응 관계에서 $F \rightarrow e$, $x \rightarrow q$ 으로, 전압 e 가 전하량 q 의 함수가 됨을 알 수 있는데, 이런 특성을 가진 소자로 커패시터가 있다. 보통 커패시터의 경우, 선형적으로 $e = \frac{q}{C}$ (C 는 용량 상수)의 관계를 만족하기 때문에, 커패시터의 에너지 E 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E = \int e(q)dq = \int \frac{q}{C}dq = \frac{q^2}{2C}$$

용량성 소자로, 앞에서 언급된 직선형 스프링이나 비틀림 스프링과 같은 기계 시스템과 커패시터와 같은 전기 시스템이 [표 3-2]에 정리되어 있다.

[표 3-2] 용량성 소자

명칭	물리적인 구조	물리 법칙
스프링		$F = -K(x_1 - x_2)$
비틀림 스프링		$\tau = -K(\theta_1 - \theta_2)$
커패시터		$v_2 - v_1 = \frac{1}{C}q$

$x_2 - x_1$: 변위차, $\theta_2 - \theta_1$: 각도차, $v_2 - v_1$: 전위차

유도성 소자

기계 시스템에서 유도성 소자란 속도가 운동량의 함수, 즉 $v = \psi(p)$ 의 형태로 표현되는 소자를 말한다. 간단한 예로 $p = mv$ 라는 운동량 공식을 생각해보자. $v = \frac{p}{m}$ 이므로, 질량을 일종의 유도성 소자로 볼 수 있다. 이와 같은 유도성 소자는 운동 에너지를 저장하는 요소로 활용될 수 있으며, 저장된 운동 에너지는 다음과 같이 표시된다.

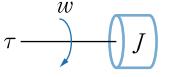
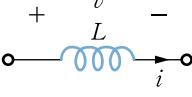
$$T = \int \psi(p) dp$$

전력 저장장치로 사용되는 플라이휠^{flywheel}이라는 장치도 큰 유도성 소자(휠)를 이용하여 운동 에너지 형태로 전력을 저장한다. 전기 시스템에서 유도성 소자의 경우, [표 3-1]의 물리량 간의 대응 관계로부터 $v \rightarrow i$, $p \rightarrow \lambda$ 이므로, 전류 i 가 쇄교자속 λ 의 함수 형태가 됨을 알 수 있는데 이런 특성을 가진 소자로는 인덕터가 있다. 보통 선형적으로 $i = \frac{\lambda}{L}$ (L 은 인덕턴스)의 관계가 성립되기 때문에, 인덕터의 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \int i(\lambda) d\lambda = \int \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$$

유도성 소자로, 앞에서 설명된 질량, 회전 관성과 같은 기계 시스템과 인덕터와 같은 전기 시스템이 [표 3-3]에 정리되어 있다.

[표 3-3] 유도성 소자

명칭	물리적인 구조	물리 법칙
질량		$F = M \frac{dv}{dt}$
회전 관성		$\tau = J \frac{dw}{dt}$
인덕턴스		$v = L \frac{di}{dt}$

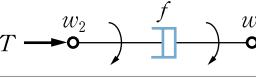
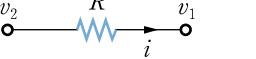
저항성 소자

기계 시스템에서 저항성 소자는 힘이 속도의 함수, 즉 $F = \gamma(v)$ 의 형태로 표현되는 소자를 말한다. 저항성 소자는 에너지를 발산한다. 또 용량성 소자나 유도성 소자와 달리, 저항성 소자는 에너지를 저장할 수 없다. 기계 시스템에서 이러한 저항성 소자로 맵퍼를 들 수 있다. 한편 전기 시스템에서 저항성 소자의 경우, [표 3-1]의 물리량 간의 대응 관계로부터 $F \rightarrow e$, $v \rightarrow i$ 이므로, 전압 e 가 전류

i 의 함수 형태가 됨을 알 수 있다. 이런 특성을 가진 소자로는 저항이 있다. 일반적으로 $e = iR$ (R 은 저항)의 관계가 성립하며, 이를 옴의 법칙이라 부른다.

이미 언급했듯이 저항은 에너지를 저장할 수 없다. [표 3-1]를 보면 전기 시스템에서 에너지를 발생하기 위해서는 쇄교자속이 있거나, 전하가 분포되어 있어야 하는데, 저항에서는 그렇지 못하다. 저항성 소자로, 직선형 댐퍼나 회전형 댐퍼와 같은 기계 시스템과 전기 저항과 같은 전기 시스템이 [표 3-4]에 정리되어 있다.

[표 3-4] 저항성 소자

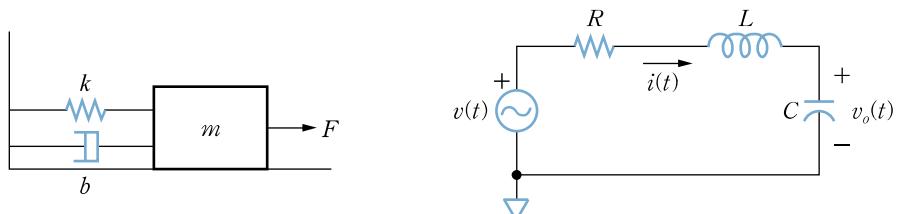
명칭	물리적인 구조	물리 법칙
직선형 댐퍼		$F = b(v_2 - v_1)$
회전형 댐퍼		$\tau = f(w_2 - w_1)$
전기 저항		$i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$

$v_2 - v_1$: 속도차 또는 전위차, $w_2 - w_1$: 각속도차

이제까지 기본적인 기계 및 전기 시스템에 대한 물리량과 기본적인 수동 소자들에 대해서 상호 간의 유사성을 바탕으로 알아보았다. 이런 지식을 기반으로 다음의 기계 시스템과 전기 시스템에 관한 간단한 모델을 유도해보자.

예제 3-1

[그림 3-1]에 나타난 질량-스프링-댐퍼 기계 시스템과 RLC 전기회로에 대한 모델식을 구하라. (단 질량-스프링-댐퍼 기계 시스템에서 m 은 질량, k 는 스프링 상수, b 는 댐퍼의 감쇠 계수, F 는 외부에서 가해지는 입력 힘, x 는 평형상태로부터의 변위를 나타낸다. 전기 시스템의 경우, R 은 저항, L 은 유도용량, C 는 정전용량, $i(t)$ 는 전류, $v(t)$ 는 입력 전압, $v_o(t)$ 는 출력 전압을 나타낸다.)



[그림 3-1] 질량-스프링-댐퍼 기계 시스템과 RLC 전기회로

풀이

기계 시스템의 경우, 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 다음과 같은 힘의 관계식을 유도한다.

$$\sum F = ma \rightarrow -kx - b\dot{x} + F = m\ddot{x}$$

이 식을 정리하여 다음과 같은 운동방정식을 구한다.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \quad (3.1)$$

전기 시스템의 경우 키르히호프의 전압 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$v_L + v_R + v_C = v \rightarrow L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) + \frac{1}{C} q(t) = v(t)$$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ 를 이용하여 위 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$L \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = v(t) \quad (3.2)$$

식 (3.1)과 식 (3.2)를 비교하면 [표 3-1]과 같이 기계 시스템과 전기 시스템의 물리량 유사성을 확인할 수 있다. 만약 식 (3.2)를 문제에서 요구한 바대로 출력 전압 $v_o(t)$ 로 표현하고 싶다면, $q(t) = Cv_o(t)$ 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v_o(t) + RC \frac{d}{dt} v_o(t) + v_o(t) = v(t) \quad (3.3)$$

미분방정식 (3.3)으로부터 2장에서 배운 시스템의 전달함수를 구해보면 다음과 같다.

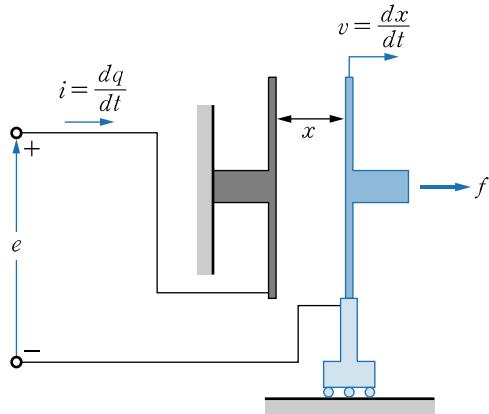
$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

이 모델은 전형적인 2차 시스템으로, 앞으로 대표적인 2차 시스템의 예로 자주 쓰이게 될 것이다.

[예제 3-1]과 같이 기계 시스템과 전기 시스템이 따로 존재할 경우도 있지만, 실제 주변의 시스템은 기계 장치와 전기 장치가 복합적으로 구성된 시스템이 대부분이다. 다음 예제는 전기 시스템과 기계 시스템이 결합하여 동작할 때 어떻게 모델링할 수 있는지 보여주고 있다.

예제 3-2

[그림 3-2]와 같이 극판이 움직이는 커패시터를 생각해보자.



[그림 3-2] 극판이 움직이는 커패시터

양 극판 간 거리는 x 이며, 외부에서 힘 f 가 극판에 작용하고 있다. 양 극판 사이의 전압 e 와 전하량 q 가 다음과 같이 표현될 때, 모델식을 구하라.

$$q = C(x)e$$

움직이는 극판과 그 밑의 카트의 총 무게는 m 이며, 마찰력은 무시한다.

풀이

우선 양 극판에 있는 전하에 의해 생기는 힘 f_o 를 계산해보자. 에너지 보존 법칙을 사용하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$f_o dx + dW_e(x, q) = 0 \quad (3.4)$$

즉 발생한 힘 f_o 에 의해서 한 일 $f_o dx$ 만큼 내부 에너지는 감소한다. 식 (3.4)로부터 다음과 같은 관계식을 얻어낼 수 있다.

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} = -f_o \quad (3.5)$$

식 (3.5)는 전기 에너지와 기계적인 힘의 관계를 나타낸 식으로, 이 시스템의 동작이 전기와 기계가 복합적으로 작용하는 물리적인 현상임을 말해주고 있다.

이제 전기 에너지를 구해서 양 극판 사이에 작용하는 힘을 알아보자. 커패시터에 저장되는 내부 에너지는 앞서 용량성 소자 부분에서 배웠듯이 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_e(x, q) = \frac{q^2}{2C(x)} \quad (3.6)$$

이 에너지를 변위 x 에 대해서 미분하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$f_o = -\frac{\partial W_e}{\partial x} = -\frac{q^2}{2} \frac{d}{dx} [C^{-1}(x)] = \frac{q^2}{2C^2(x)} \frac{dC(x)}{dx} \quad (3.7)$$

이때 평행판 커패시터로 가정하면, 식 (3.7)에서 f_o 는 위치 x 에 관계없이 $\frac{q^2}{(2\epsilon_0 S)}$ 임을 알 수 있다. S 는 극판의 넓이를 의미한다. 최종적으로 카트의 모델식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f - f_o$$

평행판 커패시터로 가정하고, 입력을 $f - f_o$ (당기는 알짜힘), 출력을 x 라 하면, 해당 전달함수는 $\frac{1}{(ms^2)}$ 로 쓸 수 있다. 만약 평행판 커패시터가 아닌 임의의 형태의 커패시터라면, 식 (3.7)에서 f_o 가 x 에 대해 비선형 함수로 나타날 수 있으며, 그 결과 전달함수를 구하기 어려울 수도 있다. 이럴 경우에는 비선형 시스템의 선형화 과정을 거치면(3.5절), 선형 미분방정식을 얻어서 전달함수를 구할 수 있다.

[예제 3-2]와 같이 전기 시스템과 기계 시스템이 결합된 시스템으로 가장 대표적인 전동기를 다음 절에 소개한다.

3.1.2 직류 및 교류 전동기

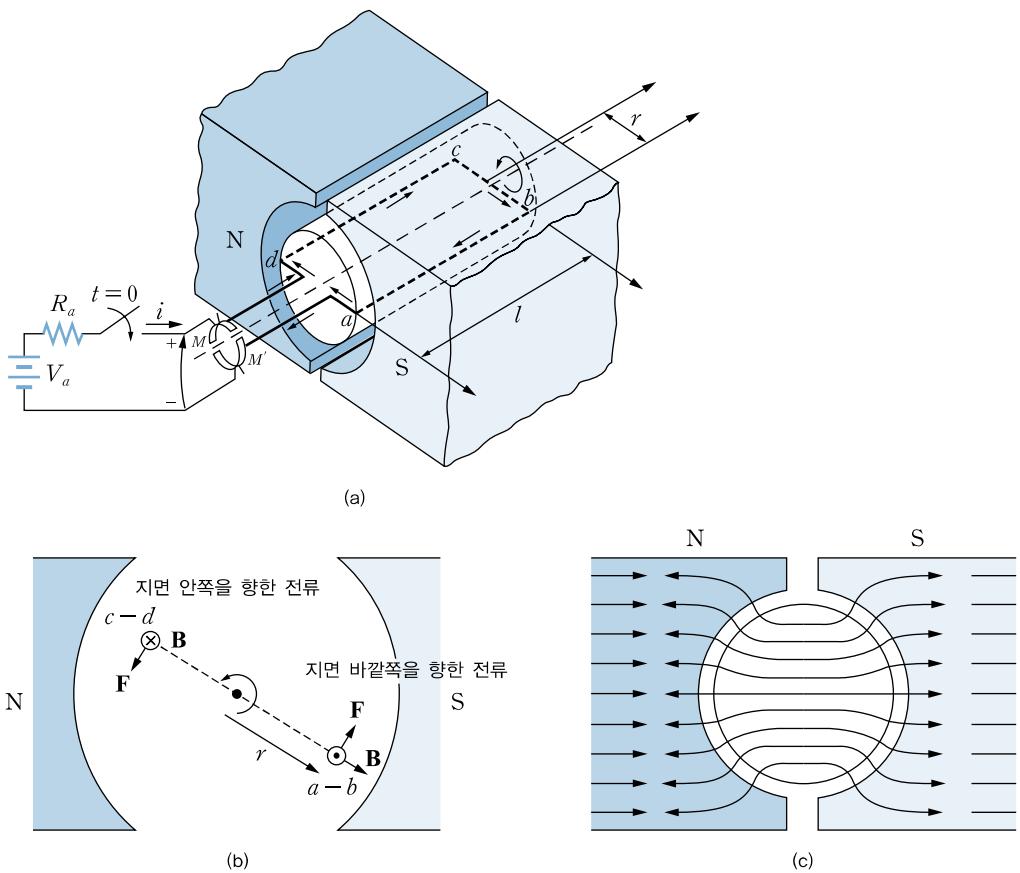
고등학교 물리 시간 때 간단하게 동작 원리를 배웠던 전동기에 대한 모델링을 해보자. 전동기는 전기 에너지를 기계 에너지로 변환하는 에너지 변환기기이다. 전동기는 비교적 정확한 모델링이 가능하므로, 제어에서는 아주 중요한 대상이다. 여기에서는 입출력을 갖는 제어시스템이라는 관점에서 전동기에 대한 중요한 아이디어를 소개할 것이다. 그리고 전동기의 토크 발생 원리를 이해하고, 전기적인 물리량과 기계적인 물리량이 결합된 수학적 모델식을 세울 것이다. 그 다음은 전동기들의 토크와 속도를 제어하는 방법에 대해서 설명할 것이다. 전동기에 대한 더 자세한 내용은 다른 심화 전공 과정에서 배울 수 있으므로 우선 전동기 중에서 개념적으로 가장 단순한 직류 전동기에 대해 알아보자.

직류 전동기

속도 제어가 쉽고, 속도 제어 범위도 넓은 직류 전동기는 자속을 생성하는 영구자석과 전류가 흐르는 회전자의 전기자 권선(여기서는 설명을 위해 단일 루프 권선을 고려한다.)으로 구성되어 있다. 보통 전동기에서 회전하는 부분을 회전자, 고정된 부분을 고정자라고 부른다. 전류가 흐르는 회전자는 영구자석에 의해서 발생하는 자속과 상호작용하여 회전력을 발생시킨다. 또 직류 전원으로부터 전기자 권선에 교류 전원을 흘려주기 위한 브러시와 정류자가 있다. 이 브러시와 정류자에 의해 직류 전동기는 연속적인 회전력을 얻게 된다.

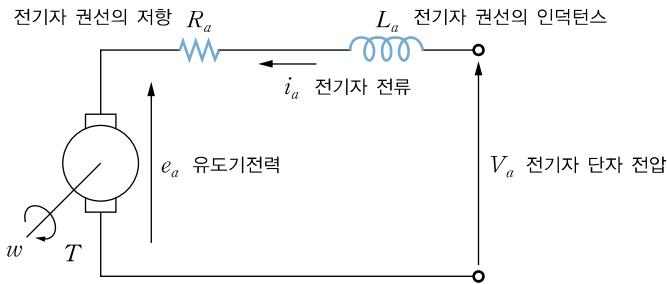
■ 동작 원리

[그림 3-3(a)]는 직류 전동기의 구성과 동작 원리를 보여주고 있다. 단일 루프 권선이 고정된 축 주위를 회전하고, 영구자석이 자제를 공급한다. 단일 루프 권선은 강자성체 철심의 슬롯 속에 삽입되어 있고, [그림 3-3(c)]와 같이 고정자 사이에 일정 간격의 공극이 형성되어 있다. 이 공극은 중심 방향을 향하는 일정한 세기의 자속밀도를 생성하는데, 이는 유도기전력을 구할 때 유용한 물리적인 구조이다.



[그림 3-3] 직류 전동기의 개념도와 공극에서의 자속밀도

직류 전동기 시스템은 [그림 3-4]와 같은 등가회로로 나타낼 수 있다. 모든 변수가 독립적인 듯이 보이지만, 사실은 외부의 기계적 시스템과 연동되어 있으며, 기계적인 물리량(각속도, 부하 토크, 마찰계수, 관성 모멘트 등)과 깊은 관련이 되어 있다. 특히 전기자 권선의 전류 i_a 는 전동기의 토크를 발생시키는 원천이며, 발생된 토크는 전동기의 속도를 변화시킨다. 전동기의 속도는 유도기전력과 관계가 있으므로 결국 다시 전기자에 흐르는 전류에 영향을 미치게 된다.



[그림 3-4] 직류 전동기의 모델(영향 관계 : $i_a \rightarrow T \rightarrow w \rightarrow e_a \rightarrow i_a$)

이제 직류 전동기에 대하여 물리 법칙에 근거한 수학적 모델식을 구하고, 입출력을 가지는 시스템의 관점에서 모델식을 전달함수나 상태방정식으로 표현해보자.

■ 모델링

전체적인 직류 전동기 시스템은 루프 권선에 해당하는 전기자 회로, 유도기전력, 회전력(토크), 외부와 연결된 기계 시스템의 4개의 식으로 모델링할 수 있다.

① 전기자 회로

전기자 회로에 인가되는 전압 V_a 는 권선 저항과 인덕턴스 전압 강하 및 유도 전압의 합으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (3.8)$$

여기서 i_a 는 전기자 권선의 전류, R_a 는 전기자 권선의 저항, L_a 는 전기자 권선의 인덕턴스, e_a 는 유도기전력이다.

모델링을 위해 먼저 식 (3.8)의 우변에 있는 유도기전력 e_a 를 구해보자. 자속밀도가 B 이고, 길이가 l 인 도선이 속도 v 로 움직인다면, 유도기전력 e 는 다음과 같다.

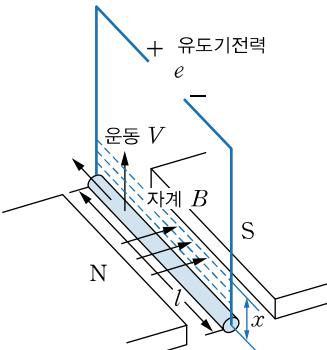
$$e = (v \times B) \cdot l \quad (3.9)$$

이 식은 고등학교 때 배웠던 패러데이 법칙($e = \frac{-d\phi}{dt}$)에서 유도되는 다음 식과 동일하다.

$$e = \frac{-d\phi}{dt} = \frac{-B dA}{dt} = \frac{-B l dx}{dt} = Blv$$

식 (3.9)는 단지 위 식에 방향이라는 개념을 넣기 위해서 외적과 내적으로 표현했을 뿐이다. 고교 수준에서는 유도기전력의 절댓값만 구하고, 방향은 플레밍의 오른손 법칙을 써서 알아냈는데, 이를 통합하여 표현한 게 식 (3.9)이다. 이러한 내용이 [표 3-5]에 정리되어 있다.

[표 3-5] 유도기전력의 방향

물리적인 현상	플레밍의 오른손 법칙	수학적 표현
		$e = -\frac{d\phi}{dt}$ $= -\frac{d(x \times B) \cdot l}{dt}$ $= (v \times B) \cdot l$

② 유도기전력

지금부터는 식 (3.9)를 활용하여 직류 전동기에서 발생하는 유도기전력을 구해보자. [그림 3-3(a)]의 전동기가 시계 반대 방향으로 회전한다고 하자. 선분 ab 와 cd 에서만 기전력이 발생하고, 선분 bc 와 da 에서는 $v \times B$ 성분과 l 성분이 직교하기 때문에 기전력이 발생하지 않는다. 선분 ab 와 cd 의 경우, 회전자의 접선 속도 v 와 자속밀도 B 는 수직이고, $v \times B$ 와 l 은 같은 방향이므로, 최종적인 기전력은 다음과 같이 간단하게 쓸 수 있다.

$$e_a = 2Blv \quad (3.10)$$

이렇게 간단하게 표현될 수 있는 까닭은 이 전동기의 구조가 [그림 3-3(c)]의 구조이므로, 자속의 방향이 항상 권선의 속도 방향과 수직이며, 자속밀도 또한 어디에서나 일정하기 때문이다. [그림 3-3(a)]에서 유도기전력의 방향을 꼭 확인하기 바란다.

회전자인 권선 루프 모서리의 접선 속도 v 는 루프의 회전 반지름 r 과 루프의 각속도 w 를 사용하여 $v = rw$ 로 나타낼 수 있다. 또한 공극에서의 자속밀도가 B 이므로, $\pi r l B$ 는 루프를 통과하는 총 자속 ϕ 라고 쓸 수 있다. 따라서 최종적인 유도기전력은 다음과 같다.

$$e_a = \frac{2}{\pi} \phi w \quad (3.11)$$

위 식은 유도기전력 상수 K_E 를 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_a = K_E w$$

즉 유도기전력은 전동기의 회전 속도에 비례함을 알 수 있다.

한편 전동기의 회전 속도가 올라가면 큰 유도기전력이 발생하고, 동일한 전압에 전기자에 흘러 들어가는 전류가 줄어들어 토크도 줄어든다. 만약 회전자에 영구자석이 아니라 자속을 제어할 수 있는 전자석을 사용한다면, 자속 ϕ 가 포함되어 있는 K_E 를 작게 하여 유도기전력을 감소시키고 전류를 증가시킴으로써, 전류 약화로 인한 토크 감소 효과를 완화시킬 수 있을 것이다. 이런 제어를 약계자 제어라 하며, 이는 나중에 좀 더 자세히 알아볼 것이다.

일반적으로 자속밀도 B 가 존재하는 공간에 놓인 전류 i 가 흐르는 도선은 다음과 같은 힘 F 를 받는다.

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (3.12)$$

여기서 l 은 자속밀도 B 의 영향을 받는 권선의 길이로, 그 방향은 전류의 방향을 따르는 벡터이다. 식 (3.12)의 벡터 연산은 [표 3-6]의 플레밍의 원순 법칙과 일치한다.

[표 3-6] 전기가 흐르는 도체가 받는 힘

물리적인 현상	플레밍의 원순 법칙	수학적 표현
		$F = i(l \times B)$

③ 회전력(토크)

직류 전동기에 전기자 전압 V_a 를 인가하여 전기자 권선에 전류 i_a 가 흐를 경우, 발생할 회전력을 식 (3.12)를 사용하여 구해보자. [그림 3-3(a)]의 선분 bc 와 ad 는 위치에 따라서 힘이 작용할 수 있지만, 회전력에는 기여하지 못한다. 선분 ab 와 cd 에서만 회전에 기여하는 토크가 발생하는데, 운 좋게도 두 선분에서 서로 같은 방향의 토크가 발생하기 때문에 루프의 총 유도 토크는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau = 2rF = 2ri_a lB$$

공극에서의 자속밀도가 B 이고, $\pi r l B$ 를 총 자속 ϕ 라고 쓸 수 있으므로, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\tau = \frac{2}{\pi} \phi i_a \quad (3.13)$$

보통 토크 상수 K_T 를 사용하여, 위 식을 다음과 같이 쓴다.

$$\tau = K_T i_a \quad (3.14)$$

즉 발생 토크는 전기자에 흐르는 전류에 비례함을 알 수 있다. 이 관계식은 전기적인 물리량이 기계적인 물리량으로 바뀌는 모습을 보여주고 있다. 또한 K_T 가 앞에서 정의했던 역기전력 상수 K_E 와 같다는 사실도 매우 흥미롭다.

④ 기계 시스템

마지막으로 발생 토크에 의해 직류 전동기의 속도가 어떻게 결정되는지 알아보자. 축으로 연결된 기계적 부하 시스템을 구동하는 직류 전동기의 속도 w 는 다음 식을 따른다.

$$\tau = J \frac{dw}{dt} + Bw + \tau_L \quad (3.15)$$

여기서 w 는 회전자의 회전 각속도, τ_L 은 부하 토크, J 는 전체 시스템의 관성 모멘트이며, B 는 마찰계수이다.

지금까지 구한 직류 전동기 시스템의 4가지 모델식을 [표 3-7]에 정리했다.

[표 3-7] 직류 전동기 시스템의 4가지 모델식

구분	수학적 표현
전기자 회로	$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a$
유도기전력	$e_a = K_E w$
회전력	$\tau = K_T i_a$
기계 시스템	$\tau = J \frac{dw}{dt} + Bw + \tau_L$

■ 전달함수와 상태방정식

[표 3-7]에 정리된 직류 전동기 시스템의 모델식을 기반으로, 전기자에 가하는 전압을 입력으로, 전동기에서 발생하는 속도를 출력으로 보고 2장에서 배운 전달함수를 구해보자. 전기자 회로의 전압 방정식과 기계 시스템의 방정식을 라플라스 변환하고 유도기전력과 회전력의 관계식을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_a(s) &= (R_a + sL_a)I_a(s) + E_a(s) \\ &= (R_a + sL_a)I_a(s) + K_E W(s) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$T(s) = (Js + B)W(s) = K_T I_a(s)$$

여기서는 [표 3-7]의 기계 시스템 모델에서 $\tau_L = 0$, 즉 부하가 없다고 가정하였다. 식 (3.16)을 정리해서 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{W(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_T}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \left(\frac{R_a B}{L_a J} + \frac{K_E K_T}{JL_a}\right)} \quad (3.17)$$

전달함수 식 (3.17)을 분석하면 직류 전동기에 전기자 전압을 인가할 경우, 속도가 동역학적으로 어떻게 반응할 것인지를 알 수 있다. 나중에 이에 대해 다시 자세히 다룰 것이다.

이번에는 2장에서 배운 상태방정식으로 이 모델을 표현해보자. 입력을 전기자 전압 V_a , 출력을 $w = \dot{\theta}$ 로 잡고, 상태를 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = i_a$ 로 정하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & -\frac{K_E}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_a$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

■ 직류 전동기의 제어

지금까지는 직류 전동기의 입력으로 전기자의 전압만 고려하였다. 이러한 제어 방식을 전기자 전압 제어 방법이라 한다. 한편 영구자석이 아니라 전자석을 사용하여, 전자석에 흐르는 전류(보통 계자 전류라고 함)도 입력으로 본다면, 전류에 따라 자속을 변화시키면서 큰 속도 영역에서도 제어할 수 있다. 바로 자속 제어 방법이다. 지금부터는 직류 전동기의 이러한 두 가지 제어 방법을 살펴보고, 각 방식이 어떻게 전동기의 속도를 제어하는지를 알아보자.

우선 전류, 속도, 토크 등이 더 이상 변동되지 않고 일정한 값을 갖는 안정된 경우, 즉 정상상태인 경우에 대해 생각해보자. [표 3-7]의 미분방정식에서 미분값을 0으로 놓으면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

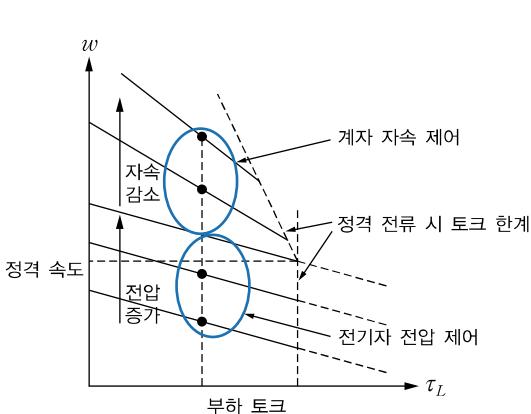
$$w = \frac{V_a}{K\phi} - \frac{R_a}{(K\phi)^2} \tau_L \quad (3.19)$$

여기서 $K = K_E = K_T$ 이고, 마찰계수 B 는 0으로 가정한다. 식 (3.19)를 보면 전동기의 회전 속도가 전기자 전압과 계자 자속에 의존함을 알 수 있다. 따라서 전기자 전압과 계자 자속을 제어함으로써

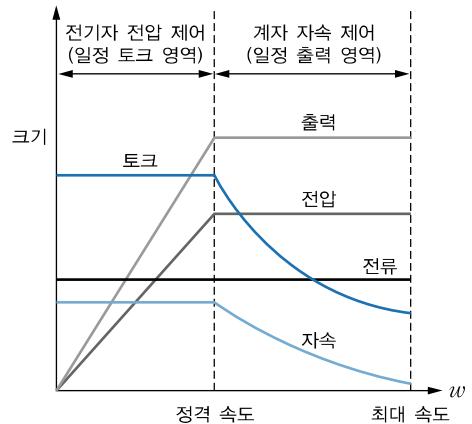
원하는 속도를 얻을 수 있을 것이다. 물론 자속 제어를 위해서는 [그림 3-3(b)]의 영구자석 대신 전자석을 사용해야 한다.

① 전기자 전압 제어

전기자 전압 제어는 계자 자속 ϕ 를 일정하게 유지한 상태, 즉 유도기전력 상수와 토크 상수가 일정한 상태에서 전기자 전압 V_a 를 제어함으로써 원하는 속도를 얻어내는 방식이다. [그림 3-5] 와 같이 전기자 전압 V_a 로 속도를 선형적으로 제어할 수 있다. 또한 전기자 전압 제어의 경우, 회전 속도와 관계없이 전기자 정격 전류에 해당하는 정격 토크를 일정하게 얻을 수 있는데, 이렇게 제어 가능한 영역을 일정 토크 영역이라고 한다. 이러한 일정 토크 영역이 [그림 3-6]에 표시되어 있다. 전기자 전압 제어는 정격 전압 이내에서 가능하며, 정격 속도 이하의 운전 영역에서 속도를 제어하는 데 사용된다.



[그림 3-5] 직류 전동기의 토크와 속도 간의 관계



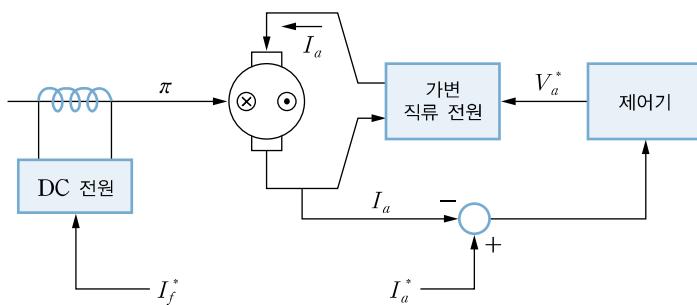
[그림 3-6] 직류 전동기의 두 가지 운전 영역 :
일정 토크 영역과 일정 출력 영역

② 계자 자속 제어

자속 제어의 경우, 전기자 전압이 정격에 도달하면, 회전 속도 증가에 따라 계자 자속을 줄임으로써, 회전 속도가 증가하더라도 전기자 전류를 일정하게 유지시킨다. 다만 계자 자속 제어인 경우, 정격 전류 시 토크 한계는 자속을 줄일수록 작아진다. 이를 수식으로 살펴보면 더 쉽게 이해할 수 있다. 식 (3.11)을 보면, 유도기전력은 전동기의 회전 속도와 계자 자속의 곱으로 표현된다. 따라서 회전 속도가 증가할 때 계자 자속을 줄여 전체적으로 유도기전력을 일정하게 유지하면, 식 (3.8)로부터 알 수 있듯이 전기자 전류를 일정하게 만들 수 있다. 이렇듯 전압과 전류가 일정하게 제어되어 출력 $V_a I_a$ 도 일정하게 유지되는 영역을 일정 출력 영역이라고 한다. 정격 전압과 정격 전류에 도달해도 전압과 전류를 일정하게 유지하면서 자속으로 속도를 제어할 수 있다는 말이다. 자속 제어 방식과 전기자 전압 제어 방식의 특징이 [그림 3-5]와 [그림 3-6]에 함께 나타나 있다.

③ 토크 제어

지금까지 정상상태에서의 속도 제어를 알아보았는데, 계자 자속과 전기자 전류를 직접적으로 제어함으로써 토크 제어도 가능하다. 왜냐하면 식 (3.12)에서 알 수 있듯이 토크가 계자 자속과 전기자 전류의 곱에 비례하기 때문이다. [그림 3-7]과 같이 계자 전류 I_f 와 전기자 전류 I_a 로 토크를 제어할 수 있다. 일반적으로 전기자 전류 I_a 를 사용한 제어에 비해 계자 전류 I_f 를 사용한 제어의 응답 속도가 느리다.



[그림 3-7] 직류 전동기의 토크 제어 시스템

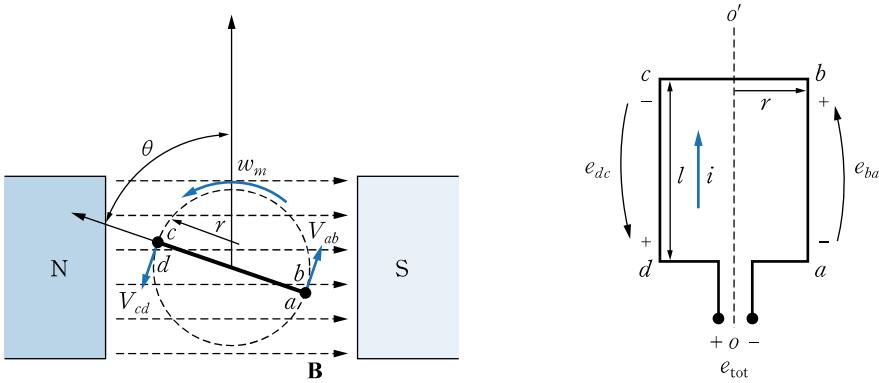
교류 전동기

교류 전동기는 회전 속도 및 토크 제어의 용이성 덕분에 널리 사용되었으나, 기계적인 정류를 위해 부착된 브러시와 정류자의 마모로 인해 정기적인 유지 보수가 필요하다. 이 때문에 현재는 산업용에서 교류 전동기의 사용이 보편화되는 추세다. 이번에는 교류 전동기의 동작 원리와 모델링에 대해 살펴보자.

교류 전동기는 고정자 3상 권선에 교류 전류를 흘려 생성된 회전 자계와 회전자 전자석과의 상호작용으로 발생한 토크에 의해 회전한다. 교류 전동기는 전자석으로 회전자를 작동시키는 방법에 따라 동기 전동기와 유도 전동기로 나뉜다. 동기 전동기에서는 회전자 전자석을 직류 전원으로 만들거나 영구자석을 사용한다. 유도 전동기에서는 회전자 전자석이 교류전원으로 만들어지는데, 별도의 독립된 교류 전원을 사용하지 않고 고정자로부터 유도된 전원을 사용한다.

■ 동작 원리

교류 전동기의 동작 원리를 이해하기 위해, 우선 [그림 3-8]과 같이 일정한 자계 내에 단순한 권선 루프가 있는 기기를 검토해보자.



[그림 3-8] 간단한 교류 전동기의 동작 원리

① 발생 토크

[그림 3-8]은 일정하게 균일한 자속을 만드는 자석과 이 자계 내에서 회전하는 권선 루프를 보여 준다. 권선이 자계 내에 회전할 때 발생하는 토크는 직류 전동기 경우와 거의 동일하나, 자속이 루프 평면에 수직이 아니라는 차이 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau = 2rilB \sin \theta \quad (3.20)$$

즉 토크는 루프 면이 자속과 평행할 때 최댓값이 되고, 자속과 수직일 때 0이 된다. 루프 권선에 i 라는 전류가 흐르면, 권선이 이루는 면에 수직으로 발생하는 자속밀도 B_{loop} 의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_{loop} = Gi \quad (3.21)$$

여기서 G 는 루프의 형태와 관련되는 비례 상수이다. 식 (3.21)을 사용해서 식 (3.20)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2rl}{G} B_{loop} B \sin \theta \\ &= k B_{loop} B \sin \theta \end{aligned}$$

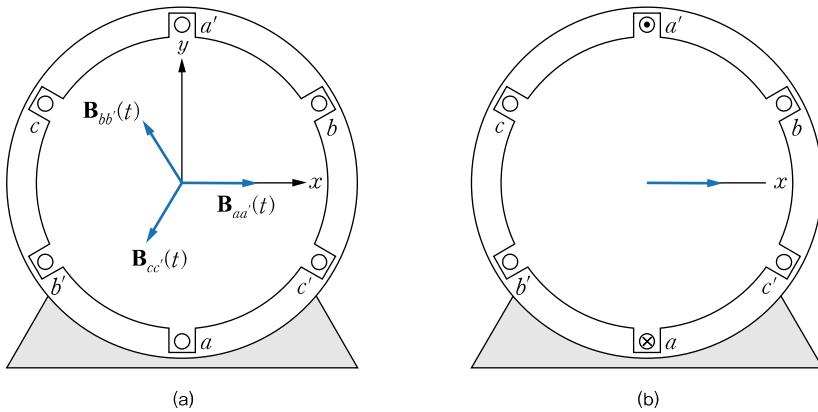
이다. 여기서 $k = \frac{2rl}{G}$ 이고, 기기의 구조에 의존하는 값이다. 외적을 사용하여 좀 더 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\tau = k \mathbf{B}_{loop} \times \mathbf{B}_s \quad (3.22)$$

② 회전 자계

식 (3.22)를 보면, 두 자계의 방향이 서로 일치하려는 작용에 의해 토크가 발생한다는 사실을 알 수 있다. 만약 한 자계는 고정자에서, 다른 자계는 회전자에서 만들어진다면, 회전자의 자계가 고정자의 자계와 일치하는 방향으로 토크가 발생할 것이다. 고정자의 자계가 회전한다면, 회전자

에서 고정자 자계를 따라가기 위해 토크가 계속 발생될 것이다. 바로 이러한 동작 원리가 교류 전동기의 핵심 아이디어이다. 지금부터 고정자에서 어떻게 회전 자계를 만들어내는지 알아보자.



[그림 3-9] 회전 자계의 생성 원리

[그림 3-9]와 같이 60도 간격으로 떨어진 6개의 슬롯에 3개의 코일(aa' , bb' , cc')이 감겨 있고, 각 선에 3상의 전류가 흐르면, 다음과 같이 120도 위상 차이가 나는 자속밀도에 위치적으로 발생한 120도 만큼의 위상 차이가 더해져서 최종 자속밀도 $B_{net}(t)$ 를 생성한다.

$$\begin{aligned} B_{net}(t) &= B_{aa'}(t) + B_{bb'}(t) + B_{cc'}(t) \\ &= B_M \sin wt \angle 0^\circ + B_M \sin(wt - 120^\circ) \angle 120^\circ + B_M \sin(wt - 240^\circ) \angle 240^\circ \end{aligned}$$

여기서 B_M 은 최대 자속밀도이다. 이 식을 수평, 수직 방향의 단위벡터 \hat{x} 와 \hat{y} 를 사용해서 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{net}(t) &= B_M \sin wt \hat{x} \\ &\quad - 0.5 B_M \sin(wt - 120^\circ) \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} B_M \sin(wt - 120^\circ) \hat{y} \\ &\quad - 0.5 B_M \sin(wt - 240^\circ) \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} B_M \sin(wt - 240^\circ) \hat{y} \end{aligned}$$

고등학교 때 배운 삼각함수 합의 공식을 사용하면, 다음과 같이 정리할 수 있다.

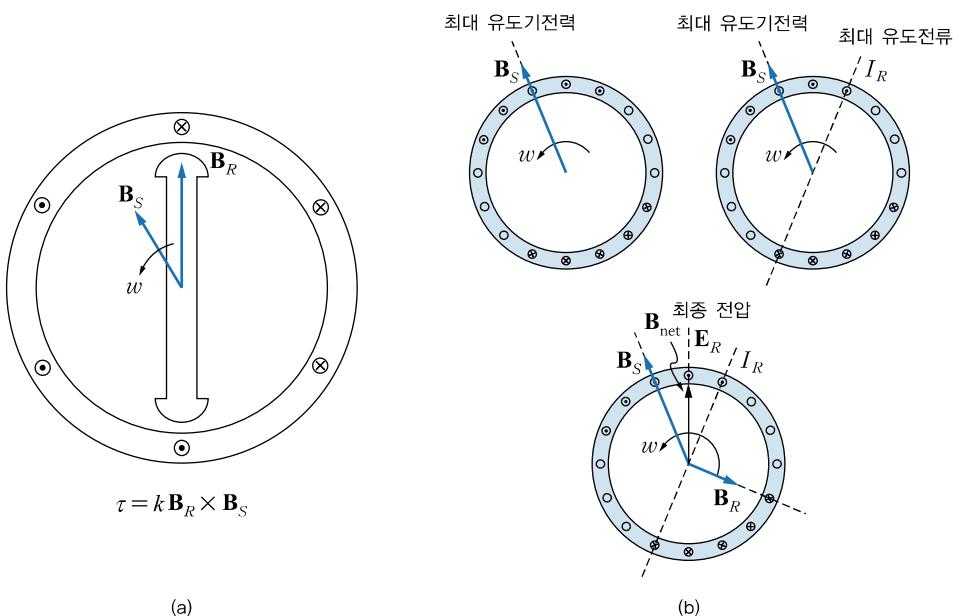
$$B_{net}(t) = (1.5 B_M \sin wt) \hat{x} - (1.5 B_M \cos wt) \hat{y} \quad (3.23)$$

즉 이 구조는 크기가 $1.5 B_M$ 이고 각속도 w 로 시계 방향으로 회전하는 회전 자계임을 알 수 있다. 고정자 안의 회전 자계는 N극과 S극으로 나타낼 수 있는데, 이 자극은 공급되는 전류의 주기마

다 고정자 주위를 1회전함을 알 수 있다. 이런 식으로 고정자의 3상 전류가 균일한 회전 자계를 발생시킬 수 있다.

한편 어떤 방법으로든 회전자에서도 자계를 발생시킬 수 있다고 하자. 그러면 기기에는 두 가지 자계가 발생하고, 식 (3.22)에 의해 회전자 자계가 고정자 자계와 일치하려 하면서 토크가 발생하게 된다. 고정자 자계가 회전하면, 회전자 자계는 고정자 자계를 끊임없이 따라가려 할 것이다. 또한 식 (3.22)에 의하면, 두 자계 사이의 각이 수직에 가까울수록 회전자의 토크는 커질 것이다.

이제 회전자에서 자계를 발생시키는 방법을 알아보자. 교류 전동기는 회전자에 자계를 발생시키는 방법에 따라 동기 전동기와 유도 전동기로 나뉜다. [그림 3-10(a)]와 같이 회전자로 직류 전원 기반의 전자석 또는 영구자석을 사용하는 동기 전동기는 정상상태에서 회전자의 자계, 또는 회전자 자체가 일정한 각도를 유지하면서 고정자 자계를 따라가도록 되어 있다. [그림 3-10(b)]의 유도 전동기는 유도 작용으로 발생한 교류 전원에 의해 회전자의 자계를 형성한다. 동기 전동기의 경우에는 기계적인 속도가 회전 자계의 속도와 일치하지만, 유도 전동기의 경우에는 회전자의 속도가 회전 자계의 속도보다 느리다. 그렇지 않으면 유도기전력이 발생하지 않기 때문이다.

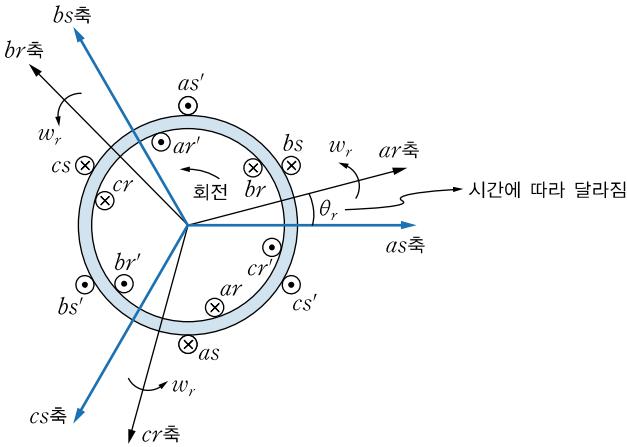


[그림 3-10] 동기 전동기와 유도 전동기의 회전 원리

지금까지 교류 전동기의 물리적인 동작 원리를 알아보았다. 이런 원리들을 수학적으로 표현하여 속도 및 토크 제어를 위한 모델식을 구해보자.

■ 모델링

교류 전동기에서의 기계적 토크 및 속도를 계산하기 위해서는 고정자와 회전자에 흐르는 전류와 외부 전압과의 관계식을 알아야 한다. 고정자와 회전자의 두 권선을 갖는 교류 전동기에서 두 권선 간 자속의 쇄교 정도를 나타내는 상호 인덕턴스는 회전자 속도 함수로, 시변 함수이다. [그림 3-11] 과 같이 고정자 권선은 정지해 있지만, 회전자 권선은 회전자와 함께 움직인다.



[그림 3-11] 고정자 권선과 회전자 권선 사이의 각

그러므로 전동기가 정지한 경우를 제외하면, 두 권선 간의 상대 위치 θ 는 시간에 따라 달라진다. 따라서 두 권선에 흐르는 전류가 일정하다고 하더라도, 두 권선에 쇄교되는 자속의 양은 시간에 따라 변하고, 이를 나타내는 상호 인덕턴스 역시 시간에 따라 변동하게 된다. 이러한 인덕턴스의 시변 특성으로 인하여, 교류 전동기의 전기적 모델을 나타내는 전압 방정식은 전동기가 정지한 경우를 제외하고는 다음과 같이 시변계수를 갖는 미분방정식으로 표현된다.

$$v_{abcs} = R_s i_{abcs} + \frac{d\lambda_{abcs}}{dt} \quad (3.24)$$

$$v_{abcr} = R_r i_{abcr} + \frac{d\lambda_{abcr}}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ (L_{sr})^T & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

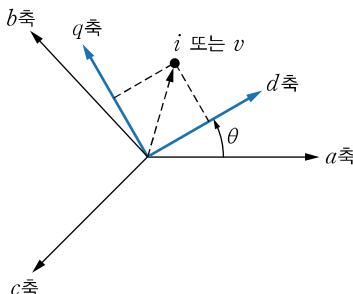
여기서 고정자 및 회전자의 전압, 전류, 자속을 $v_{abcs} = [v_{as} \ v_{bs} \ v_{cs}]^T$, $i_{abcs} = [i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs}]^T$, $v_{abcr} = [v_{ar} \ v_{br} \ v_{cr}]^T$, $i_{abcr} = [i_{ar} \ i_{br} \ i_{cr}]^T$, $\lambda_{abcs} = [\lambda_{as} \ \lambda_{bs} \ \lambda_{cs}]^T$, $\lambda_{abcr} = [\lambda_{ar} \ \lambda_{br} \ \lambda_{cr}]^T$ 로 표시했고, 고정자 저항과 회전자 저항은 다음과 같다.

$$R_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}, \quad R_r = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

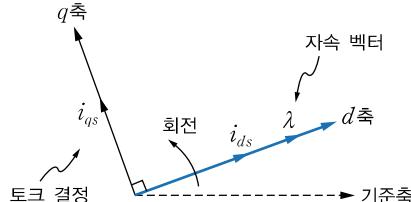
쇄교자속 식을 전압 방정식에 대입하면, 다음과 같이 인덕턴스와 전류의 행렬식으로 전압을 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} v_{abcs} \\ v_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \frac{d}{dt}L_s & \frac{d}{dt}L_{sr} \\ \frac{d}{dt}(L_{sr})^T & R_r + \frac{d}{dt}L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

교류 전동기의 모델식 (3.26)이 보기에는 매우 간단해 보이지만, 인덕턴스가 회전에 따라 변하기 때문에 해석과 제어는 쉽지 않다. 따라서 좌표 변환을 통해 회전과 상관없이 일정한 인덕턴스를 갖는 시불변 미분방정식으로 전환하는 게 좋다. 또 3상 전류에 의해 만들어지는 자계가 2차원 공간에 분포하므로, 3상으로 표현되는 교류 전동기의 물리량(전류, 자속 등)을 [그림 3-12]에서 보듯이 d 축과 q 축의 두 축으로 이루어진 직교 좌표계의 값으로 변환하여 다루는 게 편리하다. 한 축을 자속과 같은 물리량의 방향과 동기화시키면, 시변 인덕턴스 대신 시불변 인덕턴스를 사용할 수 있다. 교류 전동기의 경우, [그림 3-13]과 같이 보통 d 축을 자속과 일치시키고, q 축을 토크를 발생시키는 전류의 축으로 사용하면, 앞에서 직류 전동기에서 사용했던 제어 방법을 그대로 사용할 수 있다.



[그림 3-12] d 축과 q 축



[그림 3-13] 교류 전동기 제어 시, 자속 벡터와 일치시킨 d 축

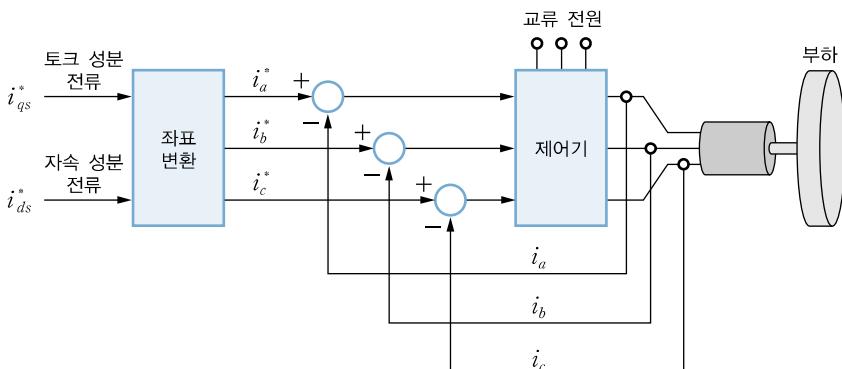
모델식 (3.24)~(3.25)로부터 임의의 각속도 w 로 회전하는 유도 전동기와 동기 전동기의 전압 모델 방정식과 쇄교자속 모델 방정식을 구하여, [표 3-8]에 정리하였다.

[표 3-8] 유도 전동기와 동기 전동기의 d 축과 q 축의 모델식

구분	전압 모델 방정식	쇄교자속 모델 방정식
유도 전동기	$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} - w\lambda_{qs}$	$\lambda_{ds} = L_s i_{ds} + L_m \lambda_{dr}$
	$v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} + w\lambda_{ds}$	$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + L_m \lambda_{qr}$
	$v_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d\lambda_{dr}}{dt} - (w - w_r) \lambda_{ds}$	$\lambda_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds}$
	$v_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d\lambda_{qr}}{dt} + (w - w_r) \lambda_{dr}$	$\lambda_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs}$
동기 전동기	$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} - w\lambda_{qs}$	$\lambda_{ds} = L_{ds} i_{ds} + \phi_f$
	$v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} + w\lambda_{ds}$	$\lambda_{qs} = L_{qs} i_{qs}$

[표 3-8]에서 밑에 첨자로 쓰인 s , r 은 각각 고정자 stator와 회전자 rotator를 의미한다. 동기 전동기 식에서 ϕ_f 는 영구자석의 자속 중에 고정자 권선에 쇄교하는 자속을 말한다.

유도 전동기의 경우, d 축과 q 축의 모델을 바탕으로 [그림 3-14]와 같은 토크 제어 시스템을 구성할 수 있다. 그 형태가 [그림 3-7]의 직류 전동기의 경우와 흡사하다는 것을 알 수 있을 것이다. d 축 전류는 자속 성분의 전류로, 직류 전동기의 I_f 와 유사한 역할을 한다. 한편 q 축 전류로 토크의 크기를 독립적으로 제어할 수 있다. 토크 제어 시, 자속의 크기는 토크 크기와 상관없이 일정하게 정격값으로 주어진다. d 축 전류와 q 축 전류의 기준값은 좌표 변환을 통하여 실제 고정자 권선에 흘려주어야 하는 3상 전류값의 기준값으로 변환되어 제어기에 인가된다.



[그림 3-14] 교류 전동기 제어 시스템

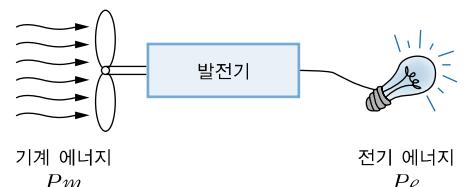
3.1.3 전력 시스템

이번에는 전기공학에서 전동기와 더불어 큰 학문적 분야를 이루는 전력 시스템에 대한 간단한 모델링을 다루어보자. 전력 시스템은 원하는 전기를 얻기 위해 수많은 제어기가 결합되어 있는 대규모 제어시스템이다. 따라서 전력 시스템은 적절하게 모델링된 시스템을 통하여 제어기 설계와 성능 평가가 이루어져야 하며, 또한 모델링을 통하여 시스템의 안정성을 검토할 수 있어야 한다. 안정성에 관한 이야기는 4장에서 자세하게 다룰 것이다.

이 절에서는 전력 시스템에 연결된 발전기가 어떤 원인으로 가속 또는 감속되었을 때, 이를 정상적인 상태로 회복시키려는 힘이 작용하는지, 즉 안정성이 보장되는지를 모델링을 통해 확인해볼 것이다. 또한 발전 과정에서 전압 변동과 주파수 변동에 관한 모델링을 통하여 무효 전력 제어와 유효 전력 제어에 대해 알아볼 것이다.

안정성 판별을 위한 모델링

[그림 3-15]와 같이 발전기는 스텁이나 바람과 같은 기계적인 입력을 받아 터빈과 연결된 발전기의 회전자를 회전시켜서 전력을 생산한다. 이때 회전자에 대한 기계적인 입력과 생성되는 전기적인 출력 간에 정확한 평형이 이루어질 수는 없다.



[그림 3-15] 기계 에너지를 전기 에너지로
변환시키는 발전기

■ 스윙 방정식

기계적인 입력과 전기적인 출력 간의 차이는 회전자의 가속력 또는 감속력으로 나타나고, 이를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_m - T_e \quad (3.27)$$

여기서 J 는 전체 시스템의 관성 모멘트, T_m 은 원동기에서 공급되는 기계적 토크, T_e 는 발전기에서 출력되는 전기적인 토크다. 정상상태에서는 $T_m = T_e$ 가 되므로, 회전자는 일정한 속도로 회전하게 된다. 발전기의 회전자 위치를 θ 라고 하면, 동기화된 속도 w_s 와 위상각 δ 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta = w_s t + \delta \quad (3.28)$$

회전자의 가속도는 다음과 같으며,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (3.29)$$

이를 사용하여 식 (3.27)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e \quad (3.30)$$

양변에 회전자 속도 w 를 곱하면,

$$Jw \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m w - T_e w = P_m - P_e$$

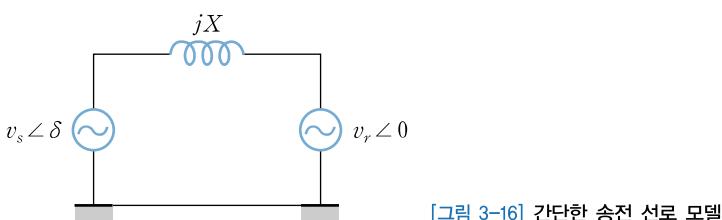
이다. w 는 동기화된 속도 w_s 와 그렇게 큰 차이가 없기 때문에 $Jw \approx Jw_s$ 라고 할 수 있다. 여기서 $M = Jw_s$ 인 상수를 정의하면 다음과 같다.

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad (3.31)$$

M 은 동기화된 상태에서의 각운동량을 의미하며, P_m 과 P_e 는 각각 기계적인 출력과 전기적 출력을 말한다. 이때 전기적 출력 P_e 는 송전 전력을 의미한다. 송전 전력은 전원에서 부하로 실제 전달되고 소비되는 유효 전력을 의미한다. [그림 3-16]과 같이 위상각 δ 를 사용하여 송전 선로의 송전단 전압을 $v_s \angle \delta$, 수전단 전압을 $v_r \angle 0$ 라 하고, 선로의 유도용량을 X 라 하면 송전 전력은 다음과 같다.

$$P_e = \frac{v_s v_r}{X} \sin \delta \quad (3.32)$$

따라서 큰 전기적 출력을 내려면 $\sin \delta$ 가 크도록 위상각이 조절되어야 한다.



식 (3.32)를 식 (3.31)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

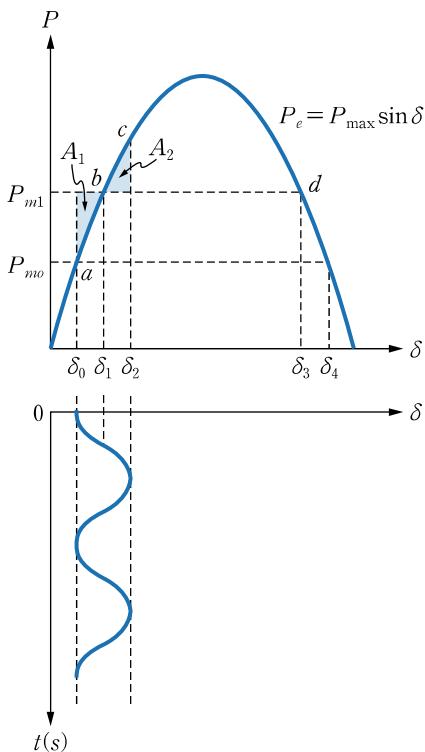
$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - \frac{v_s v_r}{X} \sin \delta \quad (3.33)$$

이 식을 스윙 방정식이라 부른다. 스윙 방정식은 전력 시스템의 안정성을 알아보는 데 매우 유용하게 사용된다.

■ 스윙 방정식을 사용한 안정성 판별

스윙 방정식을 사용하여 간단하게 안정성을 판단하고 해석하는 방법을 알아보자. 안정성은 4장에서 자세히 알아보겠지만, 여기에서는 관심 변수의 발산 여부 정도로만 알아두면 된다. 스윙 방정식은 $\sin \delta$ 항을 포함하는 비선형 방정식으로, 해 δ 가 발산하는지 아닌지를 알아보려면 좀 더 높은 수준의 수학이 필요하다. 그런 분석은 이 책의 범위를 넘어서기 때문에 여기서는 모델식 (3.33)에 대한 간단한 그래프 해석을 통해 안정성을 알아볼 것이다. 정량적인 방법은 아니지만, 개념 이해에는 꽤 유용한 방법이라고 생각한다.

식 (3.33)에서 알 수 있듯이 항상 $P_m X = v_s v_r \sin \delta$ 을 만족하는 δ 에서 평형점이 발생한다. 이때 [그림 3-17]과 같이 위상각 δ_0 에서 평형을 이루다가, 갑자기 기계적인 입력이 P_{mo} 에서 P_{m1} 으로 증가했다고 하자. 처음 P_{mo} 와 P_{m1} 의 차이는 회전자를 가속시키는 동력원이 되어 δ 를 증가시킨다. 그러다가 b 에 도달하여 δ 가 δ_1 보다 커지기 시작하면, P_e 가 P_m 보다 크기 때문에 회전자는 감속하게 된다. 따라서 동작점이 b 에서 c 로, 그 다음 b 로, 다음 a 로 돌아오는 동작을 계속 반복하면서, 위상각은 새로운 평형점 δ_1 주변에서 계속 진동하게 된다. 즉 발산하지 않고, 평형점 근방에서만 안정적으로 움직이게 된다.



[그림 3-17] 평형점 근방에서의 안정성과 불안정성

만약 위상각 δ_4 에서 균형을 이루었다고 하자. 갑자기 기계적인 입력이 P_{mo} 에서 P_{m1} 으로 증가하면 기계적 운동 에너지도 증가되어 새로운 균형점 δ_3 에서 멀어지는 방향으로 움직인다. 따라서 δ_0 에서 균형을 이룬 것과는 달리 위상각은 발산하게 된다.

좀 더 정량적인 분석을 위해 식 (3.33)을 약간 바꾸어 표현해보자. 식 (3.33) 양변에 $\frac{2d\delta}{dt}$ 를 곱하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M2 \frac{d\delta}{dt} \frac{d^2\delta}{dt^2} = 2 \left(P_m - \frac{v_s v_r}{X} \sin \delta \right) \frac{d\delta}{dt} \quad (3.34)$$

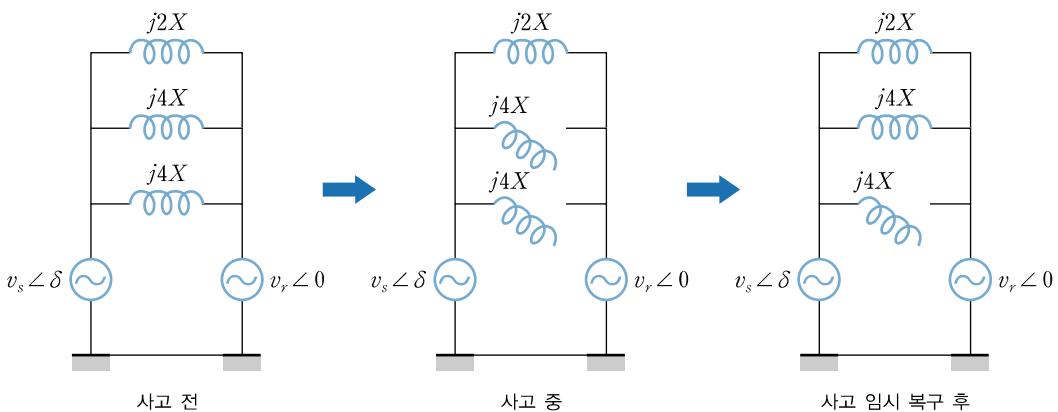
$$M \frac{d}{dt} \left[\frac{d\delta}{dt} \right]^2 = 2 \left(P_m - \frac{v_s v_r}{X} \sin \delta \right) \frac{d\delta}{dt}$$

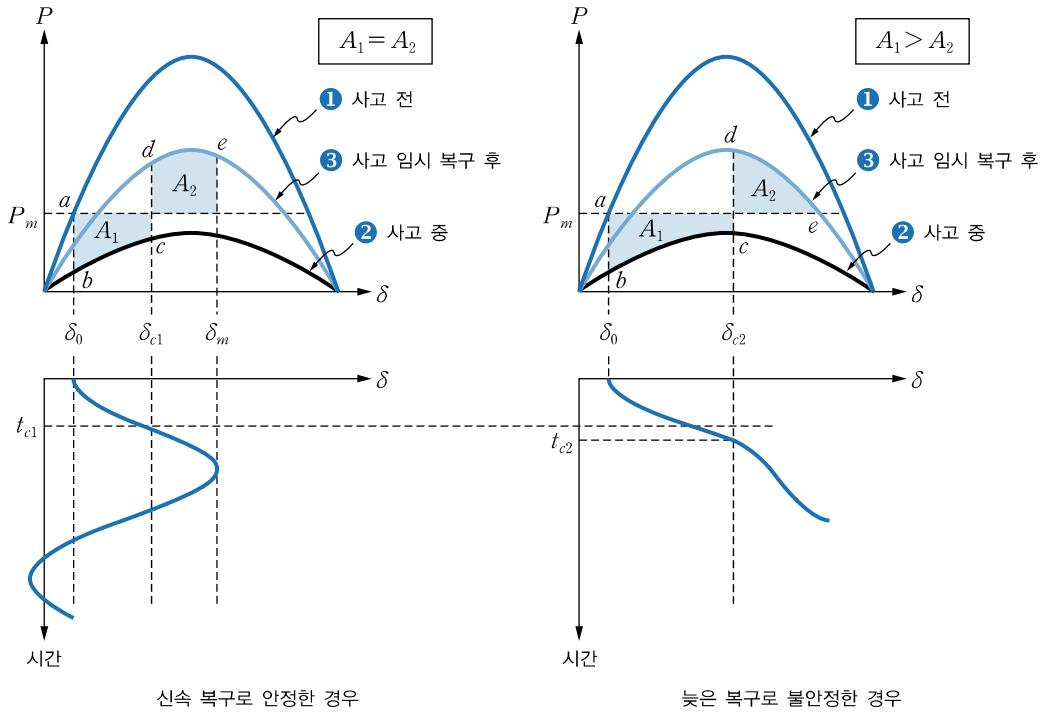
식 (3.34)를 적분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\frac{d\delta}{dt} \right]^2 = \int \frac{2}{M} \left(P_m - \frac{v_s v_r}{X} \sin \delta \right) d\delta \quad (3.35)$$

식 (3.35)가 의미하는 것은 적분값이 항상 0보다 커야한다는 점이다. 따라서 [그림 3-17]과 같이 한없이 δ 가 커지지 않고(한없이 δ 가 커지면 식 (3.35)의 적분값이 음이 된다.) $\frac{d\delta}{dt} = 0$ 이 되는 점(다시 균형점으로 돌아오기 시작하는 점)이 존재하여 δ 가 발산하는 현상을 막는다.

[그림 3-18]의 그래프에서 색이 칠해진 영역 A_1 과 A_2 의 넓이를 비교해보자. δ 가 δ_0 에서 δ_1 까지 변화할 때 회전자가 가속되면서 운동 에너지를 얻고, δ 가 δ_1 에서 δ_2 까지 변화할 때 회전자가 감속되면서 운동 에너지를 잃는다. [그림 3-18]과 같이, A_1 과 같은 넓이의 A_2 가 존재한다면 δ 는 발산하지 않고 진동할 것이다. [그림 3-18]과 같은 그래프를 사용하면 최대 허용 가능한 P_m 의 증가도 결정할 수 있다.





[그림 3-18] 안정성 해석을 위한 그래프 사용 방법

전력 시스템에서 사고가 일어났을 때 얼마나 빠른 시간에 사고를 처리하는가에 따라 위상각 δ 가 발산할 수도 있고(불안정), 범위 내에서 진동할 수도 있는데(안정), 이는 [그림 3-18]의 그래프로 쉽게 이해할 수 있다.

초기 시스템이 $P_e = P_m$ 과 $\delta = \delta_0$ 의 상태에서 동작하고 있었다고 하자. 정상인 경우에는 세 개의 병렬 선로가 있고, 총 유도용량은 X 라고 한다. 이 중 유도용량 $4X$ 인 두 개의 선로가 개방되었다고 하면, P_e 에 대한 그래프가 변하고, 동작점이 갑자기 a 에서 b 로 변한다. P_m 이 P_e 보다 크기 때문에 균형점을 찾아 δ 가 계속 증가한다. c 에 도달할 때 사고가 임시 복구되어 유도용량 $4X$ 인 한 개의 선로가 다시 연결된다면, 동작점은 갑자기 d 로 이동하게 된다. 이때는 P_e 가 P_m 보다 더 크기 때문에 회전자의 감속이 일어난다. 회전자 속도가 동기 속도보다 더 크기 때문에 δ 는 가속되는 동안 얻어진 운동 에너지가 전기 에너지로 소비될 때까지 연속적으로 증가한다. 동작점은 d 에서 $A_2 = A_1$ 가 될 때까지 이동하여 e 에 다다른다. 지점 e 에서 속도는 동기 속도 w_s 와 같고, δ 는 최댓값 δ_m 이 된다.

한편 사고 제거가 지연될 경우에는 P_m 쪽의 A_2 는 A_1 보다 작다. 동작점이 e 에 도달해도, 가속 기간 동안 얻은 운동 에너지가 아직 완전하게 소비되지 않는다. 결과적으로 속도는 여전히 동기 속도 w_s 보다 크고 δ 는 계속해서 증가한다. e 를 넘은 지점에서 P_e 는 P_m 보다 작고 회전자는 다시 가속되기 시작한다. 결국 회전자 속도와 위상각은 계속해서 증가하게 된다.

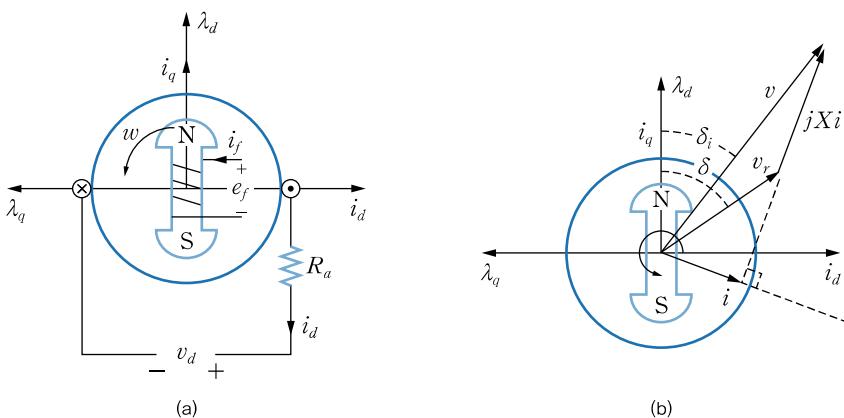
전압과 주파수 제어를 위한 모델링

지금까지는 스윙 방정식 (3.33)을 바탕으로 안정성을 판단하고 해석을 해보았다. 지금부터는 스윙 방정식 (3.33)을 동기 발전기 모델과 연결하여 전압과 주파수 제어에 유용한 모델식을 구해 볼 것이다. 식 (3.30)을 현실적인 동역학적 요소를 가미하여 다음과 같이 수정하자.

$$\frac{d\Delta w}{dt} = \frac{1}{J}(T_m - T_e - K_d \Delta w) \quad (3.36)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \Delta w$$

여기서 Δw 는 속도에서의 변동분에 대한 값이고, K_d 는 뎁핑 요소이다. 식 (3.30)에서는 $T_m - T_e$ 와 Δw 사이의 전달함수가 $\frac{1}{(J_s)}$ 이지만, 식 (3.36)과 같이 뎁핑 요소를 생각하면 $\frac{1}{(J_s + K_d)}$ 이 된다. 지금부터는 [그림 3-19]의 동기 발전기 구조에서 전압과 주파수 제어에 유용한 모델을 구해보자. d 축과 q 축에 관한 정의는 교류 전동기의 경우와 동일하다. d 축은 자속의 방향과 일치하고, q 축은 d 축에서 양의 방향으로 90도 방향이다.



[그림 3-19] 동기 발전기의 해석을 위한 $d-q$ 축 모델

고정자의 $d-q$ 축 쇄교자속 λ_d , λ_q 와 회전자의 쇄교자속 λ_f 는 [그림 3-19]를 바탕으로 다음과 같이 쉽게 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned}\lambda_d &= -L_l i_d + L_{ads}(-i_d + i_f) = -L_l i_d + \lambda_{ad} \\ \lambda_q &= -L_l i_q + L_{aqs}(-i_q) = -L_l i_q + \lambda_{aq} \\ \lambda_f &= L_{ads}(-i_d + i_f) + L_f i_f = \lambda_{ad} + L_f i_f\end{aligned}\quad (3.37)$$

여기서 L_l 은 누설 인덕턴스이고, L_{ads} 와 L_{aqs} 는 상호 인덕턴스이다. i_f 는 자석의 세기를 조절할 수 있는 계자 전류이고, e_f 는 해당 전압이다. [그림 3-19]에서 고정자는 발전기 모델(전력 생산을 양으

로 간주한다.)을 채택하고 있는데, 렌츠의 법칙에 따라 음의 인덕턴스를 사용함을 주의한다. 고정자와 다르게 회전자는 부하 모델(전력 소모를 양으로 간주한다.)을 사용한다. [그림 3-19]에서 그림의 간결성을 위해 i_q 의 흐름 방향과 v_q 는 표시하지 않았다. 식 (3.37)의 세 번째 식에서 계자 전류 i_f 를 구하면 다음과 같다.

$$i_f = \frac{\lambda_f - \lambda_{ad}}{L_f} \quad (3.38)$$

이 관계식을 이용하면, d 축의 상호 쇄교자속은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_{ad} &= -L_{ads}i_d + L_{ads}i_f \\ &= -L_{ads}i_d + \frac{L_{ads}}{L_f}(\lambda_f - \lambda_{ad}) \\ &= L_{ads}^* \left(-i_d + \frac{\lambda_f}{L_f} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

여기서 $L_{ads}^* = \frac{1}{(1/L_{ads} + 1/L_f)}$ 이다. 속도의 변화량을 무시하고 식 (3.37)을 사용하면, 고정자의 전압 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{d\lambda_d}{dt} - R_a i_d - \lambda_q w \\ &\approx -R_a i_d + (L_l i_q - \lambda_{ad})w \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} v_q &= \frac{d\lambda_q}{dt} - R_a i_q + \lambda_d w \\ &\approx -R_a i_q - (L_l i_d - \lambda_{ad})w \end{aligned} \quad (3.41)$$

이 전압 방정식은 [표 3-8]의 동기 전동기 $d-q$ 축 모델과 비교하여, 전류의 부호만 반대일 뿐 나머지 부분은 동일하다. 식 (3.40)~(3.41)의 v_d 와 v_q 는 [그림 3-16]과 같이 수신 전압 v_r 과 관계되어 있다. 그 관계식을 알아보기 위해 다음과 같이 정의하면,

$$\begin{aligned} v &= v_d + jv_q \\ v_r &= v_{rd} + jv_{rq} \\ i &= i_{d+j} i_q \end{aligned} \quad (3.42)$$

아래와 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} v &= v_r + jX_i \\ v_d + jv_q &= (v_{rd} + jv_{rq}) + jX(i_d + ji_q) \end{aligned} \quad (3.43)$$

d 축과 q 축으로 나누어 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_d &= -X i_q + v_{rd} \\ v_q &= X i_d + v_{rq} \end{aligned} \quad (3.44)$$

식 (3.40)~(3.41)과 식 (3.44)에서 v_d 와 v_q 를 소거하고, λ_{ad} 와 λ_{aq} 의 전류 관계식 (3.37)과 (3.39)를 사용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{(X + L_{aqs} + L_l) \left[\lambda_f \left(\frac{L_{ads}}{L_{ads} + L_f} \right) - v_{rq} \cos \delta \right] - R_a v_{rd} \sin \delta}{R_a^2 + (X + L_{aqs} + L_l)(X + L_{ads}^* + L_l)} \\ i_q &= \frac{R_a \left[\lambda_f \left(\frac{L_{ads}}{L_{ads} + L_f} \right) - v_{rq} \cos \delta \right] + (X + L_{ads} + L_l) v_{rd} \sin \delta}{R_a^2 + (X + L_{aqs} + L_l)(X + L_{ads}^* + L_l)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

식 (3.45)와 같은 복잡한 비선형 관계식을 동작점 부근에서의 단순한 선형식으로 나타내 보자.

$$\begin{aligned} \Delta i_d &= c_1 \Delta \delta + c_2 \Delta \lambda_f \\ \Delta i_q &= c_3 \Delta \delta + c_4 \Delta \lambda_f \end{aligned} \quad (3.46)$$

여기서 c_1, c_2, c_3, c_4 는 동작점 부근에서 구한 적당한 선형 계수이다. 식 (3.37)의 쇄교자속 λ_{ad} 와 λ_{aq} 의 선형화는 다음과 같이 이루어진다.

$$\Delta \lambda_{ad} = L_{ads}^* \left(-\Delta i_d + \frac{\Delta \lambda_f}{L_f} \right) = \left(\frac{1}{L_f} - c_2 \right) L_{ads}^* \Delta \lambda_f - c_1 L_{ads}^* \Delta \delta \quad (3.47)$$

$$\Delta \lambda_{aq} = -L_{aqs} \Delta i_q = -c_4 L_{aqs} \Delta \lambda_f - c_3 L_{aqs} \Delta \delta \quad (3.48)$$

식 (3.38)의 계자 전류는 식 (3.39)를 사용하여 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta i_f &= \frac{\Delta \lambda_f - \Delta \lambda_{ad}}{L_f} \\ &= \frac{1}{L_f} \left(1 - \frac{L_{ads}^*}{L_f} + c_2 L_{ads}^* \right) \Delta \lambda_f + \frac{1}{L_f} c_1 L_{ads}^* \Delta \delta \end{aligned} \quad (3.49)$$

발생하는 전자기적 반작용 토크는 다음과 같다.

$$T_e = \lambda_d i_q - \lambda_q i_d = \lambda_{ad} i_q - \lambda_{aq} i_d \quad (3.50)$$

반작용 토크의 방향은 발전기 회전자의 방향과 반대이다¹. 또한 토크 식 (3.50)을 선형화하면 다음

과 같다.

$$\Delta T_e = \lambda_{ad0} \Delta i_q + i_q \Delta \lambda_{ad} - \lambda_{aq0} \Delta i_d - i_d \Delta \lambda_{aq} \quad (3.51)$$

위에서 구한 Δi_q , Δi_d , $\Delta \lambda_{ad}$, $\Delta \lambda_{aq}$ 를 식 (3.51)에 대입하면, 다음과 같이 ΔT_e 를 $\Delta \delta$ 와 λ_f 에 대한 선형화된 식으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta T_e = K_1 \Delta \delta + K_2 \Delta \lambda_f \quad (3.52)$$

여기서 K_1 , K_2 는 선형화를 통해 얻은 적당한 상수이다. 계자 전류 공급원에 대해서는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$e_f = \frac{d\lambda_f}{dt} + R_f i_f \quad (3.53)$$

지금까지 유도한 식 (3.36), (3.51), (3.52), (3.53)을 근거로 다음과 같은 상태방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\lambda}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta \delta \\ \Delta \lambda_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_m \\ \Delta e_f \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

여기서 A_{ij} 는 위의 식들로부터 계산되는 항이다. 계산해보면 A_{13} 와 A_{32} 가 크지 않음을 알 수 있다. 따라서 ΔT_m 으로 Δw_r , $\Delta \delta$ 를 거의 독립적으로 제어하고, Δe_f 로 $\Delta \lambda_f$ 를 거의 독립적으로 제어할 수 있음을 알 수 있다. $\Delta \lambda_f$ 는 사실 고정자 전압 v 의 변동과 관련이 깊다. 이를 알아보기 위해 고정자 의 $d-q$ 축 전압 $v = v_d + jv_q$ 를 균형점 $v_0 = v_{d0} + jv_{q0}$ 부근에서 다음과 같은 미소 식으로 표현한다.

$$\begin{aligned} (v_0 + \Delta v) &= (v_{d0} + \Delta v_d)^2 + (v_{q0} + \Delta v_q)^2 \\ v_0 \Delta v &= v_{d0} \Delta v_d + v_{q0} \Delta v_q \\ \Delta v &= \frac{v_{d0}}{v_0} \Delta v_d + \frac{v_{q0}}{v_0} \Delta v_q \end{aligned}$$

식 (3.40)~(3.41)에 있는 식을 다음과 같이 미소량으로 표현하고, 이 식을 위의 식에 대입한다.

$$\begin{aligned} \Delta v_d &= -R_a \Delta i_a + L_l \Delta i_q - \Delta \lambda_{aq} \\ \Delta v_q &= -R_a \Delta i_q - L_l \Delta i_d + \Delta \lambda_{ad} \end{aligned}$$

최종적으로 Δv 를 $\Delta \delta$ 와 $\Delta \lambda_f$ 에 대해 선형적인 식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta v = K_5 \Delta \delta + K_6 \Delta \lambda_f \quad (3.55)$$

1 플레밍의 원손 법칙을 사용하여 확인해보라.

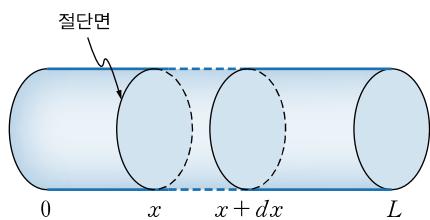
K_5 는 K_6 에 비해 미미한 값을 가지기 때문에, $\Delta\lambda_f$ 를 통해 거의 선형적으로 전압 변동 Δv 를 일으킬 수 있다. 식 (3.54)와 식 (3.55)에서 볼 수 있듯이 ΔT_m 을 사용하여 주파수 제어가 가능하고, Δe_f 를 사용하여 전압 제어가 가능하다. 따라서 주파수 제어와 전압 제어가 거의 독립적으로 이루어질 수 있음을 알 수 있다.

3.1.4 확산과 파동

이 절에서는 입출력에 기반을 둔 시스템이라는 관점에서 확산방정식과 파동방정식에 대한 수학적인 모델을 소개한다.

확산방정식

우선 열전도 시스템을 모델로 하여 확산방정식을 유도해보자. [그림 3-20]과 같이 길이가 L 인 원형 막대의 단면적을 A 라 하고, 막대의 길이 방향을 x 축으로 정의하자. 각 x 지점에서 시간 t 일 때의 온도를 $T(x, t)$ 라 표시한다.



[그림 3-20] 확산방정식을 위한 모델

온도 $T(x, t)$ 가 만족하는 미분방정식을 유도하기 위하여, 열전도의 두 가지 실험법칙을 소개한다.

- ① 질량 m 인 물체에서 열량 Q 는 다음과 같다. 단 T 는 온도, c 는 비열이다.

$$Q = cmT \quad (3.56)$$

- ② [그림 3-20]에서 단면을 지나는 시간당 열 흐름 $\frac{dQ}{dt}$ 는 단면의 넓이 A 와, 온도 분포의 x 에 관한 편미분함수에 비례한다.

$$\frac{dQ}{dt} = -KA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.57)$$

여기서 K 는 비례 상수이다. 식 (3.57)은 위치에 따른 온도의 차이가 심할 때 열 흐름이 활발함을 의미한다. 열은 온도가 낮은 방향으로 흐르기 때문에, 식 (3.57)의 음의 부호는 $\frac{dQ}{dt} < 0$ (열이 우측으로 전달된다.)에 대해 양이고, $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ (열이 좌측으로 전달된다.)에 대해서 음이 되도록 하기 위해 추가되었다. 또 간단한 수식 표현을 위해 다음과 같은 표시를 사용한다.

$$\frac{dQ}{dt} = Q_t, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = T_x, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = T_t$$

[그림 3-20]에 표시된 x 와 $x + \Delta x$ 사이의 질량은 밀도 ρ 를 사용하여 $\rho(A\Delta x)$ 로 표시할 수 있으므로, x 와 $x + \Delta x$ 사이의 열량은 식 (3.56)에 의해

$$Q = c\rho A \Delta x T \quad (3.58)$$

이다. x 와 $x + \Delta x$ 사이의 총 열 흐름 Q_t 는 들어오는 열 흐름에서 나가는 열 흐름의 차이로 생각할 수 있기 때문에 $-KA T_x(x, t) - (-KA T_x(x + \Delta x, t))$ 와 같이 쓸 수 있다. 따라서 식 (3.58)의 양변을 시간에 대해 미분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c\rho A \Delta x T_t = Q_t = KA [T_x(x + \Delta x, t) - T_x(x, t)] \quad (3.59)$$

정리하면 다음과 같다.

$$\frac{K}{c\rho} \frac{T_x(x + \Delta x, t) - T_x(x, t)}{\Delta x} = T_t \quad (3.60)$$

이때 $\Delta x \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{K}{c\rho} T_{xx} = k T_{xx} = T_t \quad (3.61)$$

여기서 $k = \frac{K}{c\rho}$ 이며, 이를 열화산률이라 부른다.

이미 공학수학과 같은 과목에서 식 (3.61)과 같은 방정식의 해법을 배웠으리라 생각한다. 여기에서는 입출력 변수에 대해서 식 (3.61)을 어떻게 표현할 것인지에 대해 살펴볼 것이다. 좀 더 구체적으로 확산방정식 모델 (3.61)에서 $k = 1$ 이고, $0 \leq x \leq 1$ 인 구간을 고려하자. 초기 온도는 0이고, $x = 0$ 에서의 온도도 0으로 고정되어 있다고 가정하자. $x = 1$ 에서 시간 $t > 0$ 일 때의 온도가 시간에 따라 변하는 함수 $u(t)$ 로 주어진다고 할 때, 특정 위치 x 에서의 온도를 관측하려고 한다. 이때 입력 $u(t)$ 로부터 출력 $T(x, t)$ 로의 전달함수를 구해보자.

우선 변수 t 에 관한 온도 함수 $T(x, t)$ 의 라플라스 변환 $\mathbf{T}(x, s)$ 는 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{T(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} T(s, t) dt = \mathbf{T}(x, s) \quad (3.62)$$

$x = 0$ 과 $x = 1$ 에서의 경계조건으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{T}(0, s) = 0, \quad \mathbf{T}(1, s) = U(s) \quad (3.63)$$

또한 식 (3.61)의 우변에 있는 $T_t(x, t)$ 의 라플라스 변환은

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} T(x, t)\right\} &= s \mathcal{L}\{T(x, t)\} - T(x, 0) \\ &= \mathbf{T}(x, s) - T(x, 0) \end{aligned} \quad (3.64)$$

와 같다. 초기 온도가 0이라고 했으므로, $T(x, 0) = 0$ 이다. 이를 사용하여 식 (3.61)의 양변을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} \\ \frac{d^2 \mathbf{T}}{dx^2} &= s \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3.65)$$

이차 상미분방정식 (3.65)의 일반해는

$$\mathbf{T}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad (3.66)$$

이며, 경계조건인 식 (3.63)을 만족하기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(0, s) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \mathbf{T}(1, s) &= c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = U(s) \end{aligned} \quad (3.67)$$

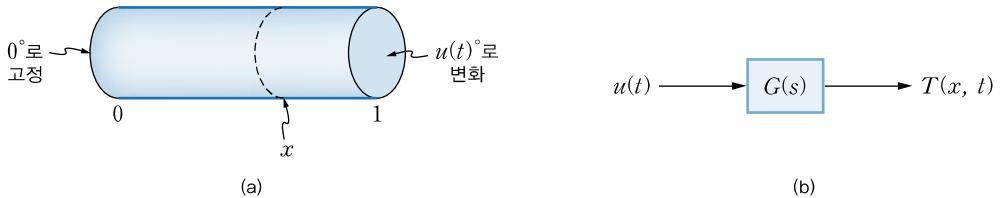
$c_1 = U(s)/(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}})$, $c_2 = -U(s)/(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}})$ 이므로, 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{T}(x, s) = \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh(\sqrt{s})} U(s) \quad (3.68)$$

따라서 우리가 구하고자 하는 최종적인 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{\mathbf{T}(x, s)}{U(s)} = \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh(\sqrt{s})} \quad (3.69)$$

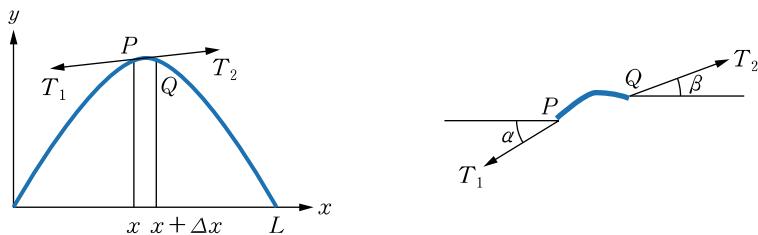
[그림 3-21(b)]에 블록선도로 입출력과 전달함수가 표현되어 있다.



[그림 3-21] 열전달 시스템에서의 전달함수 표현

파동방정식

이번에는 파동방정식을 유도해보자. 파동방정식은 기타나 북과 같이 주변에서 흔히 보이는 시스템에서부터 눈에 보이지 않는 양자역학 분야까지 그 응용 분야가 매우 넓다. 직관적인 설명을 위해 기타 줄과 같은 현을 생각해보자. x 축에 두 점, 예컨대 $x = 0$ 과 $x = L$ 사이에 길이 L 인 현이 팽팽하게 설치되어 있다. 다음 그림과 같이 현의 각 점은 x 축에 대해 수직인 방향으로 운동한다고 가정하고, $t > 0$ 일 때 x 축에서부터 측정된 수직 변위를 $Y(x, t)$ 로 정의한다.



[그림 3-22] 진동하는 현의 미소 구간에서의 운동

미소 구간 $[x, x + \Delta x]$ 의 현에 작용하는 장력을 T_1, T_2 라 할 때, 수평 성분은 서로 같아야 하므로 다음이 성립한다.

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T \quad (3.70)$$

α 와 β 는 거의 0에 가깝고, T 는 줄의 양 끝이 당겨주는 힘(장력)과 거의 같은 값으로 모든 지점에서 동일하다고 가정한다. 수직 성분의 힘은 $[x, x + \Delta x]$ 상의 질량 $\rho \Delta s \approx \rho \Delta x$ 에 대해 뉴턴의 제2법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (3.71)$$

식 (3.71)의 양변을 T 로 나누면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

$\tan \beta$ 와 $\tan \alpha$ 는 x 와 $x + \Delta x$ 에서의 기울기를 의미하므로

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_x = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

이고, Δx 로 양변을 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면, 최종적인 파동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (3.72)$$

여기서 $c = \sqrt{T/\rho}$ 이다.

이제 식 (3.72)의 파동방정식의 입출력 관계를 알아보자. $x = 0$ 에서 시간에 따라 현의 높이를 $f(t)$ 로 움직인다고 하면, 특정 위치 x 에서의 시간에 따른 높이 $Y(x, t)$ 는 어떻게 될 것인가? 이를 구하기 위해 입력 $f(t)$ 와 출력 $Y(x, t)$ 에 대한 전달함수를 구해보자.

우선 초기 조건으로 $Y(0, t) = f(t)$ 이고, 초기 위치와 초기 속도는 $Y(x, 0) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0$ 으로 주어진다. x 에서의 시간 변수 t 에 관한 높이 함수 $Y(x, t)$ 의 라플라스 변환 $\mathbf{Y}(x, s)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{L}\{Y(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} Y(x, t) dt = \mathbf{Y}(x, s)$$

$x = 0$ 과 $x = \infty$ 에서 경계조건으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Y}(0, s) = F(s), \quad \mathbf{Y}(\infty, s) = 0 \quad (3.73)$$

여기서 $F(s) = \mathcal{L}\{f(s)\}$ 이고, 현의 길이 L 이 충분히 길다고 생각하여 $\mathbf{Y}(\infty, s) = 0$ 이라고 설정 한다. 한편 식 (3.72)의 우변에 있는 식의 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x, t) \right\} = s^2 \mathbf{Y}(x, s) - s \mathbf{Y}(x, 0) - \frac{\partial Y}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

초기 위치와 초기 속도가 모두 0이므로, 식 (3.72)의 양변을 라플라스 변환하면,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} &= \mathcal{L} \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right\} \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} &= \frac{s^2}{c^2} Y\end{aligned}\tag{3.74}$$

이다. 따라서 식 (3.74)의 일반해는 다음과 같다.

$$Y(x, s) = c_1 e^{\frac{s}{c}x} + c_2 e^{-\frac{s}{c}x}\tag{3.75}$$

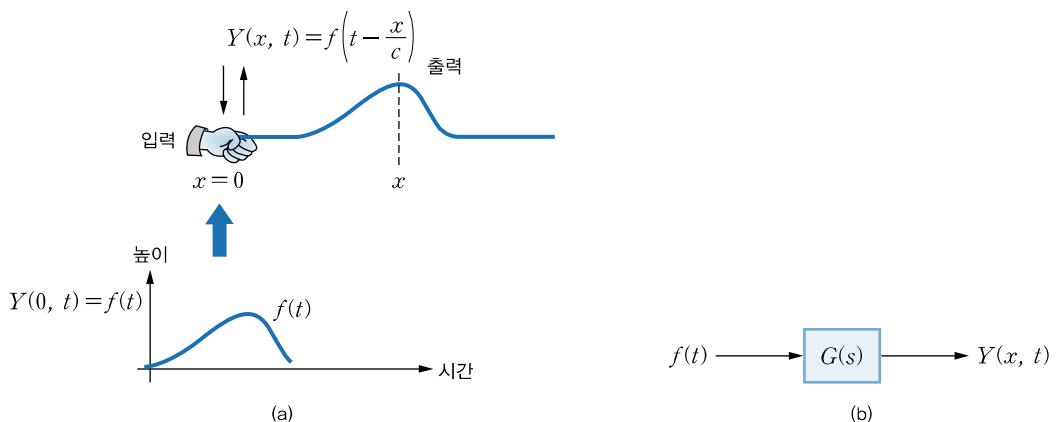
이때 경계조건인 식 (3.73)을 만족하기 위해서는 $c_1 = 0$, $c_2 = F(s)$ 가 되어야 하므로

$$Y(x, s) = e^{-\frac{s}{c}x} F(s)\tag{3.76}$$

이다. 특히 라플라스 변환한 식 (3.75)가 수렴하기 위해서는 s 가 양수여야 하므로, $c_1 = 0$ 으로 정했다. 따라서 우리가 구하고자 하는 최종적인 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(x, s)}{F(s)} = e^{-\frac{s}{c}x}\tag{3.77}$$

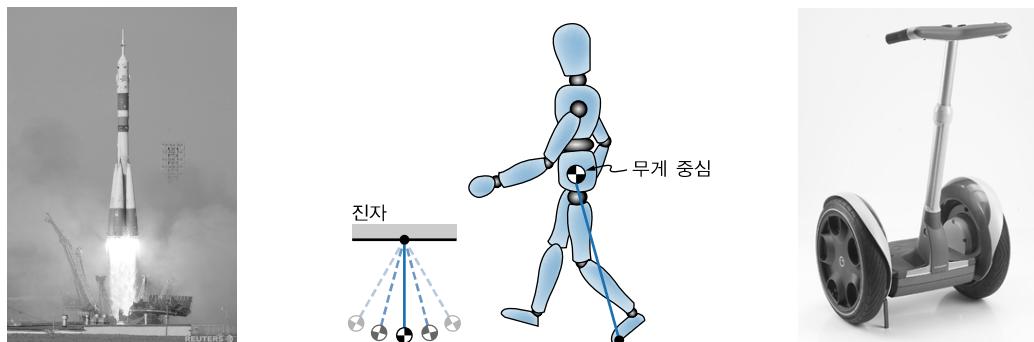
식 (3.77)의 전달함수는 비록 유리함수 형태는 아니지만, 입력으로부터 출력을 매우 쉽게 구할 수 있는 형태이다. [그림 3-23(a)]와 같이 입력 함수에 위치 x 와 비례하는 만큼의 시간 지연만 하면 출력이 얻어진다. 한편 [그림 3-23(b)]에 블록선도로 입출력과 전달함수가 표현되어 있다. 전자기파의 경우 지수 $\frac{s}{c}$ 는 복소수 $\alpha + j\beta$ 와 같이 표시되기도 하는데, α 는 감쇠상수, β 는 위상상수로 정현파의 입력을 감쇠하고, 위상을 변화시킨다. 전기/전자공학을 전공하는 독자는 전자기학에서 관련 내용을 배웠으리라 생각한다.



[그림 3-23] 파동 전달 시스템에서의 전달함수 표현

3.1.5 진자 시스템

진자 시스템은 [그림 3-24]와 같이 미사일이나 로켓 발사, 2족 로봇 제어, 크레인 시스템 제어 등을 위해 고안된 간단한 모델로 제어공학에서 자주 사용된다. 특히 주변에서 가끔 볼 수 있는 세그웨이² Segway라는 육상 교통수단도 진자 시스템을 응용하여 넘어지지 않도록 제어한 것이다. 진자 시스템은 불안정한 시스템이기 때문에, 제어 알고리즘을 구현할 때 주의해야 할 사항들이 여럿 발생하는데, 이러한 부분이 학습 동기를 부여할 수 있어서 제어 수업에서도 많이 다뤄지고 있다. 또 3.5절에서 배울 선형화 과정을 통해 진자 시스템에 대한, 비교적 제어하기 쉬운 선형 모델도 얻을 수 있어서 제어공학 입문 과정에 적합하다. 가장 단순한 직선형 진자 시스템 외에도 매우 다양한 형태의 진자 시스템이 개발되었고, 더 나아가 연구 목적으로 더욱 도전적인 제어 문제들이 등장하고 있다. 여기에서는 직선형, 회전형, 이단 진자 시스템의 모델링에 관하여 알아보겠다.



[그림 3-24] 진자 시스템으로 모델링되는 시스템들

직선형 진자 시스템

DC 모터에 연결된 바퀴가 회전하면서 지면을 밀고 그로부터 추진력이 발생하는 카트 기반의 도립진자 시스템을 생각해보자. 시스템 전체 모습과 관련 변수들이 [그림 3-25]에 나타나 있다.

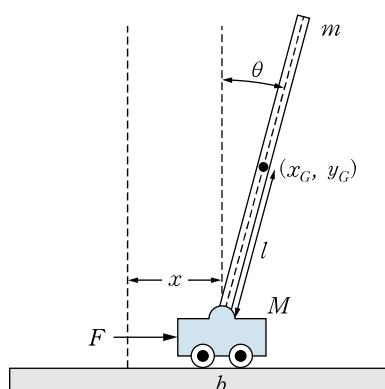
관련된 물리 변수는 다음과 같다.

M : 카트의 질량

m : 진자의 질량

θ : 진자와 지면에 대한 법선이 이루는 각

x : 초기 위치에서 현재 카트의 중심점까지의 변위



[그림 3-25] 도립진자 시스템과 관련 변수들

² [그림 3-24]의 맨 오른쪽 참고

l : 진자의 무게 중심에서 회전축까지의 거리

F : 카트에 가해지는 힘

b : 카트와 지면과의 마찰계수

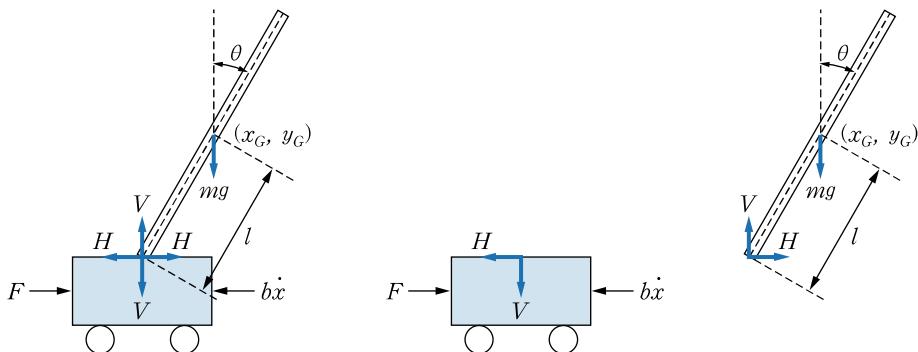
진자 막대의 무게 중심의 좌표는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}x_G &= x + l \sin \theta \\y_G &= l \cos \theta\end{aligned}\quad (3.78)$$

무게 중심은 이론적으로 또는 실험적으로 구할 수 있으며, 그에 따라 l 도 쉽게 결정된다. x_G 와 y_G 의 시간에 대한 일차 미분과 이차 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{x} + l(\cos \theta) \dot{\theta} \\ \dot{y}_G &= -l(\sin \theta) \dot{\theta} \\ \ddot{x}_G &= \ddot{x} - l(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + l(\cos \theta) \ddot{\theta} \\ \ddot{y}_G &= -l(\cos \theta) \dot{\theta}^2 - l(\sin \theta) \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (3.79)$$

지금부터는 [그림 3-25]와 같은 진자 시스템에서 발생하는 모든 역학적인 힘을 분석해보자. [그림 3-26]은 카트와 진자 막대의 자유 물체도를 나타내고 있다.



[그림 3-26] 도립진자 시스템에 대한 자유 물체도

진자가 카트에 연결된 부분에서 발생하는 힘은 시스템 내부의 힘, 즉 내력이므로 모두 합산하면 0이 된다. 카트와 진자 막대를 분리하여 각각 자유 물체도를 그려보면, 카트에서 고려해야 할 힘은 외부에서 가한 힘 F , 마찰력 $b\dot{x}$, 수평 방향 힘 H , 수직 방향 힘 V 이다. 이 중에서 수직 방향 힘은 지면에서 발생하는 반작용 힘에 의해 상쇄되므로, 카트에서는 수평 방향의 힘만 고려하면 된다. 따라서 카트의 수평 운동은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$M\ddot{x} = F - (H + b\dot{x}) \quad (3.80)$$

진자 막대에 전달되는 힘은 진자 막대의 수평 및 수직 운동과 회전 운동을 발생시킨다. 진자 막대의 무게 중심의 수평 운동은 다음과 같다.

$$H = mx_G^{\ddot{}} = m\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} \quad (3.81)$$

진자 막대의 무게 중심의 수직 운동은 다음과 같다.

$$V - mg = my_G^{\ddot{}} = -ml(\cos \theta)\dot{\theta}^2 - ml(\sin \theta)\ddot{\theta} \quad (3.82)$$

또 힘 V 와 H 에 의해 발생하는, 무게 중심에 대한 진자 막대의 회전 운동은 다음과 같다.

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (3.83)$$

여기서 I 는 무게 중심에 대한 진자 막대의 관성 모멘트이다. 식 (3.81)과 식 (3.82)를 식 (3.83)에 대입하여 정리하면 최종적으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml(\cos \theta)\ddot{x} = mg l \sin \theta \quad (3.84)$$

$H = mx_G^{\ddot{}}$ 를 식 (3.80)에 대입하여 정리하면,

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + mx_G^{\ddot{}} = F \quad (3.85)$$

이고, 여기에 다시 식 (3.79)의 \ddot{x}_G 를 대입하면 다음과 같다.

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} = -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \quad (3.86)$$

따라서 식 (3.84)와 식 (3.86)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} ml \cos \theta & I + ml^2 \\ M + m & ml \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg l \sin \theta \\ -b\dot{x} + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + F \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

이때 $F = 0$, 즉 가해지는 힘 F 가 없고, 시간에 따른 변화도 없어서 $\dot{x} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ 일 때, 식 (3.87)을 만족하는 θ 가 두 개 있다. 이를 균형점이라고 부르는데, 나중에 선형화를 배울 때 좀 더 자세히 언급 할 것이다. 이 진자 시스템에는 $\theta = 0$ 과 $\theta = \pi$ 의 2개의 균형점이 존재하는데, $\theta = \pi$ 는 안정한 균형 점인 반면, $\theta = 0$ 은 불안정한 균형점에 해당한다. 상식적으로 당연한 결과다. $\theta = \pi$ 이면 아래쪽으로 늘어진 상태이므로 진동하면서 서서히 멈춰 설 것이다. 한편 $\theta = 0$ 이면 진자가 수직으로 서있는 상태이므로, 금방 옆으로 쓰러지면서 아래쪽으로 떨어질 것이다. 이런 안정성에 대해서도 추후에 더 자세히 다룰 것이다.

$\theta = 0$ 인 경우에 다음과 같이 근사화해보자.

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \theta \dot{\theta}^2 \approx 0 \quad (3.88)$$

이를 적용하면 다음과 같은 최종적인 선형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} ml & I + ml^2 \\ M + m & ml \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg l \theta \\ -bx + F \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$x_1 = x, x_2 = \theta, x_3 = \dot{x}, x_4 = \dot{\theta}$ 와 같이 상태변수를 정하고, F 를 입력 변수, x_1 과 x_2 를 출력 변수라 하면, 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

여기서 $A_{32}, A_{33}, A_{42}, A_{43}, B_3, B_4$ 는 다음과 같아 주어진다.

$$A_{32} = \frac{m^2 l^2 g}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}, \quad A_{33} = \frac{b(I+ml^2)}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}$$

$$A_{42} = \frac{-(M+m)mg l}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}, \quad A_{43} = \frac{-ml b}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)} \quad (3.91)$$

$$B_3 = \frac{-(I+ml^2)}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}, \quad B_4 = \frac{ml}{(ml)^2 - (M+m)(I+ml^2)}$$

이번에는 전달함수를 구해보자. 선형화된 식 (3.89)의 양변을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} ml & I + ml^2 \\ M + m & ml \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 X(s) \\ s^2 \Theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg l \Theta(s) \\ -bs X(s) + F \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

여기서 $X(s), \Theta(s)$ 는 각각 x 와 θ 의 라플라스 변환이다. $X(s)$ 와 $\Theta(s)$ 에 대하여 정리하고, 두 전달함수 $\frac{X(s)}{F(s)}$ 와 $\frac{\Theta(s)}{F(s)}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{X(s)}{F(s)} \\ \frac{\Theta(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mls^2 & (I + ml^2)s^2 - mgl \\ (M + m)s^2 + bs & mls^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

지금까지는 입력을 기계적인 힘으로만 생각했는데, 실제 제어에서는 힘을 전기적인 에너지원으로부터 공급받아야 한다. 따라서 모터에 인가되는 전압과 힘 사이의 관계를 모델링하여 반영해야 한다. 우리는 이미 3.1.2절에서 DC 모터에 인가되는 전압과 그로 인해 발생하는 토크 사이의 관계식을 살펴본 바 있다. 모터에 의해 발생하는 토크는 $T_m = Ki$ 와 같이 계자 권선에 흐르는 전류 i 에 비례 한다. 여기서 K 는 토크 상수이며 앞에서 설명하였듯이 이 값은 유도기전력 상수와 같다. 기어비가 K_g 인 기어 박스를 사용할 경우 최종 토크는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$T = K_g T_m = K_g Ki \quad (3.94)$$

기어 박스에 연결된 바퀴의 반경을 r 이라고 하면, 모터가 바퀴를 통해 지면을 미는 힘 F 는 다음과 같다.

$$F = \frac{T}{r} = \frac{K_g T_m}{r} = \frac{K_g K i}{r} \quad (3.95)$$

위에서 입력 변수로 사용한 기계적인 힘 F 와 전기적인 변수 i 와의 관계는 식 (3.95)와 같으므로, 이 전류와 외부에서 전기자에 가하는 전압과의 관계를 밝히면 최종적으로 힘 F 와 전압 V 의 관계식을 구할 수 있을 것이다. 3.1.2절의 DC 모터에서 전기자에 흐르는 전류 i 와 전압 V 사이의 관계식은 다음과 같았다.

$$iR + Kw_m = V \quad (3.96)$$

여기서 w_m 은 모터의 각속도이고, 인덕턴스 성분은 무시했다. 전류에 대해서 정리하면,

$$i = \frac{V - Kw}{R} \quad (3.97)$$

이다. 기어비가 K_g 인 기어 박스를 거친 후의 각속도를 w 라고 하면 다음이 성립한다.

$$w = \frac{w_m}{K_g} \quad (3.98)$$

각속도 w 는 카트의 변위 x 로 표현할 수 있다. w 와 카트의 이동 속도는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$rw = \dot{x} \rightarrow w = \frac{\dot{x}}{r} \rightarrow w_m = K_g \frac{\dot{x}}{r} \quad (3.99)$$

이를 식 (3.97)에 대입하면,

$$i = \frac{V - KK_g \frac{\dot{x}}{r}}{R} \quad (3.100)$$

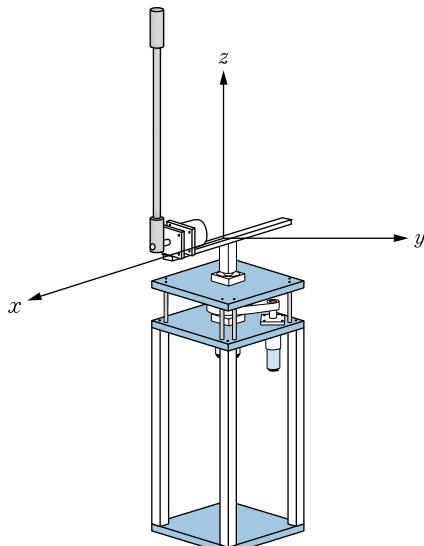
이고, 식 (3.100)을 식 (3.95)에 대입하면, 모터에 의해 카트에 전달되는 힘 F 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{KK_g}{R_m r} V - \frac{K^2 K_g^2}{R_m} \frac{\dot{x}}{r^2} \quad (3.101)$$

지금까지 앞에서 배운 기계 및 전기 법칙을 사용하여 직선형 진자 시스템에 대한 모델링을 해보았다. 앞으로 나올 회전형과 이단 진자 시스템은 좀 더 복잡한 계산과 고급 수학³을 요하기 때문에 수학적인 모델만 소개하기로 한다.

회전형 진자 시스템

직선형 진자 시스템은 진자 막대를 직선으로 운동하게 하는 반면, 회전형 진자 시스템은 회전 운동을 통하여 진자 막대에 힘을 가한다. 회전형 진자 시스템의 전체 모습은 [그림 3-27]과 같다.



[그림 3-27] 회전형 진자 시스템

관련된 물리 변수는 다음과 같다.

I_p^o : 진자 막대의 무게 중심에 대한 관성 모멘트

I_p : 진자 막대의 회전축에 대한 관성 모멘트 ($= I_p^o + ml^2$)

³ 라그랑주 방정식을 사용한다. ‘부록 A.3’을 참고하기 바란다.

I_b^o : 회전팔의 회전 중심에 대한 관성 모멘트

I_b : $= I_b^o + mr^2$

I_m : 모터 자체에 대한 관성 모멘트

B_m : 모터 자체의 마찰계수

R_m : 모터의 전기자 저항

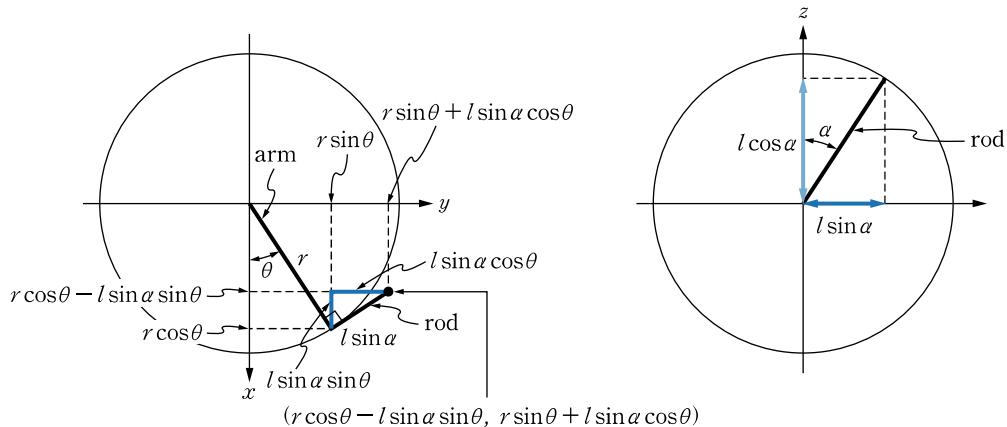
K : 모터의 토크 상수 또는 유도기전력 상수

m : 진자의 질량

l : 진자의 무게 중심까지의 거리

r : 회전팔의 길이

[그림 3-28]은 회전형 진자 시스템을 위에서 보았을 때와 정면에서 보았을 때의 모습과 변수들을 나타내고 있다.



[그림 3-28] 회전형 진자 시스템을 윗면과 정면에서 바라본 모습

물리적인 역학 법칙을 사용하면, 정의한 변수들을 바탕으로 다음과 같은 모델식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} mrl \cos \alpha & I_p \\ (I_m + I_b + I_p \sin^2 \alpha) & mrl \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta}^2 + mgls \sin \alpha \\ -I_p \sin 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\theta} + mrl \sin \alpha \dot{\alpha}^2 - \overline{B_m} \dot{\theta} + \frac{K_m}{R_m} V \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

여기서 $\overline{B_m} = B_m + \frac{K^2}{R_m}$ 으로 주어진다.

모델식 (3.102)를 보면 α 에 대해서는 비선형이지만, θ 에 대해서는 선형식임을 알 수 있다. α 에 대해서도 선형식이 되도록 하기 위해 다음과 같이 가정한다.

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \dot{\alpha} \approx 0 \quad (3.103)$$

이러한 근사화를 통해 모델식 (3.102)를 다음과 같이 간단한 선형식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} mrl & I_p \\ (I_m + I_b) & mrl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg l \alpha \\ \frac{K_m}{R_m} V - \overline{B}_m \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

식 (3.104)를 사용하여 상태방정식과 전달함수를 구해보자. $x_1 = \theta, x_2 = \alpha, x_3 = \dot{\theta}, x_4 = \dot{\alpha}$ 로 상태변수를 정하고, 전압 V 를 입력 변수, x_1 과 x_2 를 출력 변수라 하면, 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Omega_{32} & \Omega_{33} & 0 \\ 0 & \Omega_{42} & \Omega_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} V \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.105)$$

여기서 $\Omega_{32}, \Omega_{33}, \Omega_{42}, \Omega_{43}, \Psi_3, \Psi_4$ 의 구체적인 형태는 이 장의 연습문제로 남기기로 한다.

회전형 진자 시스템은 입력이 하나, 출력은 두 개인 시스템으로 두 개의 전달함수를 생각할 수 있다. 즉 전압 V 에서 θ 로의 전달함수와 전압 V 에서 α 로의 전달함수이다. 이 두 전달함수를 구하기 위해 선형화된 식 (3.105)의 양변을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

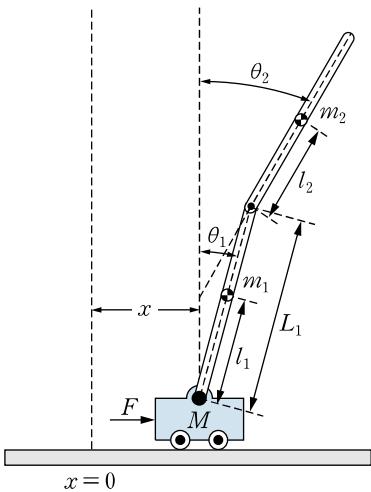
$$\begin{bmatrix} mrl & I_p \\ (I_m + I_b) & mrl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 \Theta(s) \\ s^2 A(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg l A(s) \\ \frac{K_m}{R_m} V - \overline{B}_m s \Theta(s) \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

여기서 $\Theta(s), A(s)$ 는 각각 θ 와 α 의 라플라스 변환이다. $\Theta(s), A(s)$ 에 대하여 정리하고, 두 전달함수 $\frac{\Theta(s)}{V(s)}$ 와 $\frac{A(s)}{V(s)}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Theta(s)}{V(s)} \\ \frac{A(s)}{V(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mrl s^2 & I_p s^2 - mg l \\ (I_m + I_b) s^2 + \overline{B}_m s & mrl s^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{R_m} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

이단 진자 시스템

마지막으로 좀 복잡하지만 그래서 더 흥미진진한 이단 진자 시스템을 살펴보도록 하자. 이단 진자 시스템의 전체 모습은 [그림 3-29]와 같다.



[그림 3-29] 이단 진자 시스템

관련된 물리 변수는 다음과 같다.

M : 카트의 질량

m_1 : 진자 막대 1의 질량

m_2 : 진자 막대 2의 질량

θ_1 : 진자 막대 1과 지면에 대한 법선이 이루는 각

θ_2 : 진자 막대 2와 지면에 대한 법선이 이루는 각

x : 중심점으로부터의 카트 변위

F : 카트에 가해지는 힘

b : 카트와 트랙면과의 마찰계수

l_1 : 진자 막대 1의 무게 중심에서 회전축까지의 거리

L_1 : 진자 막대 1의 길이

l_2 : 진자 막대 2의 무게 중심에서 회전축까지의 거리

유도를 간결하게 하기 위해 다음과 같이 변수를 정의하자.

$$h_1 = M + m_1 + m_2$$

$$h_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= m_2 l_2 \\
h_4 &= I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \\
h_5 &= m_2 L_1 l_2 \\
h_6 &= g(m_1 l_1 + m_2 L_1) \\
h_7 &= I_2 + m_2 l_2^2 \\
h_8 &= g m_2 l_2
\end{aligned}$$

이단 진자 시스템에 대한 모델을 구할 때 힘 기반의 벡터 연산을 통한 계산은 너무 복잡하기 때문에, 에너지 기반의 라그랑주 방정식⁴을 이용한다. 상태변수를 $x_1 = x$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{\theta}_2$, $x_4 = \dot{x}$, $x_5 = \dot{\theta}_1$, $x_6 = \dot{\theta}_2$ 와 같이 정하면 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_1 F \\ p_2 q_1 + p_4 q_2 + p_5 q_3 + p_2 F \\ p_3 q_1 + p_5 q_2 + p_6 q_3 + p_3 F \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

아래와 같이 정의된 변수 D 를 사용하면

$$\begin{aligned}
D &= h_1 h_4 h_7 + 2 h_2 h_3 h_5 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - h_3^2 h_4 \cos^2 \theta_2 \\
&\quad - h_1 h_5^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - h_2^2 h_7 \cos^2 \theta_1
\end{aligned}$$

p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6 은 위에서 정의한 h_1 에서 h_6 까지의 변수를 사용하여 다음과 같이 정의되며,

$$\begin{aligned}
p_1 &= [h_4 h_7 - h_5^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)] / D \\
p_2 &= [h_3 h_5 \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - h_2 h_7 \cos \theta_1] / D \\
p_3 &= [h_2 h_5 \cos \theta_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - h_3 h_4 \cos \theta_2] / D \\
p_4 &= [h_1 h_7 - h^3 \cos^2 \theta_2] / D \\
p_5 &= [h_2 h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - h_1 h_5 \cos(\theta_2 - \theta_1)] / D \\
p_6 &= [h_1 h_4 - h^2 \cos^2 \theta_1] / D
\end{aligned}$$

q_1 , q_2 , q_3 는 다음과 같이 주어진다.

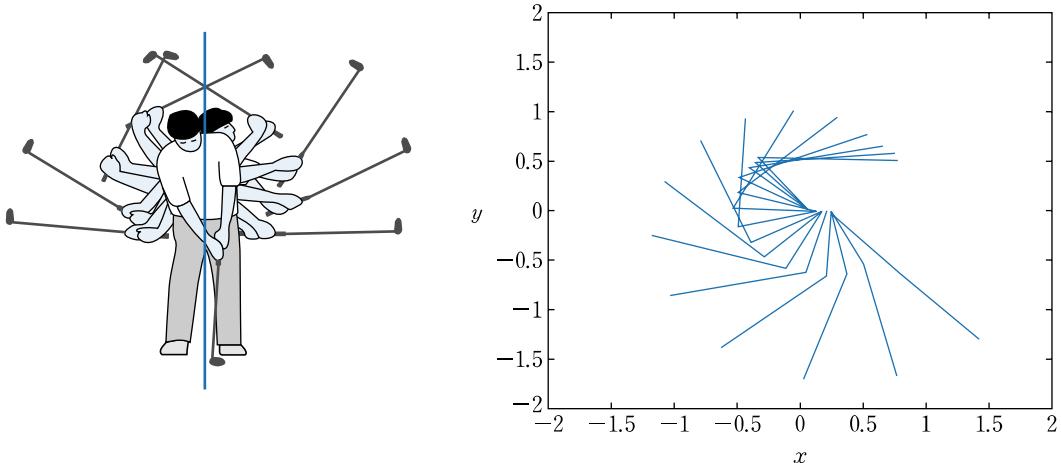
$$q_1 = h_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + h_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

⁴ ‘부록 A.3’을 참고하기 바란다.

$$q_2 = h_5 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 + h_6 \sin\theta_1 - bx$$

$$q_3 = -h_5 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + h_8 \sin\theta_2$$

적절한 힘과 토크를 사용하여 모델식 (3.108)을 이용하면, [그림 3-30]과 같이 골프에서의 스윙 동작을 실제와 유사하게 시뮬레이션해 볼 수 있다. 진자 막대 1과 진자 막대 2 사이에 적절한 토크를 가하고 적절한 힘 F 를 주면, 소위 골프에서의 손목 코킹⁵, 각 풀기와 중심 이동을 잘 흉내낼 수 있다.



[그림 3-30] 골프 스윙과 이단 진자 시스템

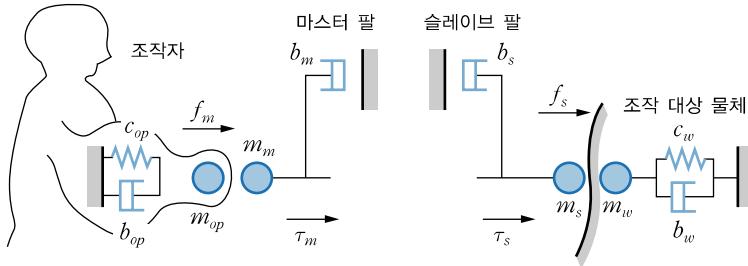
3.1.6 마스터–슬레이브 시스템

최근 IT 기술의 발달로 작업 환경이 열악한 곳에서의 기기 조작을 무선으로 하는 경향이 늘고 있다. 그러나 사람이 직접 손으로 느끼면서 조작하는 경우에 비해 작업의 섬세성은 떨어질 수밖에 없다. 한 예로 원격 조종 로봇이 있는데, 로봇이 느끼는 힘을 원격지의 조작자에게 피드백할 수 없다면, 무리한 조작으로 로봇을 파손시킬지도 모른다.

보통 조작하는 사람이 있는 쪽을 마스터, 조작 대상 물체가 있는 쪽을 슬레이브라고 말하는데, 조작하는 사람이 마스터를 통하여 슬레이브를 직접 조작하는 것처럼 느끼게 하기 위하여 쌍방 제어라는 방식을 사용한다. 이 절에서는 이와 같은 마스터–슬레이브 시스템 모델에 대해 알아본다.

⁵ 백스윙할 때 손목관절을 구부리는 동작이다.

우선 [그림 3-31]과 같은 마스터–슬레이브 시스템을 생각해보자. 간단한 모델을 얻기 위하여 수평 방향의 자유도 하나만 고려한다.



[그림 3-31] 마스터–슬레이브 시스템

마스터 팔과 슬레이브 팔에 대한 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\tau_m + f_m &= m_m \ddot{x}_m + b_m \dot{x}_m \\ \tau_s - f_s &= m_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s\end{aligned}\quad (3.109)$$

여기에서 x_m 과 x_s 는 마스터 팔과 슬레이브 팔의 변위를 밀하며, m_m , b_m 과 m_s , b_s 는 각각 마스터와 슬레이브 팔의 질량과 댐핑 계수를 나타낸다. f_m 은 조작자가 마스터 팔에 가하는 힘이고, f_s 는 슬레이브가 조작 대상 물체에 가하는 힘이다. 마스터 팔과 슬레이브 팔의 구동력은 τ_m 과 τ_s 로 표시된다.

슬레이브 팔과 직접 맞닿은 물체의 동역학 모델식은 다음과 같이 주어진다.

$$f_s = m_w \ddot{x}_s + b_w \dot{x}_s + c_w x_s \quad (3.110)$$

여기에서 m_w , b_w , c_w 는 물체의 질량, 댐핑 계수, 마찰계수에 해당한다. 슬레이브 팔과 물체의 접촉은 강체로 연결되어 있다고 가정한다. 조작자도 다음과 같이 유사한 수식으로 모델링할 수 있다.

$$\tau_{op} - f_m = m_{op} \ddot{x}_m + b_{op} \dot{x}_m + c_{op} x_m \quad (3.111)$$

여기에서 m_{op} , b_{op} , c_{op} 는 조작자의 질량, 댐핑 계수, 마찰계수에 해당하고, τ_{op} 는 조작자의 근육에서 발생하는 힘을 의미한다. 슬레이브 쪽과 같이 마스터의 팔과 조작자의 팔은 강체로 연결되어 있다고 가정한다. 마스터 팔과 슬레이브 팔의 구동기는 마스터와 슬레이브의 변위와 힘에 대하여 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned}\tau_m &= \left[K_{mpm}^{(p)} + K_{mpm}^{(i)} \frac{d}{dt} + K_{mpm}^{(d)} \frac{d^2}{dt^2} \quad K_{mfm} \right] \begin{bmatrix} x_m \\ f_m \end{bmatrix} \\ &\quad - \left[K_{mps}^{(p)} + K_{mps}^{(i)} \frac{d}{dt} + K_{mps}^{(d)} \frac{d^2}{dt^2} \quad K_{mfs} \right] \begin{bmatrix} x_s \\ f_s \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.112)$$

$$\begin{aligned}\tau_m &= \left[K_{spm}^{(p)} + K_{spm}^{(i)} \frac{d}{dt} + K_{spm}^{(d)} \frac{d^2}{dt^2} \quad K_{sfm} \right] \begin{bmatrix} x_m \\ f_m \end{bmatrix} \\ &\quad - \left[K_{sps}^{(p)} + K_{sps}^{(i)} \frac{d}{dt} + K_{sps}^{(d)} \frac{d^2}{dt^2} \quad K_{sfs} \right] \begin{bmatrix} x_s \\ f_s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

이는 추후에 배울 PID 제어기 형태로, 제어 목표를 달성하기 위하여 계수 $K_{XXX}^{(X)}$ 들을 적절하게 정해야 할 것이다.

지금까지 기계적인 물리량으로 시스템을 모델링하였는데, 3.1.1절에 배운 전기 물리량과 기계 물리량의 대응관계를 바탕으로 다음과 같이 전기 물리량으로 나타내보자.

$$\begin{array}{ccc} \dot{x}_m & \leftrightarrow & I_m \\ \dot{x}_s & \leftrightarrow & I_s \\ \tau_{op} & \leftrightarrow & V_{op} \\ f_m & \leftrightarrow & V_m \\ f_s & \leftrightarrow & V_s \end{array} \quad (3.113)$$

힘과 속도를 전압과 전류로 대응하여 미분방정식 (3.109)~(3.112)을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}T_m + V_m &= (m_m s + b_m) I_m = Z_m I_m \\ T_s - V_s &= (m_s s + b_s) I_s = Z_s I_s\end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}T_m &= \left[K_{mpm}^{(d)} s + K_{mpm}^{(p)} + K_{mpm}^{(d)} \frac{1}{s} \quad K_{mfm} \right] \begin{bmatrix} I_m \\ V_m \end{bmatrix} \\ &\quad - \left[K_{mps}^{(d)} s + K_{mps}^{(p)} + K_{mps}^{(d)} \frac{1}{s} \quad K_{mfs} \right] \begin{bmatrix} I_s \\ V_s \end{bmatrix} \\ &= [P_m \quad Q_m] \begin{bmatrix} I_m \\ V_m \end{bmatrix} - [R_m \quad S_m] \begin{bmatrix} I_s \\ V_s \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned}T_s &= \left[K_{spm}^{(d)} s + K_{spm}^{(p)} + K_{spm}^{(d)} \frac{1}{s} \quad K_{sfm} \right] \begin{bmatrix} I_m \\ V_m \end{bmatrix} \\ &\quad - \left[K_{sps}^{(d)} s + K_{sps}^{(p)} + K_{sps}^{(d)} \frac{1}{s} \quad K_{sfs} \right] \begin{bmatrix} I_s \\ V_s \end{bmatrix} \\ &= [P_s \quad Q_s] \begin{bmatrix} I_m \\ V_m \end{bmatrix} - [R_s \quad S_s] \begin{bmatrix} I_s \\ V_s \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (3.116)$$

여기서 T_m 과 T_s 는 τ_m 과 τ_s 의 라플라스 변환이다. 식 (3.114)~(3.116)에서 T_m 과 T_s 를 소거하면, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Z_m - P_m & -R_m \\ -P_s & -(Z_s + R_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ -I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Q_m & -S_m \\ Q_s & -(1 + S_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ V_s \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

따라서 최종적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} V_m \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_s \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

이때 전달함수 z_{ij} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{(1 + S_s)(Z_m - P_m) + S_m P_s}{(1 + S_s)(1 + Q_m) - S_m Q_s} = \frac{N_{11}}{D_z} \\ z_{12} &= \frac{-(1 + S_s)R_m + S_m(Z_s + R_s)}{(1 + S_s)(1 + Q_m) - S_m Q_s} = \frac{N_{12}}{D_z} \\ z_{21} &= \frac{(1 + Q_m)P_s + S_m(Z_s + R_s)}{(1 + S_s)(1 + Q_m) - S_m Q_s} = \frac{N_{21}}{D_z} \\ z_{22} &= \frac{(1 + Q_m)P_s + S_m(Z_s + R_s)}{(1 + S_s)(1 + Q_m) - S_m Q_s} = \frac{N_{21}}{D_z} \end{aligned} \quad (3.119)$$

조작자의 힘 τ_{op} 에서 마스터 팔의 변위 $x_m \left(\frac{I_m}{s} \right)$, 슬레이브 팔의 변위 $x_s \left(\frac{I_s}{s} \right)$, 마스터 쪽의 힘 $f_m(V_m)$, 슬레이브 쪽의 힘 $f_s(V_s)$ 에 대한 전달함수를 각각 $G_{mp}(s)$, $G_{sp}(s)$, $G_{mf}(s)$, $G_{sf}(s)$ 라 하면, 네 개의 전달함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{mp}(s) &= \frac{s[N_{22} + D_Z Z_L]}{s^2[D_Y + N_{11}Z_L + N_{22}Z_G + D_Z Z_L Z_G]} \\ G_{sp}(s) &= \frac{s N_{21}}{s^2[D_Y + N_{11}Z_L + N_{22}Z_G + D_Z Z_L Z_G]} \\ G_{mf}(s) &= \frac{s^2[D_Y + N_{11}Z_L]}{s^2[D_Y + N_{11}Z_L + N_{22}Z_G + D_Z Z_L Z_G]} \\ G_{sf}(s) &= \frac{s^2 N_{22} Z_L}{s^2[D_Y + N_{11}Z_L + N_{22}Z_G + D_Z Z_L Z_G]} \end{aligned} \quad (3.120)$$

여기서 $Z_L = \frac{m_w s + b_w + c_w}{s}$, $Z_G = \frac{m_{op}s + b_{op} + c_{op}}{s}$ 이다. 특히 Z_L 은 슬레이브와 상호작용하고 있는 물체의 임피던스를 의미한다. 몇 가지 특별한 경우를 살펴보자. $Z_L = 0$ 인 경우, 즉 슬레이브 팔과 상호작용하는 물체가 없어 슬레이브 팔이 자유롭게 움직이고 있을 때에는

$$G_{mp}(s) - G_{sp}(s) = \frac{s[N_{22} - N_{21}]}{s^2[D_Y + N_{22}Z_G]} \quad (3.121)$$

$$G_{mf}(s) - G_{sf}(s) = \frac{s^2[D_Y]}{s^2[D_Y + N_{22}Z_G]}$$

이다. $Z_L = \infty$ 인 경우, 즉 슬레이브가 아주 무거운 물체와 상호작용하여 슬레이브 팔이 강체 환경에 구속되어 있는 경우는 다음과 같다.

$$G_{mp}(s) - G_{sp}(s) = \frac{D_Z}{s[N_{11} + D_Z Z_G]} \quad (3.122)$$

$$G_{mf}(s) - G_{sf}(s) = \frac{s[N_{11} - N_{21}]}{s[N_{11} + D_Z Z_G]}$$

양방향 제어기 모델을 나타내는 식 (3.112)는 식 (3.121)과 식 (3.122)에 있는 전달함수를 사용하여 주어진 기준을 만족하도록 설계된다. 한 예로 다음과 같은 가격함수가 최소가 되도록 하면 바람직할 것이다.

$$J_p = \int_0^{w_{\max}} \left| G_{mp}(jw) - G_{sp}(jw) \right| \left| \frac{1}{1+jwT} \right| dw$$

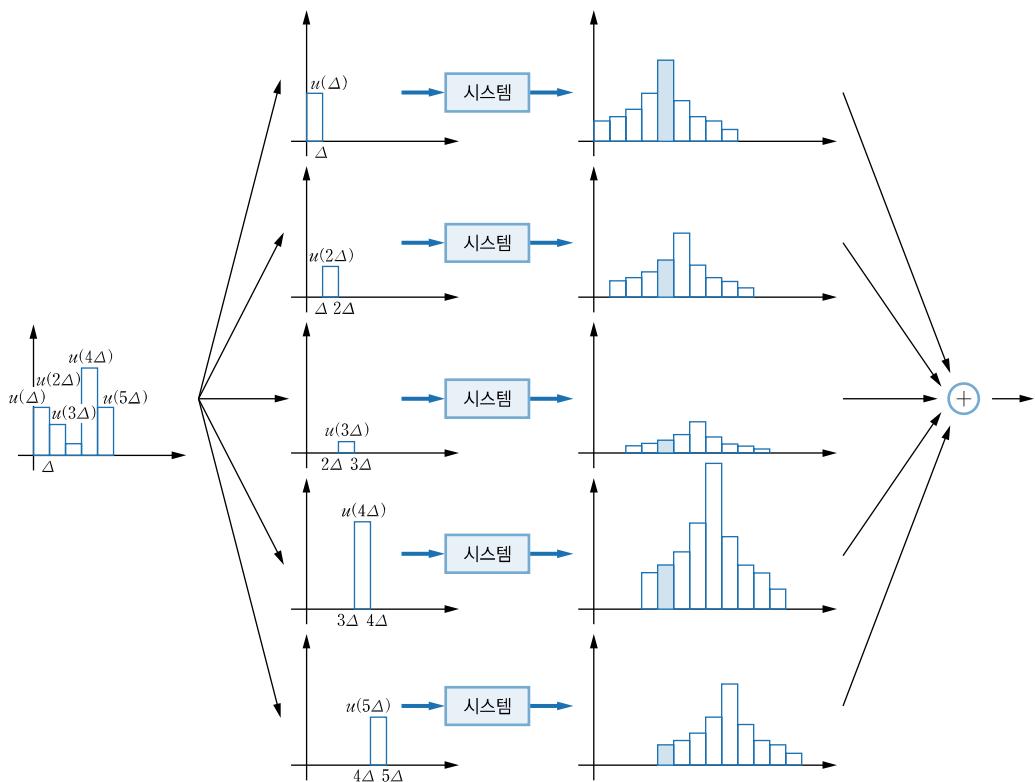
$$J_f = \int_0^{w_{\max}} \left| G_{mf}(jw) - G_{sf}(jw) \right| \left| \frac{1}{1+jwT} \right| dw$$

여기서 w_{\max} 는 조작자의 작업 주파수 대역 최댓값을 의미한다. 적분 후반부의 가중치 함수는 저주파 대역에 큰 가중치를 두기 위해 곱해진다.

3.2 임펄스 응답과 전달함수

‘부록 A.2’에는 선형 시스템의 성질을 활용하기 위해 신호를 분해하고 합성하는 방법이 소개되어 있다. 이 방법을 이용하면 복잡한 계산과 분석을 쉽게 수행할 수 있다. 특히 상미분방정식에서 입력이 e^{st} 형태인 경우, 해를 매우 쉽게 구할 수 있기 때문에, 입력을 e^{st} 형태의 지수함수들에 대한 선형 조합으로 나타내는 것이 중요했다. 이 점이 바로 라플라스 변환의 나오게 된 배경이다.

신호를 분해하는 데, e^{st} 형태의 함수를 사용하는 것보다 더 쉬운 방법이 있다. [그림 3-32]와 같이 칼로 무 자르듯이 시간별로 함수를 자르고, 각 함수들에 대한 응답을 구해 합산하는 것이다.



[그림 3-32] 신호의 시간별 분해

이런 식으로 시간별로 함수를 자를 때 중요한 역할을 하는 함수가 있다. 바로 임펄스 함수이다. 엄밀히 정의해서 설명하려면 상당히 고급의 함수 이론을 알아야 하지만, 여기에서는 공학적인 응용에

초점을 맞추어 정성적으로 설명하겠다. 임펄스를 입력으로 인가하면, 출력으로 임펄스 응답함수라는 함수가 나온다. 입력을 시간별로 임펄스 함수로 자르고, 각각에 대한 임펄스 응답함수로 응답을 구한 다음, 나중에 이를 모두 합산하는 방식으로 출력을 쉽게 구할 수 있다. 우선 시간별로 입력 신호를 다음과 같이 분해하여보자.

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u(i\Delta) \delta(t - i\Delta) \Delta \quad (3.123)$$

여기에서 $N\Delta = t$ 이고, 임펄스 $\delta(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases} \quad (3.124)$$

식 (3.123)은 $u(t)$ 를 시간 Δ 마다 샘플링한 신호로, 샘플/홀드 sample and hold 함수⁶라고 생각하면 될 것이다. $\delta(t)$ 에 대한 출력은 임펄스 응답함수 $h(t)$ 이다. 만약 시스템의 성질이 시간에 대해 불변이라고 한다면, 시간 지연이 $i\Delta$ 만큼 있는 $\delta(t - i\Delta)$ 에 대한 출력은 $h(t - i\Delta)$ 가 된다. 따라서 식 (3.124)와 같은 입력을 가하면 출력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(t) = \sum_{i=1}^N u(i\Delta) h(t - i\Delta) \Delta \quad (3.125)$$

$N \rightarrow \infty$ 혹은 $\Delta \rightarrow 0$ 이면 식 (3.125)는 아래와 같은 적분 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t u(t - \tau) h(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.126)$$

이는 2장에서 라플라스 변환을 배울 때 접했던 합성곱 형태로, 이러한 식에 대한 라플라스 변환은 매우 쉬웠다. 식 (3.126)의 양변을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s) U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= H(s) \end{aligned} \quad (3.127)$$

여기서 $Y(s)$, $U(s)$, $H(s)$ 는 각각 $y(t)$, $u(t)$, $h(t)$ 에 대한 라플라스 변환이다. 따라서 임펄스 응답함수 $h(t)$ 의 라플라스 변환 $H(s)$ 가 곧 입력 $U(s)$ 로부터 출력 $Y(s)$ 로의 전달함수가 됨을 알 수 있다.

⁶ 일정한 시간 간격으로 샘플을 얻고 다음 샘플이 얻어질 때까지 샘플 값을 유지하는 함수이다.

그렇다면 다음과 같은 상태방정식에서 전달함수와 임펄스 응답함수를 구해보자.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.128}$$

식 (3.128)의 양변을 라플라스 변환하고 정리하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B\end{aligned}\tag{3.129}$$

따라서 입력 $U(s)$ 로부터 출력 $Y(s)$ 로의 전달함수 $H(s)$ 는 다음과 같다.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B\tag{3.130}$$

한편 상태방정식 (3.128)을 시간에 대해 풀어보면, 상태 $x(t)$ 와 출력 $y(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\end{aligned}\tag{3.131}$$

전달함수와 임펄스 응답함수를 고려할 때 초기 조건은 0이라고 가정하기 때문에, 임펄스 응답함수는 다음과 같다.

$$h(t) = Ce^{At}\tag{3.132}$$

이 임펄스 응답함수의 라플라스 변환은 식 (3.130)의 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 와 일치할 것이다.

e^{At} 는 모델식 (3.128)의 상태 천이 행렬이라고도 부르며, 보통 $\Phi(t)$ 라고 표시한다. 상태 천이 행렬은 선형 시스템 해석에서 매우 중요한 역할을 한다. 입력이 영, 즉 $u(\cdot) = 0$ 이면, 현재 상태는 상태 천이 행렬을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0)$$

위 식을 보면 왜 상태 천이 행렬이라고 이름 붙여졌는지 이해할 수 있을 것이다. e^{At} 를 계산하는 방법은 여러 가지가 있는데, 앞에서 배운 대로 다음과 같은 관계식을 이용하고,

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

라플라스 역변환을 취하면 e^{At} 를 구할 수 있다.

예제 3-3

다음과 같은 상태방정식에서 상태 천이 행렬과 상태 $x(t)$ 를 구하라.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}u(t)$$

여기서 초기값은 0이며, 입력은 단위 계단함수라 하자.

풀이

우선 $(sI - A)^{-1}$ 에 해당하는 라플라스 변환을 구해보자.

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2 + 6s + 8} & \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \\ \frac{-8}{s^2 + 6s + 8} & \frac{s}{s^2 + 6s + 8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이를 부분분수로 분해하면 다음과 같다.

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) \\ \left(\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4}\right) & \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right) \end{bmatrix}$$

라플라스 역변환을 취하면 다음과 같이 상태 천이 행렬의 시간 함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}t} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right] \\ &= \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-4t}) \\ 4(-e^{-2t} + e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

식 (3.131)에 의해 상태 $x(t)$ 는 다음과 같다.

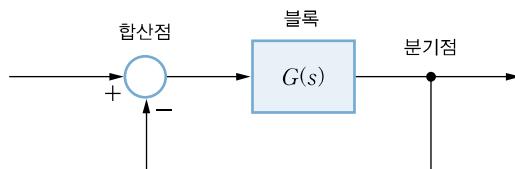
$$x(t) = \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t} \\ \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

3.3 블록선도와 신호 흐름도

3.3.1 블록선도

일반적으로 최근의 시스템들은 설계 및 유지 보수의 용이성을 위해 계층적으로 구성된다. 전체 시스템은 몇 개의 부 시스템으로 구성되어 있고, 각 부 시스템의 내부는 다시 여러 시스템으로 구성되어 있다. 예를 들면, 자동차는 크게 보아 섀시, 엔진, 전장, 동력 전달장치 등으로 구성되어 있고, 다시 엔진은 여러 부품으로 이루어진다. 이와 같은 시스템을 모델링할 경우, 전체의 시스템을 한꺼번에 모델링하는 것보다는 입출력이 정의된 작은 부 시스템을 모델링하고, 이 부 시스템의 모델들을 사용하여 전체 시스템을 표현하는 것이 바람직하다.

이러한 모델링 방법에 사용되는 것이 블록선도이다. 블록선도는 전체 시스템을 여러 부 시스템들로 나누어 표현하는 방법으로, [그림 3-33]과 같이 입력 신호를 처리하여 출력 신호를 내놓는 블록, 신호의 흐름을 표시하는 선, 신호들이 더해지는 합산점^{summing point}, 신호가 나누어지는 분기점^{branch point} 등의 기본 구성 요소를 가진다.



[그림 3-33] 블록선도의 기본 구성 요소

블록들은 대개의 경우 부 시스템의 전달함수를 표시하며, 입력에 대한 프로세싱을 수행한다. 합산점에서 더하는 신호는 + 부호, 빼는 신호는 - 부호를 신호선 옆에 표시한다. 블록은 보통 입력과 출력을 갖추고 있지만, 그렇지 않을 수도 있다. 즉 입력만 있는 블록, 출력만 있는 블록, 입력과 출력이 모두 없는 블록도 있으며, 입력과 출력이 두 개 이상인 경우도 있다.

[그림 3-34]에서는 두 개의 블록 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 가 연결되어 시스템을 구성하는 세 가지 기본적인 경우를 보여주고 있다. [그림 3-34(a)]의 직렬연결 시스템의 경우, 전체 전달함수는 $G_s(s) = G_1(s)G_2(s)$ 로 구해지고, [그림 3-34(b)]의 병렬연결 시스템의 경우에는 $G_p(s) = G_1(s) + G_2(s)$ 로 구해진다. [그림 3-34(c)]의 피드백 시스템에서는 다음의 관계식들로부터

$$\begin{aligned}
 U_1(s) &= R(s) - Y_2(s) \\
 Y_2(s) &= G_2(s) Y_1(s) \\
 Y_1(s) &= G_1(s) U_1(s)
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

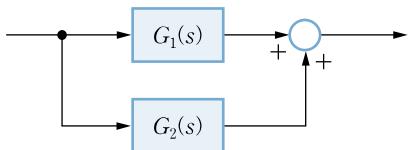
다음과 같은 폐로 전달함수를 구할 수 있다.

$$G_c(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \tag{3.134}$$

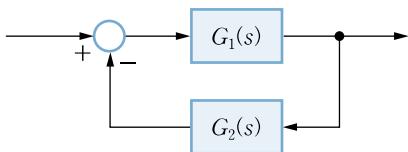
$G_2(s)$ 가 분모에 들어가서 $G_c(s)$ 의 극점 등에 큰 영향을 미치므로, 다른 연결 방식에 비해 시스템에 미치는 영향이 크다. 따라서 제어공학에서는 식 (3.134)와 같은 형태로부터 시스템 성능 개선에 크게 기여할 수 있는 제어기를 설계한다. 이 관계식은 앞으로도 계속 나오는 식이므로 꼭 기억하도록 하자.



(a) $G_s(s) = G_1(s)G_2(s)$



(b) $G_p(s) = G_1(s) + G_2(s)$



(c) $G_c(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$

[그림 3-34] 기본적인 세 가지 블록 연결법

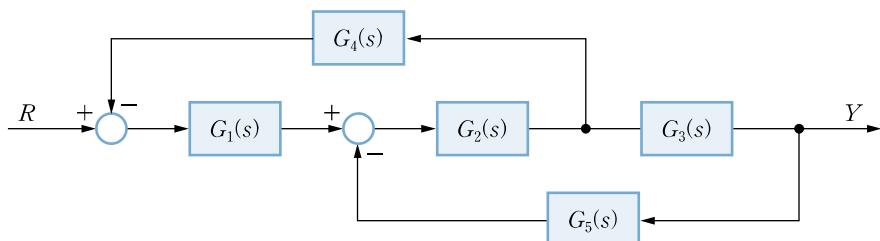
일반적인 블록선도는 적당한 변형을 통하여 직렬, 병렬, 피드백 블록 등의 결합으로 분해하여 나타낼 수 있으며, 이러한 분해 과정을 통하여 전달함수도 쉽게 구할 수 있다. [표 3-9]는 많이 사용되는 몇 가지 변형 방법을 정리한 것으로, 복잡한 블록선도의 전달함수를 구할 때 사용하면 매우 편리하다.

[표 3-9] 블록선도 변형 방법

변형 전	변형 후

예제 3-4

블록선도 변형 방법을 써서 [그림 3-35]의 전달함수 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 를 구하라.

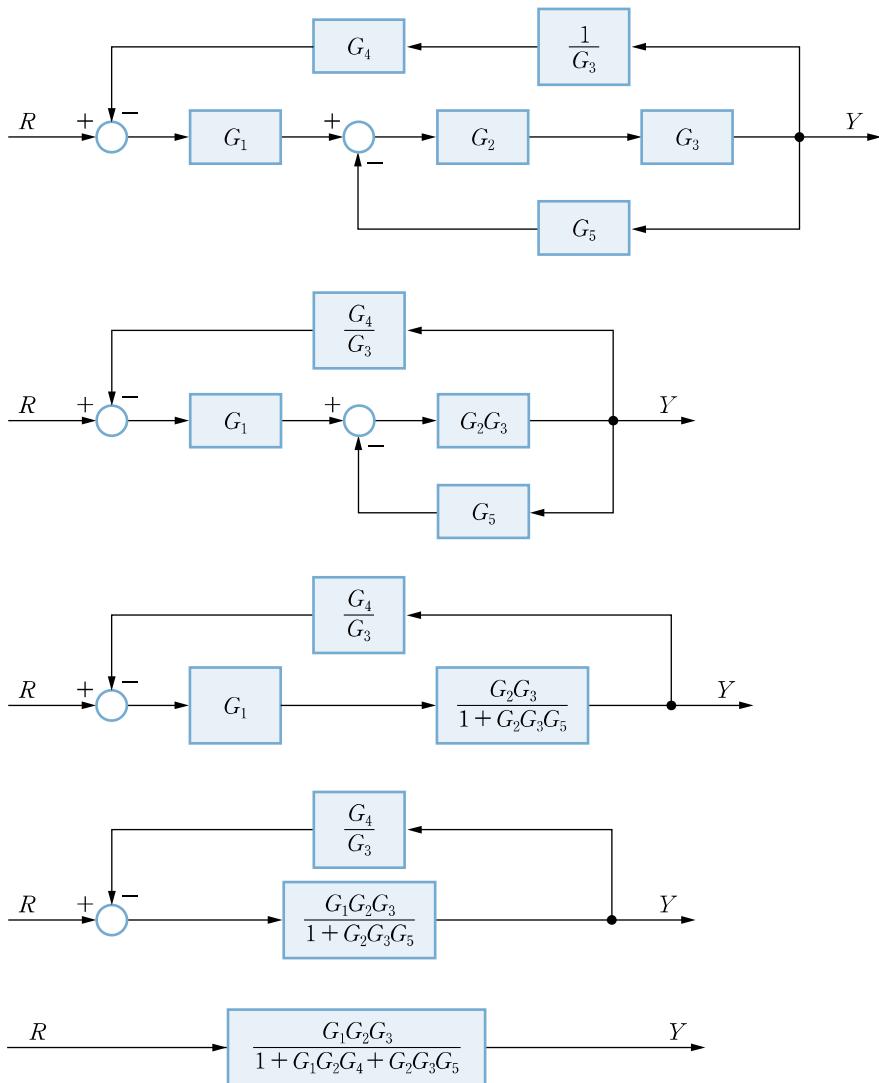


[그림 3-35] [예제 3-4]의 블록선도

풀이

[그림 3-35]의 블록선도는 [표 3-9]를 이용하여 [그림 3-36]과 같이 변형할 수 있다. 우선 [표 3-9]의 세 번째 방법을 사용하여 $G_4(s)$ 의 입력을 $G_3(s)$ 의 출력에서 가져온다. 물론 변형할 때 $\frac{1}{G_3(s)}$ 의 새로운 블록이 필요하다. 다음으로 직렬연결된 $G_4(s)$ 와 $\frac{1}{G_3(s)}$, 그리고 $G_2(s)$ 와 $G_3(s)$ 를 합친다. 그 다음 피드백 연결된 $G_2(s)G_3(s)$ 와 $G_5(s)$ 를 합친다. 다시 직렬연결하고 피드백 공식을 사용하면 최종적인 전달 함수를 얻을 수 있다. 따라서 최종적인 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_4 + G_2 G_3 G_5} \quad (3.135)$$



[그림 3-36] [예제 3-4]의 블록선도 단순화 과정

이 절에서 익힌 블록선도는 시스템의 구조를 개념적으로, 또 효과적으로 분명하게 나타낼 수 있는 시각적인 표현법이다. 따라서 복잡한 시스템도 이 선도를 써서 표시하면 그 구조를 쉽게 파악할 수 있다. 최근에는 이 선도를 써서 부 시스템들을 표현한 다음, 이를 서로 연결하여 모의실험을 수행할 수 있는 컴퓨터 꾸러미들이 제공되고 있어서, 제어시스템 해석 및 설계에 매우 효과적으로 사용되고 있다.

3.3.2 신호 흐름도

앞에서 다룬 블록선도를 좀 더 단순하게 나타내는 방법으로 신호 흐름도가 있다. 블록선도의 블록과 선이 신호 흐름도에서는 각각 선과 노드로 대체되어, 신호의 흐름이 훨씬 시각적으로 표현되고, 분석 면에서도 유용하다. 신호 흐름도는 대수방정식으로 표현되는 선형 시스템을 시각적인 그래프로 나타내기 위해 메이슨 S. J. Mason에 의해 처음 제안되었으며, 연립 대수방정식을 구성하는 변수들 간의 입출력 관계를 그림으로 나타내는 방법이다.

N 개의 대수방정식으로 표현되는 다음과 같은 선형 시스템을 생각해보자.

$$y_j = \sum_{k=1}^N a_{kj} y_k, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.136)$$

여기서 a_{kj} 는 상수나 선형 연산자(예 : \int , $\frac{d}{dt}$), 더 나아가 전달함수(예 : $\frac{1}{s+1}$)까지도 가능하다. 좀 더 정성적으로 수식을 설명하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$j\text{ 번째 효과} = \sum_{k=1}^N (k\text{에서 } j\text{로의 이득}) \times k\text{ 번째 원인} \quad (3.137)$$

신호 흐름도를 구성할 때 변수를 나타내기 위해 노드가 사용되는데, 각각의 노드에 대한 신호의 유입은 가지 branch라고 불리는 선에 의해 결정된다. 각각의 가지에는 이득과 방향이 있다. 신호는 가지를 통해서만 전달되며, 방향은 가지에 화살표로 표시된다. 일반적으로 식 (3.136)과 같은 식이 주어지면, 신호 흐름도를 통하여 각각의 변수가 그 변수 또는 다른 변수들로부터 어떻게 계산되는지 시각적으로 표현할 수 있다. 예를 들어 선형 시스템이 다음과 같은 간단한 대수방정식으로 표현된다고 하자.

$$y_2 = a_{12} y_1 \quad (3.138)$$

여기서 y_1 은 입력, y_2 는 출력, 그리고 a_{12} 는 두 변수 간의 이득을 나타낸다. 식 (3.138)을 블록선도와 신호 흐름도로 나타내면 [그림 3-37]과 같다. 여기서 입력 노드 y_1 으로부터 출력 노드 y_2 로 향하는 가지는 y_2 의 y_1 에 대한 종속 관계를 나타낸다. 앞에서 언급했듯이 블록선도의 블록과 선이 신호

흐름도에서는 각각 선과 노드로 대체되어 있음을 볼 수 있다.



[그림 3-37] $y_2 = a_{12} y_1$ 의 블록선도와 신호 흐름도

주요 성질

신호 흐름도의 중요한 성질들을 다음과 같이 요약할 수 있다.

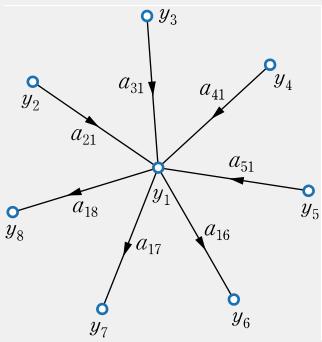
- 신호 흐름도는 변수들 간의 관계가 선형적인 선형 시스템에만 적용된다.
- 신호 흐름도로 나타내기 위한 식은 반드시 대수적이어야 한다.
- 노드는 변수를 나타내기 위해 사용된다.
보통 입력 변수는 왼쪽에, 출력 변수는 오른쪽에 배치한다.
- 신호는 가지를 통해 전달되며, 전달 방향은 가지의 화살표 방향과 같다.
- y_k 노드에서 y_j 노드로 향하는 가지는 y_j 의 y_k 에 대한 종속성을 나타낸다.
- y_k 와 y_j 를 연결하는 가지를 따라 이동하는 신호 y_k 는 그 가지가 갖는 이득 a_{kj} 가 곱해져 y_j 로 $a_{kj}y_k$ 의 신호가 전달된다.

신호 흐름도에서는 앞서 살펴본 가지와 노드라는 용어 외에도 다음과 같은 용어들이 많이 사용된다.

- 입력 노드(소스) : 밖으로 나가는 방향의 가지만을 가지는 마디이다.
- 출력 노드(싱크) : 안으로 들어오는 방향의 가지만을 가지는 마디이다.
- 경로 path : 같은 방향으로 진행하는 가지의 연속적인 모임이다.
- 순경로 forward path : 입력 마디에서 시작하여, 어떤 노드도 한 번씩만 거치고 출력 마디에서 끝나는 경로이다.
- 루프 loop : 같은 마디에서 시작하고 끝나며, 어떤 마디도 한 번씩만 거치는 경로이다.
- 경로 이득 path gain : 경로를 이동하며 거치게 되는 가지의 이득을 모두 곱한 값이다.
- 순경로 이득 : 순경로의 경로 이득이다.
- 루프 이득 : 루프의 경로 이득이다.

신호 흐름도의 성질에 근거하여, 다음과 같이 대수 관계를 정리할 수 있다.

- ❶ 노드에 대응하는 값은 해당 노드로 들어오는 모든 신호의 합과 같다. [그림 3-38]과 같은 신호 흐름도의 경우,



[그림 3-38] 주변의 여러 노드와 연결된 노드 y_1

y_1 의 값은 연결된 모든 가지들을 통해 전달되는 신호들의 합과 같다.

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}x_j \quad (3.139)$$

- ❷ 2개의 노드를 연결하는 같은 방향의 평행한 가지들은 각각의 가지 이득을 합한 값을 이득으로 가지는 단일 가지로 대체할 수 있다. 이에 대한 예가 [그림 3-39]에 나와 있다.



[그림 3-39] 병렬연결된 노드

- ❸ [그림 3-40]에서 보는 바와 같이 같은 방향을 갖는 가지들의 직렬연결은 각각의 가지 이득의 곱을 이득으로 갖는 단일 가지로 대체시킬 수 있다.



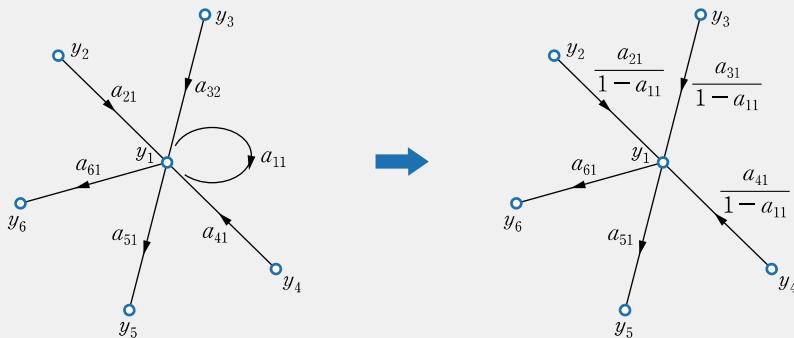
[그림 3-40] 직렬연결된 노드

- ④ [그림 3-41]과 같이 노드 x_j 에 루프가 있는 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij}x_i + a_{jj}x_j \quad (3.140)$$

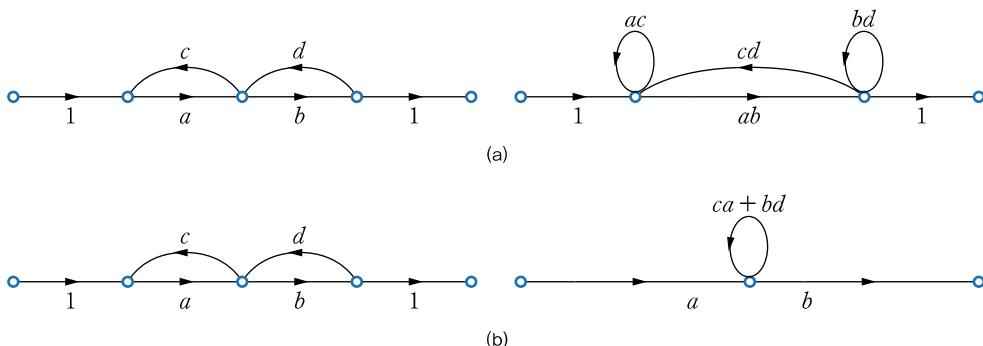
$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{a_{ij}}{1-a_{jj}}x_i$$

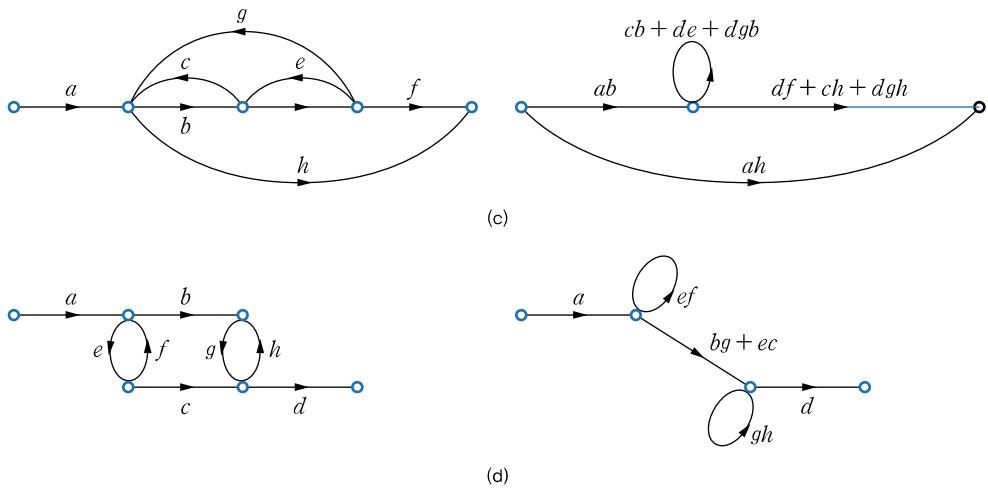
식 (3.140)에 의하면 노드에 루프가 있는 경우, 루프를 제거하는 대신 들어오는 모든 신호에 대하여 이득을 $(1 - a_{ii})$ 로 나누어 주면 된다.



[그림 3-41] 자기 루프를 제거한 경우

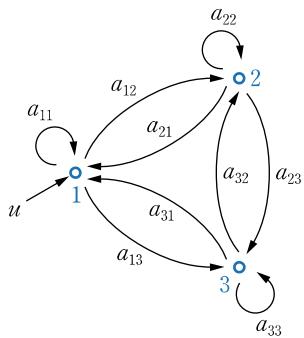
[그림 3-42]는 위에서 배운 여러 가지 신호 흐름도의 성질을 사용하여 신호 흐름도를 변형한 것이다. 흥미가 있는 독자들은 스스로 확인해보기 바란다.





[그림 3-42] 몇 가지 신호 흐름도의 변형 예들

신호 흐름도를 바탕으로 입력 노드를 행, 출력 노드를 열로 하여 각 선에 지정되는 전달함수를 원소로 하는 행렬을 생각해보자. 한 예로 노드 3개를 갖는 [그림 3-43]과 같은 신호 흐름도의 경우,



[그림 3-43] 노드 3개에 대한 신호 흐름도

다음과 같은 행렬 T 를 만들 수 있다.

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

각 노드에 해당하는 값을 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ 이라 하고, 첫 번째 노드로 들어오는 입력 신호를 u 라고 하면 다음과 같은 관계식이 만들어진다.

$$x = x T + [u \ 0 \ 0] \quad (3.142)$$

따라서 $x = (I - T)^{-1} [u \ 0 \ 0]$ 이다. 따라서 노드 2를 출력으로 하여 그 출력값을 구하려면, $(I - T)^{-1}$ 의 2 행 1 열의 값을 알아내기만 하면 된다. 공학수학 시간에 배운 3×3 행렬에 대한 역행렬식을 상기하며 2 행 1 열의 값을 계산해보면 다음과 같다.

$$(I - T)^{-1} \Big|_{2\text{행}1\text{열}} = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 - a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \Big|_{2\text{행}1\text{열}} \\ = \frac{1}{\Delta} (a_{12}(1 - a_{33}) + a_{32}a_{13}) \quad (3.143)$$

여기서 Δ 는 다음과 같다.

$$\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22})(1 - a_{33}) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31}$$

이 Δ 를 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{23}a_{12}) \\ & + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{23}a_{32}a_{11}) \\ & - a_{11}a_{22}a_{33} \end{aligned}$$

위에서 구한 Δ 의 복잡한 구조에서 규칙성을 찾으면, 시스템의 입출력 관계를 체계적으로 쉽게 파악할 수 있을 것이다. 신호 흐름도를 바탕으로 메이슨은 입출력 관계식을 계산하는 일반적인 이득 공식을 제시하였는데, 이 공식을 이용하면 입출력 관계식을 어렵지 않게 구할 수 있다. 이 메이슨 공식을 살펴보자.

메이슨 공식

N 개의 순경로와 L 개의 루프를 가지는 신호 흐름도가 주어졌을 때, 메이슨 공식을 이용하면 한 노드에서 다른 노드까지의 이득을 쉽게 계산할 수 있다. 메이슨 공식을 소개하기 위해 필요한 몇 가지 변수를 먼저 알아보자.

서로 만나지 않는 r ($1 \leq r \leq L$) 개의 루프 조합 중 m 번째 조합의 이득 곱을 L_{mr} 이라고 하면, Δ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \cdots \quad (3.144)$$

또한 신호 흐름에서 k 번째 순경로와 만나지 않는 부분에서 얻은 Δ 를 Δ_k 라 하면, 입력 마디 y_i 로부터 출력 마디 y_o 사이의 이득은 다음과 같다.

$$M = \frac{y_o}{y_i} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \quad (3.145)$$

여기서 M , M_k 는 각각 y_i 에서 y_o 로의 이득, y_i 에서 y_o 로의 k 번째 순경로의 이득을 의미한다. 식 (3.145)를 메이슨의 이득 공식이라 부르는데, 처음 보기에는 사용하기 어려워 보인다. 그렇지만 Δ 와 Δ_k 는 신호 흐름도에서 루프의 수가 원래 많으면서 서로 접하지 않는 루프의 수도 많은 경우를 제외하면, 대부분의 경우에서 간단하게 구할 수 있다.

예제 3-5

[그림 3-44]의 신호 흐름도에서 전달 이득 $\frac{y_7}{y_1}$ 과 $\frac{y_2}{y_1}$ 를 구하라.

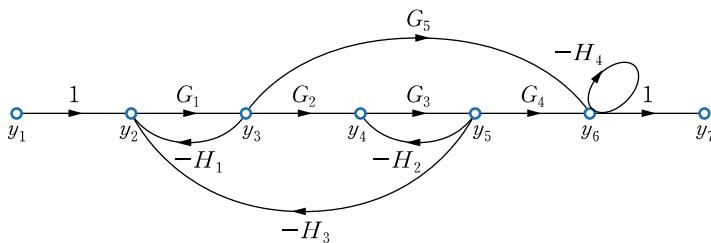
풀이

y_1 에서부터 y_7 로 2개의 순경로가 존재하고 순경로 이득은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_1 &= G_1 G_2 G_3 G_4, \quad \text{순경로 : } y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6 \rightarrow y_7 \\ M_2 &= G_1 G_5, \quad \text{순경로 : } y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_6 \rightarrow y_7 \end{aligned} \quad (3.146)$$

[그림 3-44]에는 4개의 루프가 존재하며 루프 이득은 다음과 같다.

$$L_{11} = -G_1 H_1, \quad L_{21} = -G_3 H_2, \quad L_{31} = -G_1 G_2 G_3 H_3, \quad L_{41} = -H_4 \quad (3.147)$$



[그림 3-44] [예제 3-5]의 신호 흐름도

서로 만나지 않는 두 쌍의 루프는 다음과 같이 네 개가 존재한다.

$$\begin{aligned} y_2 &\rightarrow y_3 \rightarrow y_2, \quad y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_4 \\ y_2 &\rightarrow y_3 \rightarrow y_2, \quad y_6 \rightarrow y_6 \\ y_4 &\rightarrow y_5 \rightarrow y_4, \quad y_6 \rightarrow y_6 \\ y_2 &\rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_2, \quad y_6 \rightarrow y_6 \end{aligned}$$

따라서 서로 만나지 않는 두 쌍의 루프 이득 곱의 합은 다음과 같다.

$$L_{12} + L_{22} + L_{32} + L_{42} = G_1 H_1 G_3 H_2 + G_1 H_1 H_4 + G_3 H_2 H_4 + G_1 G_2 G_3 H_3 H_4 \quad (3.148)$$

그리고 서로 만나지 않는 세 쌍의 루프 이득 곱의 합은 다음과 같다.

$$L_{13} = -G_1 H_1 G_3 H_2 H_4 \quad (3.149)$$

모든 루프는 경로 M_1 과 만나므로 $\Delta_1 = 1$ 이고, 루프 $y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_4$ 는 순경로 M_2 와 만나지 않으므로 $\Delta_2 = 1 + G_3 H_2$ 이다. 이 식들을 식 (3.144)에 대입하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_{11} + L_{21} + L_{31} + L_{41}) + (L_{12} + L_{22} + L_{32} + L_{42}) - L_{13} \\ &= 1 + (G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_3 + H_4) \\ &\quad + (G_1 H_1 G_3 H_2 + G_1 H_1 H_4 + G_3 H_2 H_4 + G_1 G_2 G_3 H_3 H_4) + G_1 H_1 G_3 H_2 H_4 \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\frac{y_7}{y_1} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 + G_3 H_2)] \quad (3.151)$$

위와 같은 방법으로 y_2 를 출력으로 정할 경우 다음과 같은 이득 관계를 얻는다.

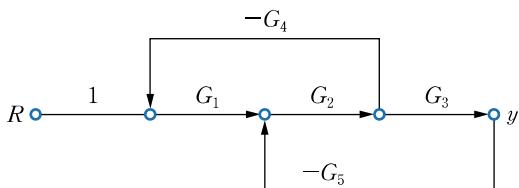
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1 + G_3 H_2 + H_4 + G_3 H_2 H_4}{\Delta} \quad (3.152)$$

예제 3-6

[그림 3-35]의 블록선도를 신호 흐름도로 표현하고 메이슨 공식을 사용하여 전체 시스템의 전달함수를 구하라.

풀이

[그림 3-35]의 블록선도를 신호 흐름도로 표현하면 [그림 3-45]와 같다. 입력 R 에서 출력 Y 까지의 순경로는 하나뿐이고 이득은 $G_1 G_2 G_3$ 이다. 루프는 총 2개이고, 이득은 각각 $-G_1 G_2 G_4$, $-G_2 G_3 G_5$ 이다. 두 개의 루프가 서로 만나고 있기 때문에 계산은 간단하다.



[그림 3-45] [그림 3-35]의 블록선도에 해당하는 신호 흐름도

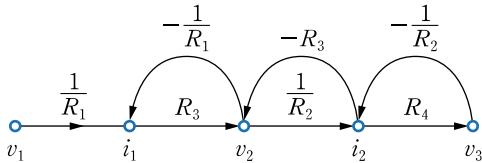
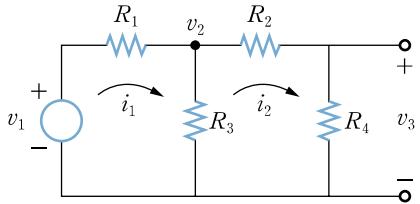
따라서 최종적인 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_4 + G_2 G_3 G_5} \quad (3.153)$$

블록선도 방식으로 푼 결과와 이 결과가 같음을 알 수 있다.

예제 3-7

[그림 3-46]과 같은 회로를 신호 흐름도로 표현하고 v_1 을 입력, v_2 를 출력으로 하는 전달함수를 구하라.



[그림 3-46] [예제 3-7]의 신호 흐름도

풀이

입력 v_1 에서 출력 v_2 까지의 순경로는 하나뿐이고 이득은 $\frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$ 이다. 루프는 총 3개이고, 이득은 각각 $-\frac{R_3}{R_1}$, $-\frac{R_3}{R_2}$, $-\frac{R_4}{R_2}$ 이다. 서로 만나지 않는 루프는 루프 1과 루프 3이다. 따라서 Δ 는 다음과 같다.

$$\Delta = 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2} \quad (3.154)$$

모든 루프가 순경로와 만나기 때문에 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4} \quad (3.155)$$

[그림 3-46]과 같은 회로에서 전달함수를 쉽게 얻기 위해 R_2 와 R_4 가 연결된 선을 개방하고 v_2 를 계산한 다음, 계산된 v_2 에서 R_2 와 R_4 가 직렬연결된 선에서 분압된다고 보고 다시 v_3 를 계산하려는 독자가 있을지 모르겠다. 즉 $\frac{v_2}{v_1}$ 와 $\frac{v_3}{v_2}$ 를 따로 구해 $\frac{v_3}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} \times \frac{v_3}{v_2}$ 와 같이 구하겠다는 것인데 최종식 (3.155)와는 틀린 결과이다. 관련 문제를 2장 [연습문제 2.15]에 남겼으니 참고하기 바란다.

3.4 상태방정식과 전달함수의 블록선도 표시

지금까지는 블록선도로 표현된 시스템으로부터 전달함수를 구하는 데 초점을 두고 공부를 했다. 이제는 주어진 전달함수를 역으로 블록을 사용하여 표시하는 방법을 알아보자. 이러한 방법은 하드웨어를 구현하거나 시스템의 특성을 좀 더 파악하는 데 매우 중요한 과정이다. 전달함수나 상태방정식을 블록으로 구성하는 방법은 여러 가지가 있으나, 여기에서는 표준적인 네 가지 방법을 소개한다.

- 제어기 표준형 controller canonical form
- 관측기 표준형 observer canonical form
- 가관측성 표준형 observability canonical form
- 가제어성 표준형 controllability canonical form

네 가지 방법은 각각 고유의 명칭이 있는데, 이 명칭의 의미는 상태방정식을 다루는 8장에서 더 자세히 설명할 것이다. 이제 아래의 전달함수에 대해서

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (3.156)$$

네 가지 방법으로 표시해보자.

제어기 표준형

식 (3.156)으로부터 다음과 같은 3차 상미분방정식을 얻을 수 있다.

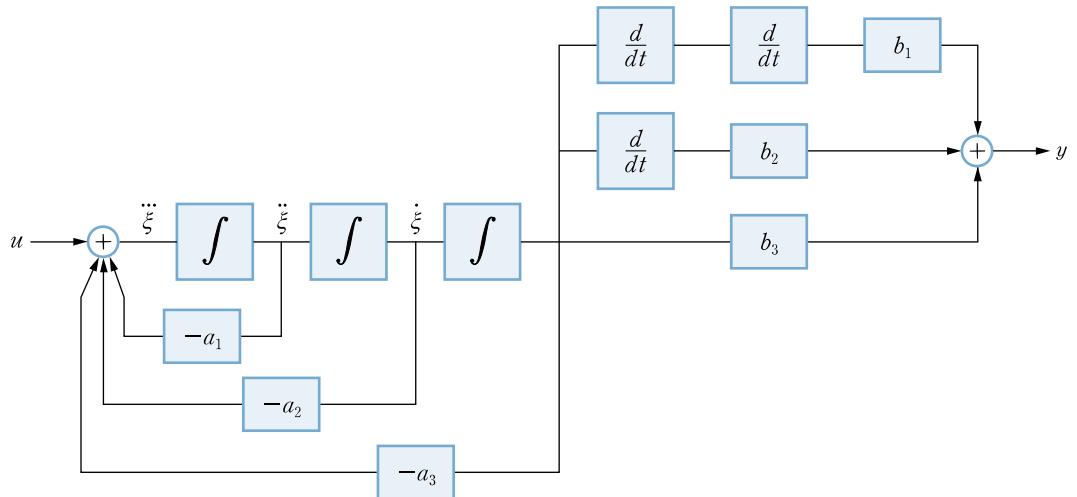
$$\ddot{y}^{(3)} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = b_3 u + b_2 \dot{u} + b_1 \ddot{u} \quad (3.157)$$

초깃값들이 모두 0이라는 가정 하에 중간 변수 ξ 를 도입하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^{(3)} + a_1 \ddot{\xi} + a_2 \dot{\xi} + a_3 \xi &= u \\ y &= b_3 \xi + b_2 \dot{\xi} + b_1 \ddot{\xi} \end{aligned} \quad (3.158)$$

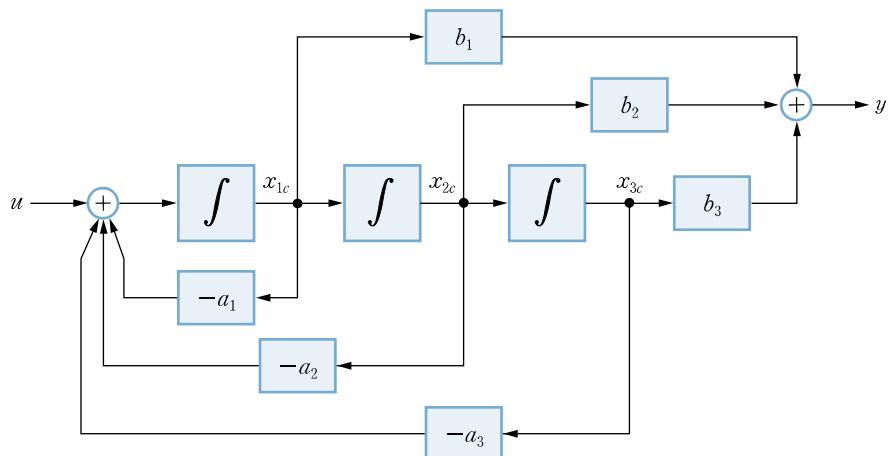
ξ 을 시스템 $\ddot{\xi}^{(3)} + a_1 \ddot{\xi} + a_2 \dot{\xi} + a_3 \xi = u$ 에서 입력 u 에 대한 출력으로 본다면, \dot{u} 에 대한 출력은 $\dot{\xi}$, \ddot{u} 에 대한 출력은 $\ddot{\xi}$ 이 된다. 따라서 최종 출력 y 는 식 (3.157)에서와 같이 $b_3 u$, $b_2 \dot{u}$, $b_1 \ddot{u}$ 에 대한 출력의 합으로 볼 수 있다.

식 (3.158)의 두 방정식을 그대로 블록으로 표현하면 [그림 3-47]과 같다. 그림에서 세 개의 적분기와 세 개의 피드백 이득으로 ξ 를 계산한 후, 미분기로 y 를 계산함을 볼 수 있다.



[그림 3-47] 식 (3.158)을 그대로 표현한 블록선도

그런데 시스템 구현에서 적분기는 잡음을 줄여주는 필터 역할을 하지만, 미분기는 잡음을 증폭시키기 때문에 사용을 자제해야 한다. 따라서 미분기를 기존의 적분기로 대체하는 게 좋다. [그림 3-48]을 보면, 미분기의 입력 신호가 적분기 뒤쪽으로 가면서 사라짐을 알 수 있다.



[그림 3-48] 제어기 표준형의 블록선도

제어기 표준형에서 상태방정식을 생각해보자. 우선 상태 x_{1c} , x_{2c} , x_{3c} 를 차례로 $\ddot{\xi}$, $\dot{\xi}$, ξ 로 선정하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1c} &= -a_1x_{1c} - a_2x_{2c} - a_3x_{3c} + u \\
 \dot{x}_{2c} &= x_{1c} \\
 \dot{x}_{3c} &= x_{2c} \\
 y &= b_1x_{1c} + b_2x_{2c} + b_3x_{3c}
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

행렬과 벡터를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}_c = Ax_c + b_cu, \quad y = c_c x_c \tag{3.160}$$

여기서 A , b_c , x_c , c_c 는 다음과 같다.

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_c = \begin{bmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \end{bmatrix}, \quad c_c = [b_1 \ b_2 \ b_3] \tag{3.161}$$

$a(s)$, $b(s)$, $\xi(s)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\begin{aligned}
 a(s) &= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 \\
 b(s) &= b_1s^2 + b_2s + b_3 \\
 \xi(s) &= a^{-1}(s)U(s)
 \end{aligned} \tag{3.162}$$

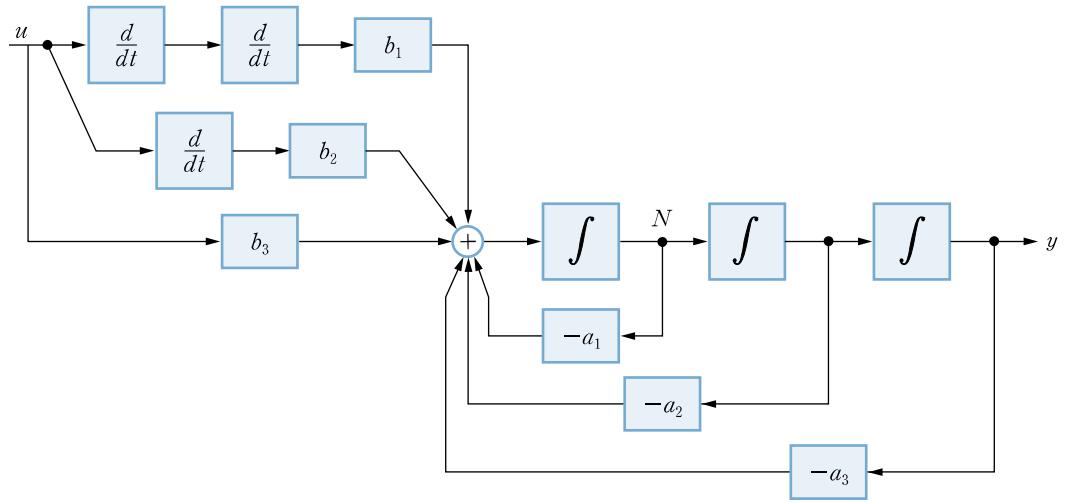
식 (3.158)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y(s) = b(s)a^{-1}(s)U(s) = b(s)\xi(s) \tag{3.163}$$

제어기 표준형은 식 (3.163)과 같이 $a^{-1}(s)U(s)$ 를 먼저 계산한 후 $b(s)$ 를 곱하는 과정을 거친다. 다음에 소개할 방법은 반대로 $Y(s) = a^{-1}(s)b(s)U(s)$ 의 $b(s)U(s)$ 를 먼저 계산하고, $a^{-1}(s)$ 를 곱한다.

가관측성 표준형

제어기 표준형과 달리 가관측성 표준형은 [그림 3-49]와 같이 미분기들이 앞에 붙어 있다. $b(s)U(s)$ 를 먼저 계산하기 때문이다. 제어기 표준형처럼 미분기를 제거해야 하는데, 이번 경우에는 그리 쉽지 않다.

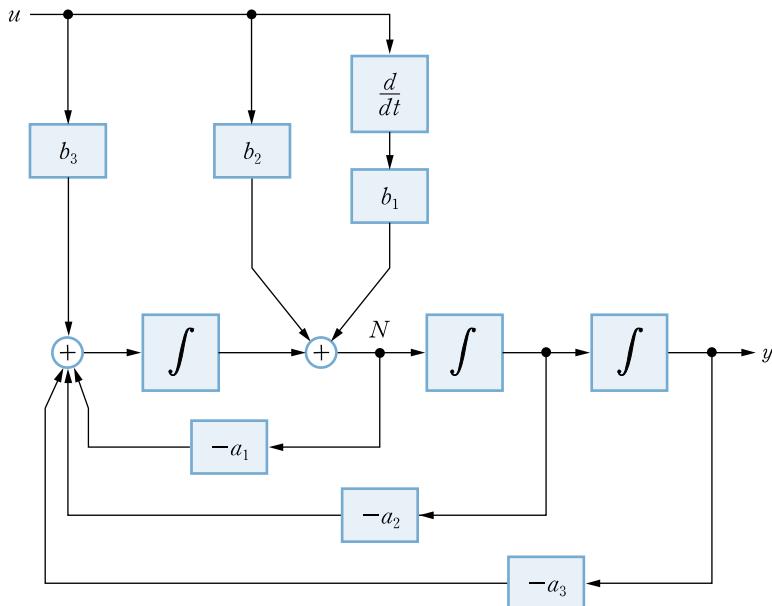


[그림 3-49] 변형 1

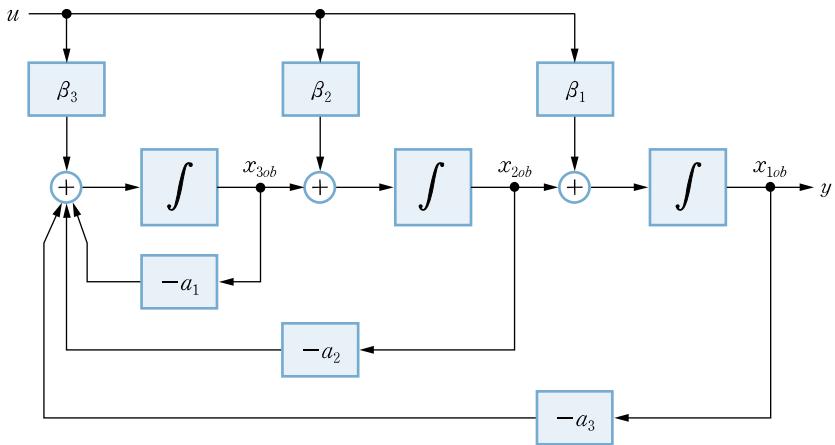
[그림 3-50]과 같이 미분기를 통한 신호를 적분기 앞으로 이동시킴으로써 쉽게 미분기가 사라지는 듯하나, 최종적인 [그림 3-51]을 보면, 다음과 같은 계수가 등장한다.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= b_1 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 b_1 \\ \beta_3 &= b_3 - a_2 b_1 - a_1 (b_2 - a_1 b_1)\end{aligned}\quad (3.164)$$

복잡하고 어려워 보일 수 있으나, 좀 살펴보면 금방 이해할 수 있다.



[그림 3-50] 변형 2



[그림 3-51] 가관측성 표준형

[그림 3-50]에서 보면 입력에서 들어오는 두 신호선(블록 b_1 , b_2 를 통과하는 선)을 N 지점의 오른쪽으로 이동시킬 때 고려해야 할 사항이 있다. 바로 N 지점의 밑으로 나가는 신호에 대한 보상을 해야 한다는 것이다. 따라서 b_3 , b_2 는 $b_3 - a_1 b_2$, $b_2 - a_1 b_1$ 로 바뀌어야 한다. 이런 과정을 한 번 더 거치면 최종적으로 식 (3.164)와 같은 β_1 , β_2 , β_3 가 얻어진다. 따라서 식 (3.164)를 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

가관측성 표준형인 경우는 [그림 3-51]의 상태를 기반으로 다음과 같은 상태방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_{ob} = A_{ob}x_{ob} + b_{ob}u, \quad y = c_{ob}x_{ob} \quad (3.166)$$

여기서 A_{ob} , b_{ob} , x_{ob} , c_{ob} 는 다음과 같다.

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b_{ob} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

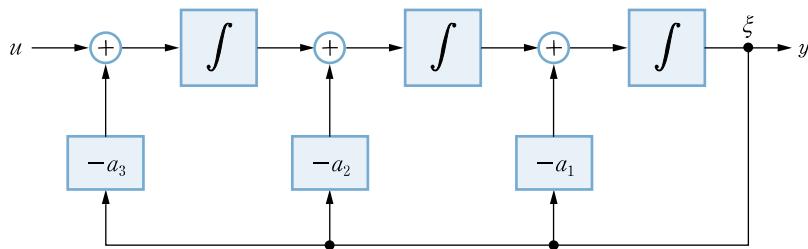
$$x_{ob} = \begin{bmatrix} x_{1ob} \\ x_{2ob} \\ x_{3ob} \end{bmatrix}, \quad c_{ob} = [1 \ 0 \ 0]$$

관측기 표준형

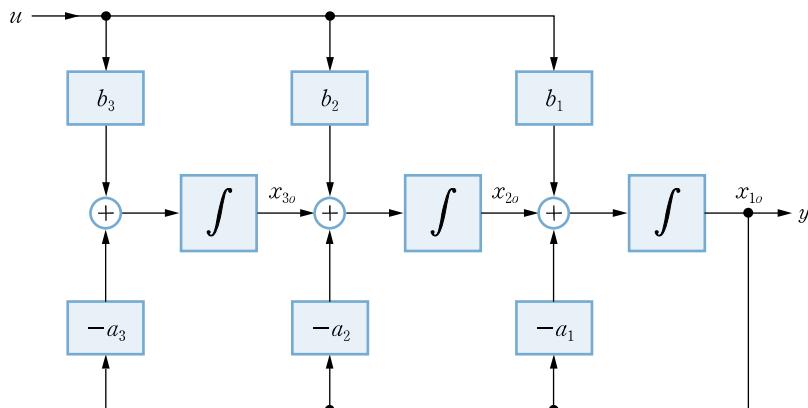
제어기 표준형에 사용했던 식 (3.158)을 다음과 같이 써보자.

$$\xi = s^{-3}u - a_1s^{-1}\xi - a_2s^{-2}\xi - a_3s^{-3}\xi \quad (3.168)$$

여기서 $\frac{1}{s^k}$ 은 라플라스 변환에서 배웠듯이 k 번 적분하라는 의미이다. 따라서 입력 u 로부터 ξ 를 계산하기 위해 [그림 3-52]와 같은 블록선도를 생각할 수 있다. 식 (3.156)의 분자에 해당하는 $b_1s^2 + b_2s + b_3$ 를 구현하기 위해서는 [그림 3-53]과 같이 입력단에 미분기를 사용하면 된다. 각 노드에서 빠져나가는 신호가 없기 때문에 적분기 앞으로 선을 옮기면서 미분기를 제거하면, 최종적으로 [그림 3-53]과 같은 블록을 얻을 수 있다. 이를 살펴보면, 제어기 표준형과 같이 관측기 표준형에서도 모든 이득들이 전달함수의 계수들로 구성됨을 알 수 있다.



[그림 3-52] ξ 를 계산하는 블록선도



[그림 3-53] 관측기 표준형

관측기 표준형에서 상태방정식을 생각해보자. [그림 3-53]의 상태를 기반으로 다음과 같은 상태방정식을 세울 수 있다.

$$\dot{x}_o = Ax_o + b_o u, \quad y = c_o x_o \quad (3.169)$$

여기서 A_o , b_o , x_o , c_o 는 다음과 같다.

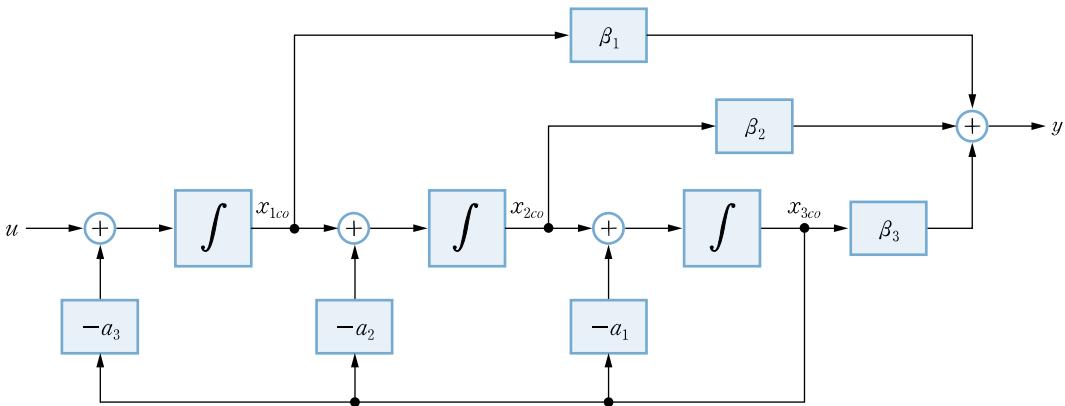
$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad x_o = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ x_{3o} \end{bmatrix}, \quad c_o = [1 \ 0 \ 0] \quad (3.170)$$

여기서 제어기 표준형과 관측기 표준형은 다음과 같은 관계에 있음을 알 수 있다.

$$A_o = A_c^T, \quad b_o = c_c^T, \quad c_o = b_c^T \quad (3.171)$$

가제어성 표준형

가제어성 표준형은 관측기 표준형과 같이 $\frac{1}{a(s)U(s)}$ 을 먼저 구현하고, 출력을 상태변수들의 적절한 선형 조합으로 나타낸다. 가제어성 표준형에서 상태방정식은 [그림 3-54]의 상태를 기반으로,



[그림 3-54] 가제어성 표준형

다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_{co} = A_{co}x_{co} + b_{co}u, \quad y = c_{co}x_{co} \quad (3.172)$$

여기서 A_{co} , b_{co} , x_{co} , c_{co} 는 다음과 같다.

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{co} = \begin{bmatrix} x_{1co} \\ x_{2co} \\ x_{3co} \end{bmatrix}$$

$$c_{co} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] = [b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.173)$$

여기서 가관측성 표준형과 가제어성 표준형은 다음과 같은 관계에 있음을 알 수 있다.

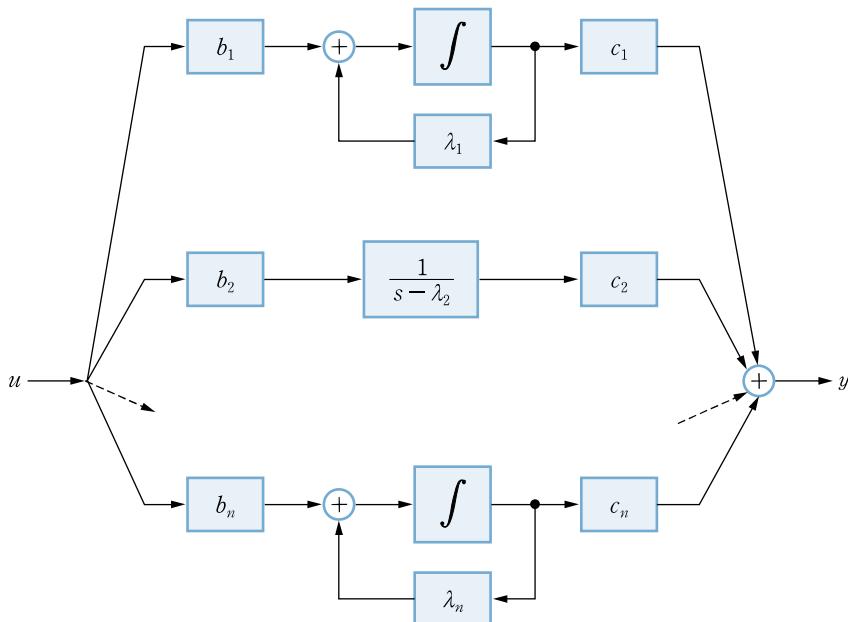
$$A_{ob} = A_{co}^T, \quad b_{ob} = c_{co}^T, \quad c_{ob} = b_{co}^T \quad (3.174)$$

지금까지 소개한 네 가지 표준형을 정리해보자. 제어기 표준형과 가제어성 표준형에서는 입력이 피드백 형태로 모든 상태에 영향을 미치기 때문에, 모든 상태변수를 제어할 수 있다. 이러한 제어 가능에 대해서는 8장에서 더 자세히 다룰 것이다. 한편 출력은 적분기 출력, 즉 상태변수들에 대한 선형적 결합으로 나타낼 수 있다. 선형적 결합으로 상태변수들 사이에 상쇄가 일어나면, 시스템이 관측 불능이 될 수도 있다. 이러한 관측 불능에 대해서도 8장에서 더 자세히 다룰 것이다. 위와 비슷한 내용을 관측기 표준형과 가관측성 표준형에 적용할 수 있다. 단 입력과 출력의 역할이 바뀌기만 하면 된다.

한편 제어기 표준형과 관측기 표준형에서는 모든 블록의 파라미터들이 전달함수의 계수들로 표시되는데 비해, 가제어성 표준형과 가관측성 표준형에서의 블록 파라미터 중에는 가제어성과 가관측성과 관련된 값들($\beta_1, \beta_2, \beta_3$)이 나온다. 또한 $\frac{1}{a(s)}$ 을 구현하는 방법 면에서는 제어기 표준형과 가관측성 표준형이 비슷하고, 관측기 표준형과 가제어성 표준형이 비슷하다.

위에서 소개한 네 가지 방법 외에도 다음과 같은 경우들이 있다.

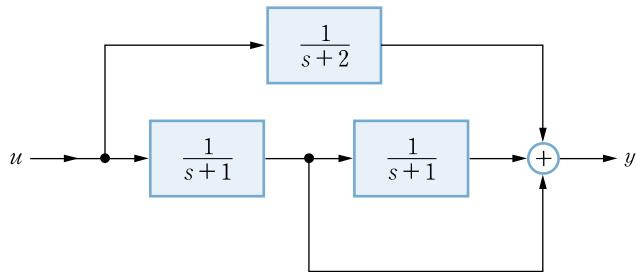
- 병렬 구조로 구현하는 경우



[그림 3-55] 병렬 구조로 구현

$$\sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{s - \lambda_i} \quad (3.175)$$

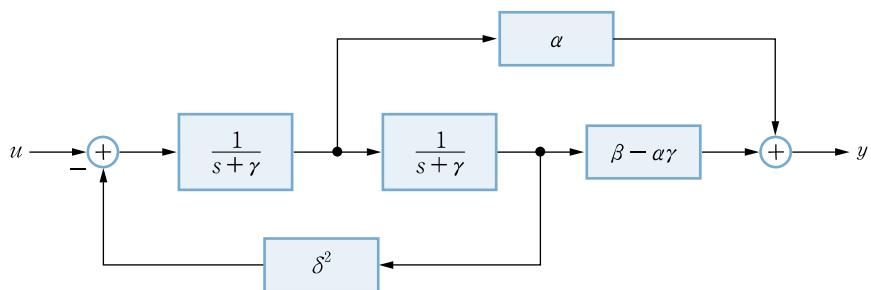
• 중복되는 극점이 있는 경우



[그림 3-56] 중복되는 극점이 있는 경우

$$\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (3.176)$$

• 복소 극점이 있는 경우



[그림 3-57] 복소 극점이 있는 경우

$$\frac{\alpha s + \beta}{(s + \gamma)^2 + \delta^2} \quad (3.177)$$

3.5 비선형 시스템의 선형화

‘부록 A.2’에는 선형 시스템의 신호를 분해하고 합성하는 방법이 소개되어 있다. 입력이 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 일 때의 출력을 각각 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 라고 한다면, 입력이 $u_1(t) + u_2(t)$ 일 때의 출력은 $y_1(t) + y_2(t)$ 가 된다는 선형 시스템의 성질을 이용하면, 계산을 매우 효율적으로 수행할 수 있다. 사실 이러한 선형성을 이용하면, 계산뿐만 아니라 분석이나 제어도 매우 쉽게 처리할 수 있다. 하지만 불행하게도 세상의 대부분 시스템은 이런 선형성을 갖지 않는다. 대부분의 시스템 출력에는 한계가 있기 때문에, 어느 정도 이상의 입력에는 선형성이 보장되지 않는다. 간단하게 예로 스프링을 생각해보면, 탄성 한계 이상으로 너무 놀린 스프링은 $F = kx$ 의 선형적인 관계식을 더 이상 따르지 않는다.

이처럼 비선형 시스템이 선형 시스템보다 훨씬 일반적이고 현실적이다. 그러나 비선형 시스템에 대한 내용은 너무 어려워서, 이 책의 수준을 넘어가는 고급 수학이 동원되어야 한다. 실제 산업 현장에서는 비선형 시스템에 대한 비선형 제어기를 직접 설계하기보다는 선형 시스템으로 변환 또는 근사화를 한 다음, 선형 모델을 바탕으로 선형 제어기를 설계한다.

우선 비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하는 방법을 소개한다. 다음과 같은 비선형 상태방정식이 주어졌다고 하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a [\sin(x_1 + \delta) - \sin(\delta)] - bx_2 + cu\end{aligned}\tag{3.178}$$

모델식에 $\sin(\cdot)$ 과 같이 비선형 함수가 있는 것을 볼 수 있다. 이 비선형 함수를 제거하기 위해 다음과 같은 입력을 생각해보자.

$$u = \frac{a}{c} [\sin(x_1 + \delta) - \sin(\delta)] + \frac{v}{c}\tag{3.179}$$

여기에서 v 는 새로운 입력이라고 생각하면 된다. 식 (3.179)의 u 를 식 (3.178)의 비선형 상태방정식에 대입하면, 다음과 같은 선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v\end{aligned}\tag{3.180}$$

이를 행렬과 벡터를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}v \quad (3.181)$$

식 (3.181)을 기반으로 제어 입력 v 를 설계하면, 식 (3.179)에 의해 자동으로 u 가 계산된다. 이와 같은 방법을 피드백 선형화라 하며, 이에 대한 많은 연구들이 이루어져 왔다. 관심 있는 독자는 ‘부록 B’의 참고 문헌 [20]을 참고하기 바란다.

그러나 위와 같이 비선형 시스템을 정확하게 선형 시스템으로 변환하는 일이 쉽지 않다면, 근사화 방법을 써야한다. 다음과 같은 비선형 시스템이 있다고 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (3.182)$$

여기서 x, u, y 는 각각 상태, 입력, 출력 변수를 나타내며, $f(x, u)$ 와 $g(x, u)$ 는 테일러급수가 가능한, 충분히 매끄러운 벡터 함수라고 가정하자. 만약 식 (3.182)의 $f(\cdot, \cdot)$ 와 $g(\cdot, \cdot)$ 에서 $f(x_0, u_0) = 0$ 과 $y_0 = g(x_0, u_0)$ 를 만족하는 (x_0, u_0, y_0) 가 존재하면, 이 점에서는 $\dot{x}(t) = 0$ 이 되어 값이 변하지 않고 계속 유지될 것이다. 이 점을 평형점 equilibrium point, 또는 동작점 operating point라고 부른다. 이 동작점 부근에서의 근사화를 통하여 선형화된 식을 얻을 수 있다.

동작점 부근에서 입력 u 가 δu 만큼 미세하게 변화하면, 상태 x 와 출력 y 도 그러한 변화에 대응하여 δx 와 δy 만큼 미세하게 변화한다. 따라서 식 (3.182)를 동작점 (x_0, u_0, y_0) 부근에서 다음과 같이 테일러급수로 일차항까지 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_0 + \delta x(t)] &= f(x_0 + \delta x, u_0 + \delta u) \\ &\approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0) \delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \delta u(t) \end{aligned} \quad (3.183)$$

출력 방정식 $y(t) = g(x(t), u(t))$ 도 테일러급수 전개로 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$y_0 + \delta y(t) \approx g(x_0, u_0) + \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, u_0) \delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} g(x_0, u_0) \delta u(t) \quad (3.184)$$

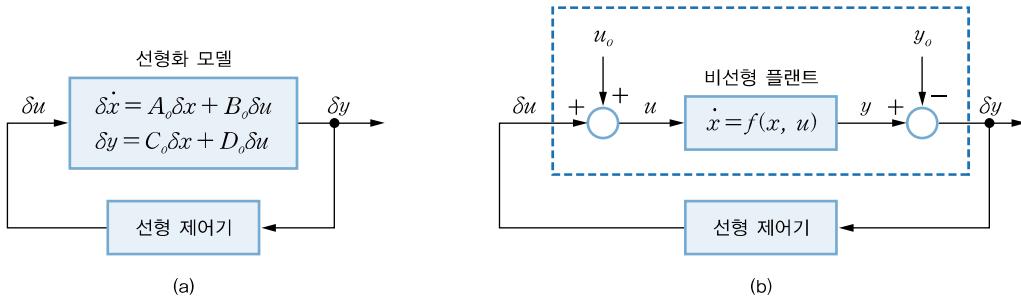
식 (3.183)과 식 (3.184)를 정리하면 다음과 같이 선형화된 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &\approx A_0 \delta x(t) + B_0 \delta u(t) \\ \delta y(t) &\approx C_0 \delta x(t) + D_0 \delta u(t) \end{aligned} \quad (3.185)$$

여기서 $\delta u = u - u_0$, $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$ 이고, 계수 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0), & B_0 &= \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \\ C_0 &= \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, u_0), & D_0 &= \frac{\partial}{\partial u} g(x_0, u_0) \end{aligned} \quad (3.186)$$

식 (3.186)의 선형 모델에서 주의해야 할 점은 이 모델이 동작점 부근에서만 유효하다는 것이다. 만일 동작점에서 너무 벗어나면 실제 시스템과 모델식 (3.186)의 오차가 커진다. 따라서 여러 동작점에서 제어기를 설계해서, 상황에 따라 가장 가까이 있는 동작점의 제어기를 선택해야 할 것이다. 선형화된 모델에 바탕을 둔 제어기와, 이를 실제 시스템에 적용한 경우가 [그림 3-58]에 나타나 있다. 실제로 적용할 때, 평형점 또는 동작점에서의 값들을 보상해야함을 잊어서는 안 된다.



[그림 3-58] 비선형 시스템의 선형화

(a) 등가 선형화 시스템 (b) 비선형 플랜트와 동작점

예제 3-8

[그림 3-59]와 같은 자기 부상 시스템을 생각해보자. 코일에 흐르는 전류에 의해 전자기 현상으로 쇠공이 공중에 부양한다. 공의 위치가 광학적인 센서에 의해 측정되고, 전류를 적당히 제어함으로써 쇠공이 공중에 지속적으로 떠있게 된다. 질량 m 인 쇠공의 운동은 다음과 같은 방정식으로 모델링할 수 있다.

$$m\ddot{y} = -ky + mg + F(y, i) \quad (3.187)$$

여기서 y , k , g , $F(y, i)$ 는 기준(코일 바로 밑을 $y = 0$ 으로 정한다.)으로부터 측정된 공의 위치, 마찰계수, 중력 가속도, 전류 i 에 의해 발생한 전자석 힘을 각각 나타낸다. 공의 위치에 따른 전자석의 인덕턴스는 다음과 같이 모델링된다.

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1+y/a} \quad (3.188)$$

전자석에 저장되는 에너지는 $\frac{1}{2L(y)i^2}$ 이므로 힘 $F(y, i)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(y, i) = \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{L_0 i^2}{2a(1+y/a)^2} \quad (3.189)$$

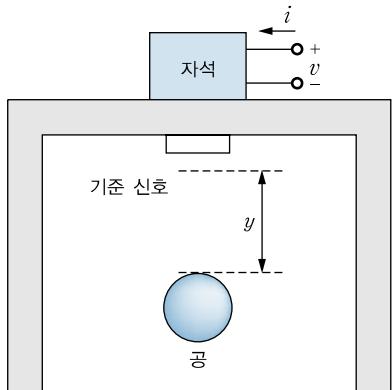
전압원 v 와 발생하는 전류 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$v = \dot{\phi} + Ri \quad (3.190)$$

여기서 R 은 회로의 저항 성분이고, $\dot{\phi} = L(y)i$ 는 쇄교자속이다. 앞의 여러 관계식에서 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$ 와 같이 상태변수를 정하면 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0 ax_3^2}{2m(a+x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left[-Rx_3 + \frac{L_0 ax_2 x_3}{(a+x_1)^2} + u \right] \end{aligned} \quad (3.191)$$

이때 비선형 상태방정식 (3.191)을 변환과 근사화를 통하여 선형 방정식으로 표현하라.



[그림 3-59] 자기 부상 시스템

풀이

우선 간단한 변환을 통하여 상태방정식 (3.191)을 부분적으로 선형적으로 만들어보자. 새로운 입력 \bar{u} 를 사용하여 $u = Rx_3 - \frac{L_0 ax_2 x_3}{(a+x_1)^2} + L(x_1)\bar{u}$ 와 같이 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0 ax_3^2}{2m(a+x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= \bar{u} \end{aligned} \quad (3.192)$$

동작점 $x_1 = y_0$, $x_2 = 0$, $x_3 = i_0$ 에서 선형화를 하고, 입력을 \bar{u} 라고 하면, 다음과 같은 선형 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \\ \dot{\delta x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L_0 a i_0^2}{m(a+y_0)^3} & -\frac{k}{m} & -\frac{L_0 a i_0}{m(a+y_0)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (3.193)$$

동작점은 평형점이므로 y_0 와 i_0 는 식 (3.192)에 의해 $g = \frac{L_0 a i_0^2}{(2m(a+y_0)^2)^2}$ 을 만족한다.

앞에서 설명한 선형 시스템으로의 변환과 근사화 외에 기술 함수라는 것을 사용하여 비선형 시스템을 선형 시스템처럼 분석하는 방법이 있다. 이는 주파수 응답을 배우는 7장에서 다룰 것이다.

→ Chapter 03 핵심요약

01. 선형 시스템을 이루는 3가지 수동 소자

선형 시스템은 다음 표와 같이 3가지 수동 소자, 즉 용량성 소자, 유도성 소자, 저항성 소자를 바탕으로 모델링된다.

대상 물리량	기계 시스템		전기 시스템		위상 차이
	힘(f), 속도(v)		전압(e), 전류(i)		
용량성 소자	스프링	$f = k \int v d\tau$	축전기	$e = \frac{1}{C} \int i d\tau$	전압(힘)이 전류(속도) 보다 $\frac{\pi}{2}$ 느린다.
유도성 소자	질량	$f = m \frac{dv}{dt}$	인덕터	$e = L \frac{di}{dt}$	전압(힘)이 전류(속도) 보다 $\frac{\pi}{2}$ 빠르다.
저항성 소자	댐퍼	$f = kv$	저항	$e = Ri$	전압(힘)과 전류(속도)의 위상이 같다.

* 위상 비교 시 복원력의 음수(위상차 π)는 고려하지 않았다.

02. 임펄스 응답과 전달함수

전달함수는 입출력 변수에 대한 라플라스 변환의 비이다. 다음과 같은 상태방정식

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

의 전달함수는 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 이다. 전달함수를 역변환하여 시간 함수로 나타내면 임펄스 응답함수 $g(\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B$ 가 되며, 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \\ &= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

03. 단일 피드백 시스템

단일 피드백 시스템은 다음과 같은 블록선도와 전달함수로 표시된다.

블록선도	전달함수
	$\frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$

04. 여러 피드백이 존재하는 복잡한 시스템

여러 개의 피드백이 존재하는 복잡한 시스템은 신호 흐름도를 사용하면 편리하게 나타낼 수 있으며, 전체 전달함수를 구하기 위해서는 메이슨 공식을 사용하면 효과적이다.

신호 흐름도	전달함수(메이슨 공식)
	$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \dots$ $M = \frac{y_o}{y_i} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$

05. 전달함수의 블록선도 및 상태방정식 표현

다음과 같은 전달함수가 주어질 때, 이 전달함수를 제어기 표준형과 관측기 표준형으로, 또 각각에 대한 블록선도와 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

제어기 표준형	
블록 선도	
상태 방정식	$\dot{x}_c = Ax_c + b_c u, \quad y = c_c x_c$ $A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_c = \begin{bmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \end{bmatrix}, \quad c_c = [b_1 \ b_2 \ b_3]$
관측기 표준형	
블록 선도	
상태 방정식	$\dot{x}_o = Ax_o + b_o u, \quad y = c_o x_o$ $A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad x_o = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ x_{3o} \end{bmatrix}, \quad c_o = [1 \ 0 \ 0]$

이외에 가관측성 표준형과 가지어성 표준형도 있다.

06. 비선형 시스템의 선형화

복잡한 비선형 시스템도 동작점(x_0, u_0) 부근에서는 선형 모델로 근사화될 수 있다. 다음과 같은 비선형 시스템

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

은 다음과 같이 선형 시스템으로 근사화된다.

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &\approx A_0 \delta x(t) + B_0 \delta u(t) \\ \delta y(t) &\approx C_0 \delta x(t) + D_0 \delta u(t)\end{aligned}$$

여기서 $\delta u = u - u_0$, $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$ 이고, 계수 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0), \quad B_0 = \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \\ C_0 &= \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, u_0), \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial u} g(x_0, u_0)\end{aligned}$$

→ Chapter 03 연습문제

3.1 스프링, 댐퍼, 질량에 대한 기계적 임피던스를 $Z(s) = \frac{F(s)}{V(s)}$ 와 같이 정의한다면, 다음 중 맞는 것은?

($V(s)$: 속도에 대한 라플라스 변환, $F(s)$: 가한 힘에 대한 라플라스 변환,
 k : 스프링 상수, b : 댐퍼 마찰계수, m : 질량)

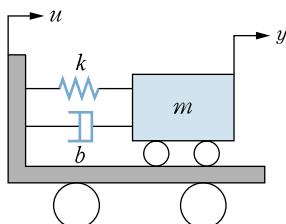
- ① 스프링 : $\frac{k}{s}$, 댐퍼 : b , 질량 : ms
- ② 스프링 : k , 댐퍼 : b , 질량 : m
- ③ 스프링 : k , 댐퍼 : bs , 질량 : ms^2
- ④ 스프링 : $\frac{k}{s^2}$, 댐퍼 : $\frac{b}{s}$, 질량 : m

3.2 축전기, 저항, 인덕터에 대한 전달함수 $G(s) = \frac{V(s)}{Q(s)}$ 를 알맞게 연결한 것은?

($V(s)$: 전압에 대한 라플라스 변환, $Q(s)$: 전하량에 대한 라플라스 변환,
 C : 용량 상수, R : 저항, L : 유도상수)

- ① 축전기 : $\frac{1}{C}$, 저항 : $\frac{R}{s}$, 인덕터 : Ls^2
- ② 축전기 : $\frac{1}{Cs}$, 저항 : R , 인덕터 : Ls
- ③ 축전기 : $\frac{1}{C}$, 저항 : R , 인덕터 : L
- ④ 축전기 : $\frac{s}{C}$, 저항 : R , 인덕터 : $\frac{L}{s}$

3.3 다음 그림과 같이 수레 위에 질량 m 인 물체가 움직이고 있다. 입력은 수레의 변위 $u(t)$ 이고, 출력은 수레 위에 있는 물체의 변위 $y(t)$ 라고 하자.



- (a) 전달함수 $G(s)$ 를 구하라.

(b) 상태변수를 다음과 같이 정의할 때, 상태방정식을 구하라.

$$X_1(s) = sQ(s), \quad X_2(s) = Q(s)$$

여기서 $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ 라고 할 때, $Q(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{U(s)}{D(s)}$$

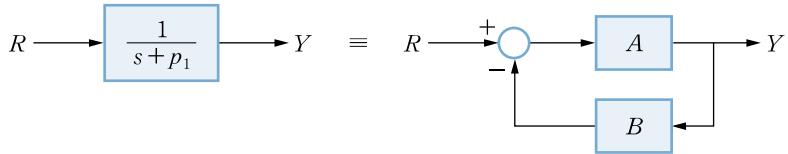
(c) 상태변수를 다음과 같이 정의할 때, 상태방정식을 구하라.

$$X_1(s) = \frac{1}{s} [bU(s) - bY(s) + X_2(s)]$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s} [kU(s) - kY(s)]$$

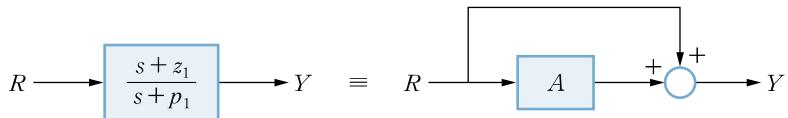
(d) 상태변수를 $x = [y \ y']^T$ 라 할 때, 상태방정식을 구하라.

3.4 다음 그림의 왼쪽 블록선도를 오른쪽 피드백 형태로 표현할 때 A와 B에 적당한 것은?



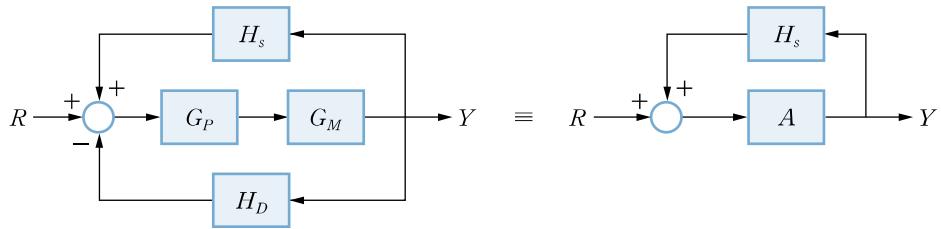
- | | |
|----------------------------------|------------------------|
| ① A : $\frac{1}{s}$, B : p_1 | ② A : s , B : $-p_1$ |
| ③ A : $\frac{1}{s}$, B : $-p_1$ | ④ A : s , B : p_1 |

3.5 다음 그림의 왼쪽 블록선도를 오른쪽처럼 표현할 때 A에 적당한 것은?



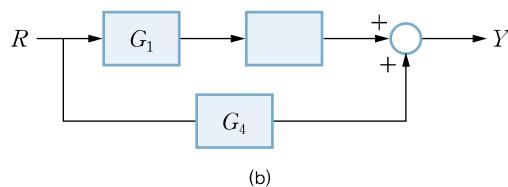
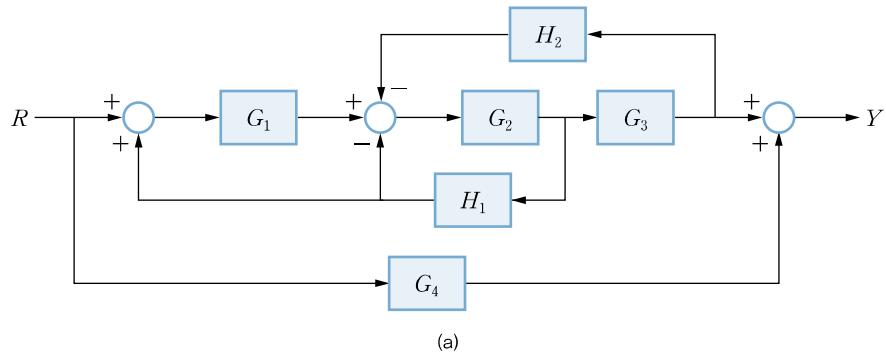
$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{z_1 - p_1}{s + p_1} & \textcircled{2} \frac{z_1 + p_1}{s + p_1} \\ & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \textcircled{3} \frac{z_1 + p_1}{s - p_1} & \textcircled{4} \frac{z_1 - p_1}{s - p_1} \end{array}$$

3.6 다음 그림의 왼쪽 블록선도를 오른쪽처럼 표현할 때 A에 적당한 것은?

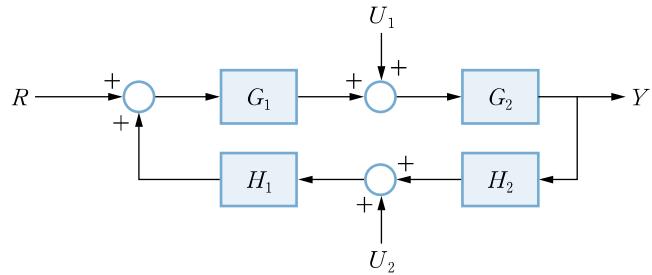


$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{G_P G_M}{1 + G_P G_M H_D} & \textcircled{2} \frac{-G_P G_M}{1 + G_P G_M H_D} \\ \textcircled{3} \frac{G_P G_M}{1 - G_P G_M H_D} & \textcircled{4} \frac{G_P G_M H_D}{1 + G_P G_M} \end{array}$$

3.7 다음 그림에서 (a) 블록선도를 (b) 블록선도로 바꿀 때, 빈칸에 들어갈 전달함수를 구하라.



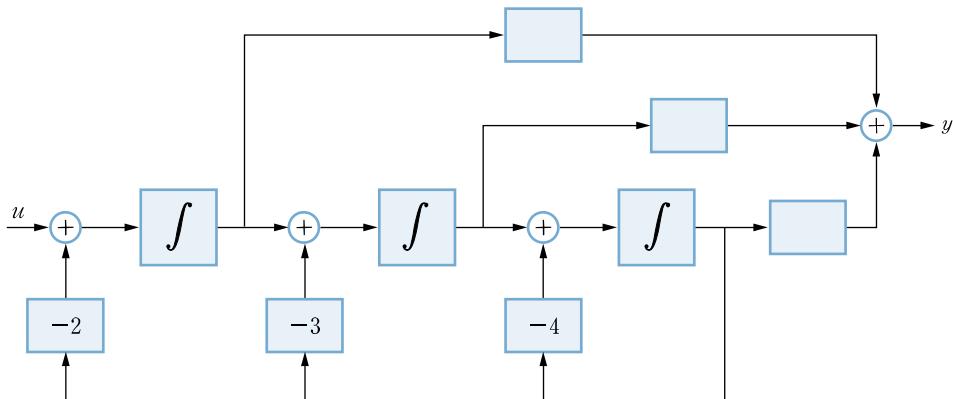
3.8 다음 그림에서 입력 R , U_1 , U_2 에 대한 출력 Y 로의 전달함수를 각각 구하라.



3.9 다음과 같은 전달함수

$$G(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

을 다음 그림과 같이 블록선도로 나타낼 때, 빈칸에 알맞은 것은?



3.10 다음과 같은 비선형 상태방정식으로 표시되는 시스템의 평형점을 모두 구하고, 각 평형점에서 선형화 모델을 구하라.

$$\dot{x}(t) = -x^2(t) - u^2(t) + 1$$

$$y(t) = x(t)u(t)$$

3.11 다음과 같은 미분 및 적분방정식으로 기술된 모델식에서 입력 $r(\cdot)$ 에 대한 출력 $y(\cdot)$ 로의 전달함수를 구하고 상태방정식으로 표현하라.

$$(a) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t) + \frac{dr(t)}{dt}$$

$$(b) \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 7 \int_0^t y(\tau)d\tau = \frac{dr(t)}{dt} + 3r(t)$$

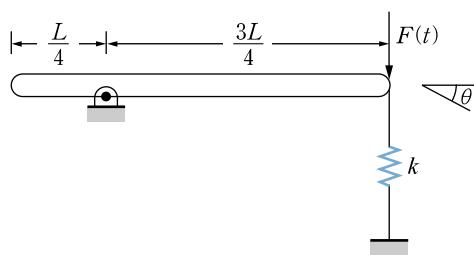
$$(c) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t - T)$$

3.12 시스템에 계단 입력을 기할 때 출력 $y(t)$ 가 다음과 같다고 하자. 각각에 대해 전달함수를 구하라.

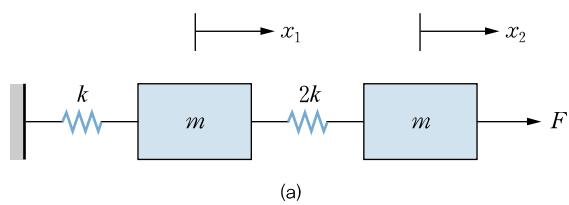
$$(a) y(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

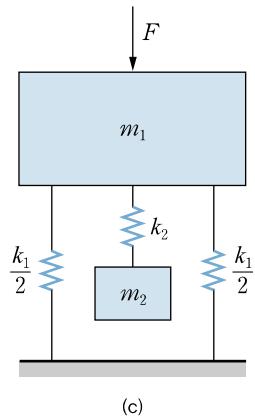
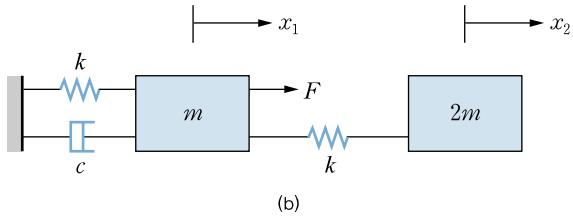
$$(b) y(t) = 8t - 4e^{-4t} - 2e^{-5t}$$

3.13 다음 그림과 같은 시스템에서 입력으로 $F(t) = F_0 e^{-t}$ 을 기할 경우, 시스템의 출력 $\theta(t)$ 를 계산하라. 입력 $F(t)$ 에서 출력 $\theta(t)$ 로의 전달함수도 구하라. (막대의 질량은 m 이다.)

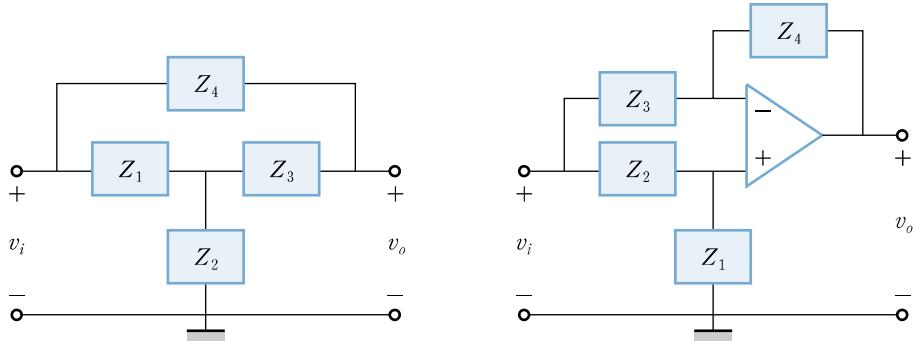


3.14 다음의 질량-스프링-댐퍼 시스템에 대한 상태방정식을 구하라.



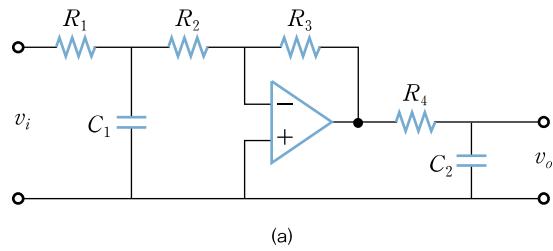


3.15 복소 임피던스 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 를 갖는 다음의 회로에서 입력 전압 v_i 에 대한 출력 전압 v_o 로의 전달함수를 구하라.

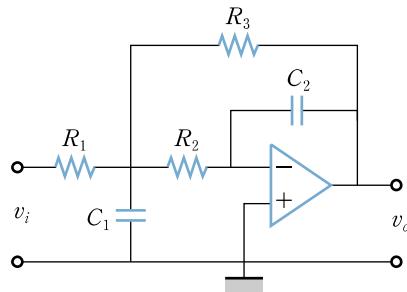


3.16 다음의 전기회로에 대한 적당한 상태를 정하고, 상태방정식을 구하라.

(단, 입력은 v_i , 출력은 v_o 이다.)

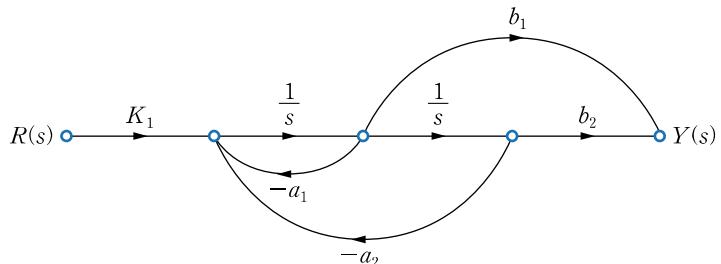


(a)

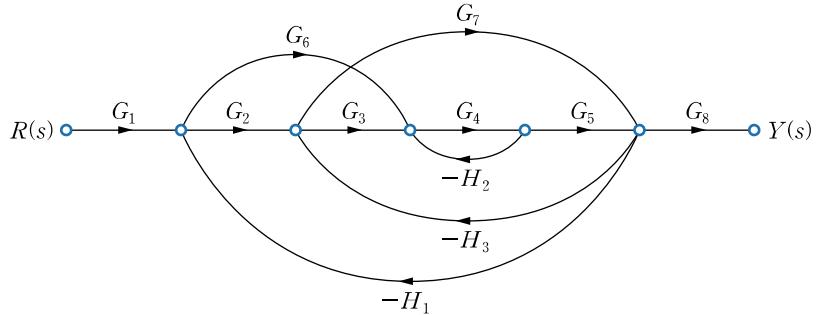


(b)

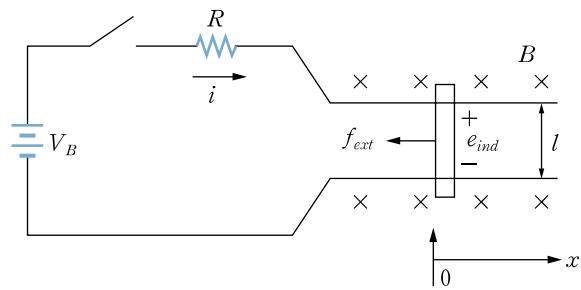
3.17 다음의 신호 흐름도에서 전달함수 $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 를 구하라.



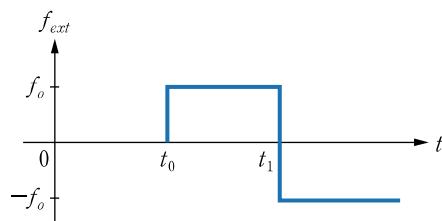
3.18 다음의 신호 흐름도에서 전달함수 $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 를 구하라.



3.19 다음 그림과 같은 선형 직류기(직류기)를 생각해보자. 일정하고 균일한 자계(자속밀도 B)가 지면 속으로 향하고 외부의 힘 f_{ext} 를 가할 때, 도체 막대의 이동 속도($v = \dot{x}$), 유도기전력(e_{ind}), 전류(i)를 시간에 대한 그래프로 개략적으로 표시하라. 또한 $V_B = 0$ 일 때 전달함수 $V(s)/F_{ext}(s)$ 를 구하라. (단, 움직이는 도체 막대의 질량은 m 이고, 마찰력은 무시한다.)

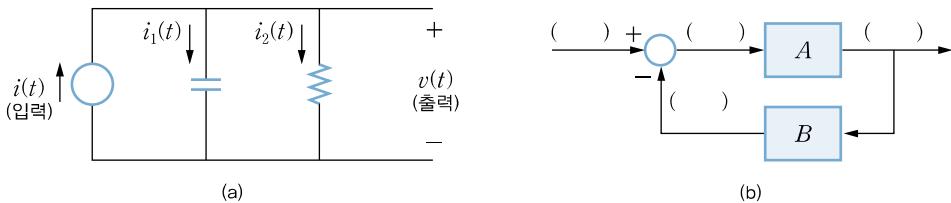


(a)

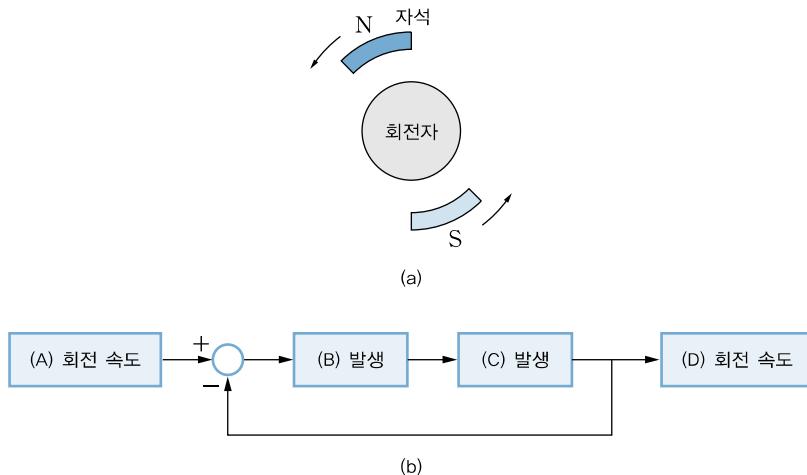


(b)

- 3.20** 다음 그림 (a)와 같은 회로를 피드백 블록선도로 그림 (b)처럼 나타내려고 한다. 각 선의 물리적인 의미와 블록 A와 B의 기능을 설명하라.



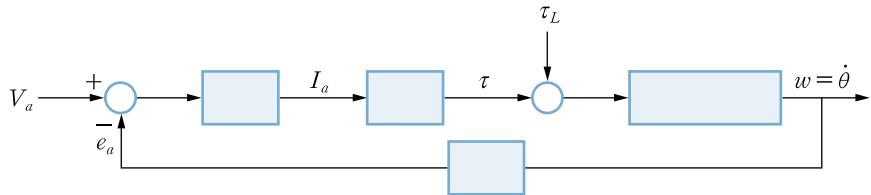
- 3.21** 다음 그림 (a)는 유도 전동기의 원리를 간단하게 설명하기 위한 개념도이다. 외부의 자석이 시계 반대 방향으로 일정한 속도로 회전한다고 할 때, 회전자가 따라서 움직이는 원리를 그림 (b)와 같이 피드백 형식으로 표현하였다. 빙간에 알맞은 말은?



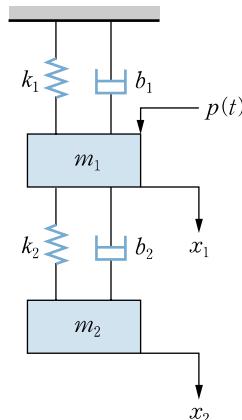
	(A)	(B)	(C)	(D)
①	자석	유도기전력	전류	회전자
②	자석	전류	유도기전력	회전자
③	회전자	유도기전력	전류	자석
④	회전자	전류	유도기전력	자석

참고 이 피드백 구조를 통해 정상상태에서 회전자의 속도가 자석의 속도보다 항상 느림을 알 수 있다.

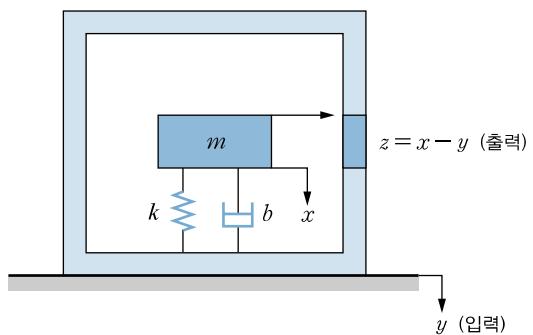
3.22 본문에서 직류 전동기를 4개의식([표 3-7] 참고)으로 모델링하였다. 이 4개의식을 다음 그림과 같이 블록선도로 표현한다고 할 때, 빈 칸에 들어갈 적당한 전달함수를 구하라.



3.23 **심화** 다음 그림과 같은 기계 시스템을 생각해보자. 외부 힘이 없을 때 평형점으로부터의 위치를 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라고 하면, 입력 $p(t)$ 에 대한 위치 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 를 기술하는 운동방정식을 구하라.



3.24 **심화** 오른쪽 그림은 지진으로 지반의 위치가 변하는지를 감지하는 장치이다. x 는 $y = 0$ 일 때 정상상태에서 벗어난 거리를 나타낸다. 지진 등에 의해 지면으로부터 영향을 받는 y 를 입력으로, x 와의 차이, 즉 $z = x - y$ 를 출력으로 간주했을 경우, 전달함수를 구하라.



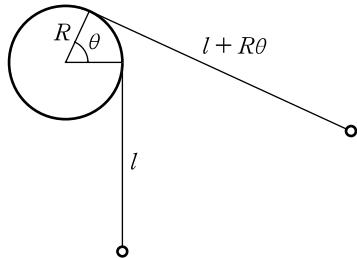
3.25 [실험] 다음과 같이 전달함수를 전개했을 때,

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} h_i s^{-i}$$

가관측성 표준형(또는 가제어성 표준형)으로 구한 β_i 가 다음을 만족함을 보여라.

$$\beta_i = h_i$$

3.26 [실험] 다음과 같은 간단한 진자 시스템을 생각해보자. 질량이 거의 없는 현이 고정된 실린더 위를 감으면서 진자운동을 할 때 θ 와 $\dot{\theta}$ 를 상태변수로 하는 상태방정식을 세워라. (단, 실린더의 반지름은 R 이고, 현이 아래로 수직으로 늘어질 때 길이는 l 이다. 현의 끝에는 질량 m 인 추가 달려있다.)

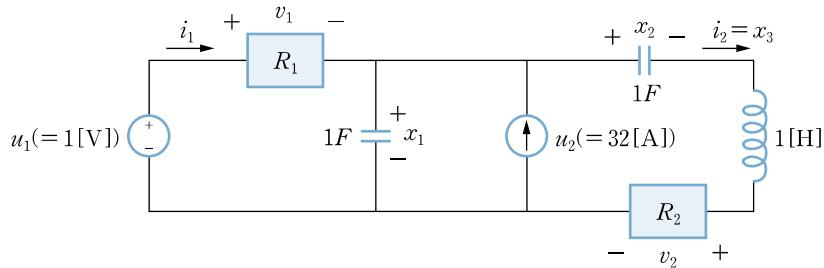


구한 비선형 방정식을 $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ 근처에서 선형화하여 선형 방정식을 구하라.

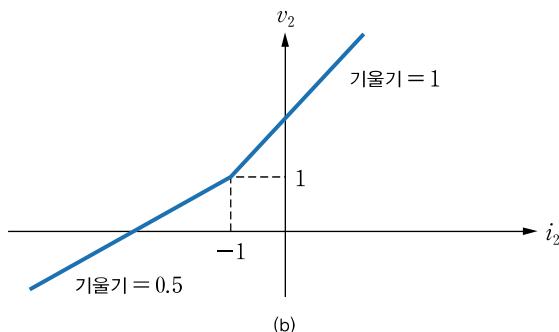
3.27 [실험] 다음 그림 (a)와 같은 전압원과 전류원이 있는 회로를 생각해보자. 비선형 저항 R_1 과 R_2 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{저항 } 1 : i_1 &= f_1(v_1) = v_1^5 \\ \text{저항 } 2 : v_2 &= f_2(i_2) \end{aligned}$$

여기서 함수 $f_2(\cdot)$ 은 그림 (b)와 같다. 그림에 표시된 상태변수 x_1, x_2, x_3 를 사용하여 상태방정식을 구하라. 1[V] 전압원과 32[A] 전류원을 사용할 때 평형점을 구하고, 이 평형 점 부근에서 선형화하여 선형 방정식을 구하라.



(a)



(b)

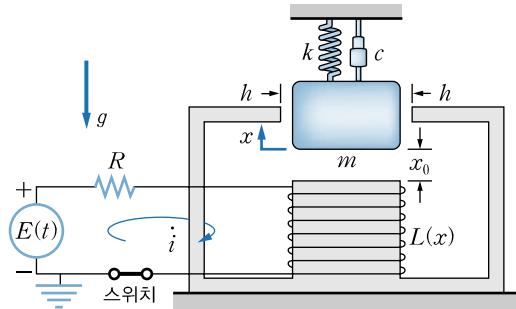
3.28 [심화] 다음 그림과 같은 시스템을 생각해보자. 코일에 전류가 흐르지 않으면, 질량이 m 인 물체는 x_0 의 위치에 멈추어 있다. x 는 x_0 를 기준으로 본 물체의 위치를 말한다. 댐핑은 선형적으로 속도에 비례한다고 하자(즉 $c\dot{x}$). 또 전자식 인덕터의 인덕턴스는 다음과 같다.

$$L(x) = \frac{L_0}{1 + \frac{x_0 + x}{h}}$$

이때 물체의 위치 x 와 전류 i 에 대한 동역학 모델식이 다음과 같음을 보여라.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \frac{L_0 i^2}{2h \left(1 + \frac{x_0 + x}{h}\right)^2} &= 0 \\ \frac{L_0}{1 + \frac{x_0 + x}{h}} \dot{i} + Ri - \frac{L_0}{h \left(1 + \frac{x_0 + x}{h}\right)^2} \dot{x}i &= E(t) \end{aligned}$$

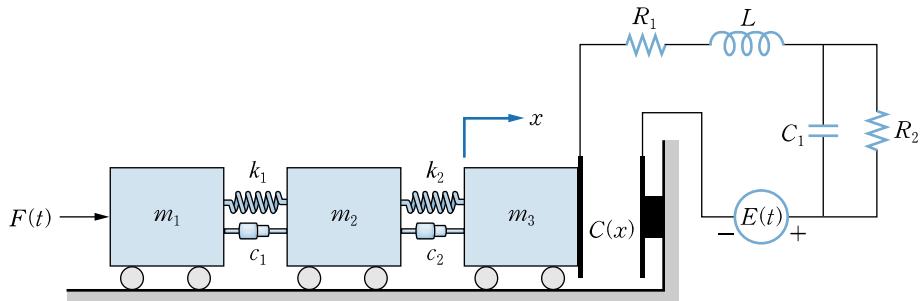
또한 $E(t) = E_0 = \sqrt{\frac{kx_0h}{L_0}} \left(1 + \frac{x_0}{2h}\right) R$ 로 주어질 때, 평형점을 구하고 평형점 부근에서 선형화하여 선형 방정식을 구하라.



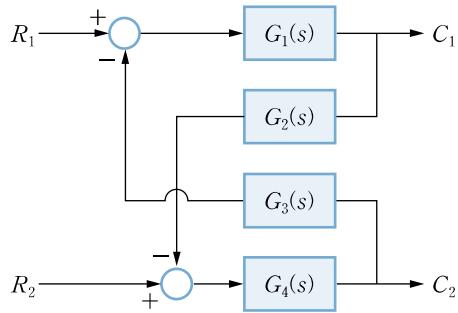
- 3.29** **실험** 다음 그림과 같은 시스템을 생각해보자. 판이 움직일 수 있는 커패시터의 전기용량은 다음과 같이 주어진다.

$$C(x) = \frac{C_0}{d_0 - x}$$

외부의 힘 $F(t)$ 와 전압 $E(t)$ 에 대한 동역학 모델식을 유도하라.



- 3.30** **실험** 다음 그림과 같이 두 개의 입력과 두 개의 출력이 있는 시스템은 총 4개의 전달함수, 즉 $G_{11}(s), G_{12}(s), G_{21}(s), G_{22}(s)$ 를 가질 수 있다. 여기서 $G_{ij}(s)$ 는 입력 R_i 에서 출력 C_j 로의 전달함수를 의미한다. 예를 들면 $G_{12}(s)$ 는 입력 R_1 에서 출력 C_2 로의 전달함수인데, 이때 입력 R_2 는 0으로 생각한다. 4개의 전달함수를 각각 구하라.

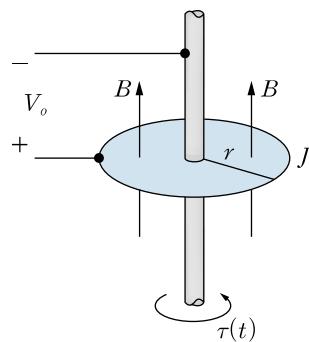


3.31 [실험] [예제 3-2]에서 전기 시스템과 기계 시스템이 결합된 시스템을 모델링할 때, 전기 에너지로부터 기계적인 물리량인 힘을 유도하는 과정을 다루었다. 전압(e)이 일정한 시스템에서 내부의 전기 에너지가 변위 x 와 함께 $W_e(x, e)$ 로 표현될 때, 자연적으로 발생하는 힘 f 가 다음과 같음을 일과 에너지 원리로 설명하라.

$$f = \frac{\partial W_e(x, e)}{\partial x}$$

또한 [예제 3-2]에서 구한 힘과 부호가 반대인 이유는 무엇인지 설명하라.

3.32 [실험] 다음 그림과 같이 자속밀도 B 가 회전축에 평행하게 존재하고, 회전축이 토크 τ 로 회전할 때 유기되는 전압을 V_o 라고 할 때, 토크 τ 에서 유기 전압 V_o 로의 전달함수를 구하라. 원판의 관성 모멘트는 J , 반지름은 r 이고 회전축의 비틀림은 없다고 가정하자.



3.33 [실험] 다음과 같은 파라미터로 구성된 전송 선로를 생각해보자.

R : 단위 길이당 저항

L : 단위 길이당 유도용량

G : 단위 길이당 정전용량

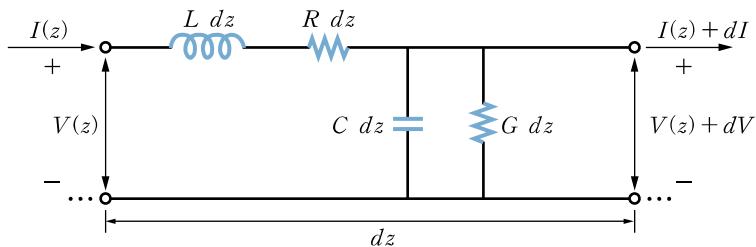
C : 단위 길이당 전기용량

이 전송 선로의 미소 길이 dz 구간에 대한 모델링은 다음 그림과 같이 할 수 있다. 키르히호프의 법칙을 사용하여 양단의 전압과 전류 사이의 방정식을 유도하고, $\Delta z \rightarrow 0$ 으로 극한을 취함으로써 관련 미분방정식을 구하라. 그리고 각 구간에 대해서 전압과 전류가 다음과 같이 표현된다고 할 때,

$$v(z, t) = \operatorname{Re} [V(z)e^{j\omega t}]$$

$$i(z, t) = \operatorname{Re} [I(z)e^{j\omega t}]$$

$V(z)$ 와 $I(z)$ 에 관한 미분방정식을 구하고, $V(z)$ 와 $I(z)$ 를 상태로 하는 상태방정식을 구하라. 상태방정식을 세울 때는 시간 변수 대신에 공간 변수 z 를 사용하라. 이 상태방정식으로부터 $V(z)$ 와 $I(z)$ 를 구하고, 감쇠 또는 진동 현상을 확인하라.



3.34 [실험] 본문에서 확산방정식에 대한 전달함수를 구하였다. 이 전달함수에 라플라스 역변환을 하여

임펄스 응답함수를 구하라.

힌트 $\frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s}}$ 식을 이용하면 편리하다.

3.35 [실험] 에너지 기반의 라그랑주 역학(부록 A.3 참고)을 사용하여, 회전형 진자 시스템과 이단 진자 시스템의 모델을 유도하라.