Chapter

05

$\mathbb{R}^n$의 벡터

Vectors on $\mathbb{R}^n$

학습목표

- 좌표평면과 좌표공간에서 벡터를 도입하고 그들의 중요한 성질을 이해할 수 있다.
- 벡터의 내적을 이해하고, 내적을 활용하여 문제를 해결하는 과정을 배울 수 있다.
- 벡터의 외적, 내적과 외적과의 관계를 이해하고, 외적을 활용하여 문제를 해결하는 과정을 배울 수 있다.
- n차원 공간에 대해 이해하고, 앞서 다룬 내용을 바탕으로 벡터 공간을 확장할 수 있다.
- 벡터를 이용하여 좌표공간에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식을 구하고, 이와 관련된 거리문제를 풀 수 있다.

5장 미리보기

이 장에서는 우리가 보통 알고 있는 좌표평면과 좌표공간에서 정의되는 벡터, 그리고 이를 더욱 확장한 n차원 공간에 대하여 알아볼 것이다. 특히 벡터의 내적과 외적은 많은 분야에서 활용되고 있는 중요한 내용이다. 이 장에서 다루는 모든 내용은 지금까지 알아왔던 실수에서 정의되기 때문에 이해하기 쉬울 뿐만 아니라, 일반적인 벡터로 자연스럽게 확장되기 때문에 6장의 내용을 이해하는 데 도움이 된다. 또한 7장에서 다룰 선형변환을 공부하는 데에도 도움이 될 것이다.

5.1 벡터의 정의

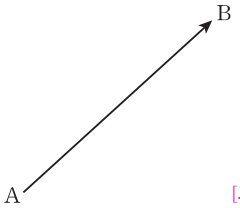
이 절에서는 좌표평면 $\mathbb{R}^2$과 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서의 벡터에 대해 알아보자. 이런 벡터는 나중에 일반적인 실수의 n차원 공간인 $\mathbb{R}^n$으로 자연스럽게 확장될 것이다. 따라서 평면과 공간에서의 벡터를 잘 이해해 두면 나중에 나오는 n차원 공간에서의 벡터 해석을 훨씬 쉽게 이해할 수 있다.

5.1.1 벡터란?

이제 평면과 공간에서의 벡터를 정의해 보자. 우리가 일상적으로 사용하는 물리적인 양 중에는 길이, 넓이, 질량, 온도와 같이 그 양의 크기만 주어지면 완전히 표시되는 **스칼라**scalar와 힘이나 속도와 같이 크기뿐만 아니라 방향까지 지정해야 표현할 수 있는 **벡터**vector가 있다.

벡터는 2차원 평면 또는 3차원 공간에서 화살표를 사용하여 나타낼 수 있다. 이때 벡터의 방향은 화살표에서 화살로 나타내고, 벡터의 크기는 화살표의 길이로 나타낸다. 다음 그림과 같이 벡터를 화살표로 나타내려면 벡터가 시작하는 지점 A에서 벡터가 끝나는 지점 B까지 선분으로 잇고, 벡터의 방향인 A에서 B쪽으로 화살을 표시한다. 이 경우 화살표의 출발점을 벡터의 **시작점**initial point이라 하고, 화살표가 끝나는 점을 벡터의 **끝점**terminal point이라고 한다.[1]

1 시작점을 시점, 끝점을 종점이라고도 한다.



[그림 5-1] 벡터

벡터는 보통 $\mathbf{a}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\cdots$와 같이 굵은 소문자로 나타내고, 스칼라는 벡터와 구분되도록 $a, b, c, d, \cdots$ 와 같은 소문자로 나타낸다. 앞으로 특별한 언급이 없는 한 모든 스칼라는 실수로 생각한다.

특별히 시작점 A와 끝점 B가 주어진 경우, 벡터는

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

와 같이 시작점과 끝점을 차례로 쓰고 문자 위에 화살표를 그려서 나타낸다.[2]

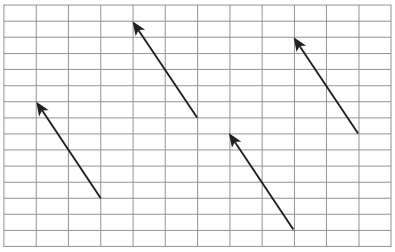
2 벡터 $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 벡터 $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 크기는 같지만 방향은 반대이다. 따라서 두 벡터는 같은 벡터가 아니다.

벡터는 크기와 방향에 의해서만 정의되므로 방향과 크기가 각각 같은 벡터는 시작점에 관계없이 모두 같은 벡터로 생각한다. 즉 한 벡터를 평행이동하여 얻은 벡터는 모두 같은 것으로 여기며, 두 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 같을 때 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \tag{5.1}$$

3 실수 전체의 집합은 $\mathbb{R}$로 나타내고, 두 실수의 모든 순서쌍 (x, y)의 집합을 $\mathbb{R}^2$으로 나타낸다.

예를 들어 [그림 5-2]와 같이 평면 $\mathbb{R}^2$[3]위에 주어진 네 벡터는 방향과 크기가 같기 때문에 모두 같은 벡터이다.

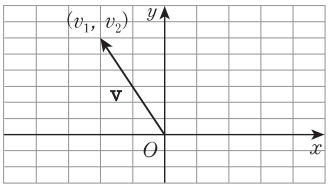


[그림 5-2] 크기와 방향이 같은 벡터

그런데 [그림 5-2]와 같이 방향과 크기가 같게 주어진 네 벡터가 실제로 같은 벡터인지 아닌지는 그림만 봐서는 판단하기 어렵다. 벡터를 좀 더 정확하게 표현하기 위해 직교좌표계 위에 벡터를 표현해 볼 것이다.

4 좌표평면(coordinate palne)을 xy평면이라고도 한다.

예를 들어 [그림 5-3]과 같이 좌표평면[4] $\mathbb{R}^2$에서 시작점이 원점이고 끝점의 좌표가 (v_1, v_2)인 벡터 $\mathbf{v}$가 있다고 하자.



[그림 5-3] 좌표평면 위의 벡터

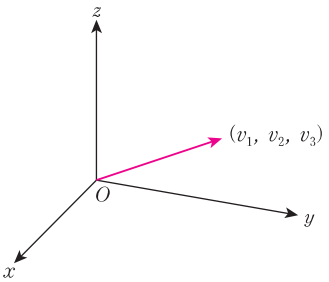
이때 이 벡터의 끝점의 좌표 (v_1, v_2)에서 v_1과 v_2를 $\mathbf{v}$의 **성분**components이라 하고, 벡터 $\mathbf{v}$를 다음과 같이 나타낸다.[5]

5 점은 $A(x, y)$, 벡터는 $\mathbf{v} = (x, y)$와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \tag{5.2}$$

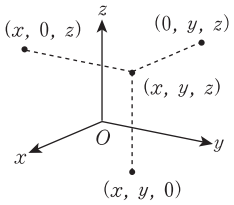
평면에서와 마찬가지로 공간에서도 벡터를 생각할 수 있다. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 한 점을 나타낼 때는 순서쌍 (x, y)로 나타내듯이 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 한 점을 나타낼 때도 세 수의 순서쌍 (x, y, z)로 나타낸다. [그림 5-4]와 같

이 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 시작점이 원점이고 끝점의 좌표가 (v_1, v_2, v_3)인 벡터 $\mathbf{v}$가 있다고 하자.[6]



[그림 5-4] 좌표공간 위의 벡터

6 좌표공간에서 $z=0$인 평면을 xy평면, $y=0$인 평면을 xz평면, $x=0$인 평면을 yz평면이라고 한다.



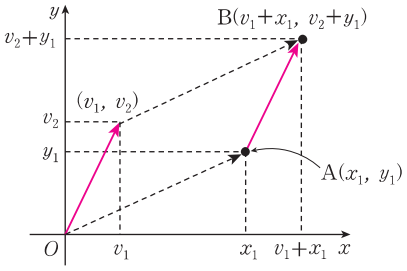
그러면 좌표평면에서와 마찬가지로 (v_1, v_2, v_3)에서 v_1, v_2, v_3를 벡터 $\mathbf{v}$의 성분이라고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \tag{5.3}$$

종종 평면이나 공간에서 시작점이 원점이 아닌 벡터를 다룰 때가 있다. 예를 들어 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 벡터 $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$의 시작점이 원점에서 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$로 바뀐 경우를 생각해 보자. 시작점이 원점 $(0, 0)$에서 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$로 바뀌었다는 것은 이 벡터의 첫 번째 성분 v_1이 오른쪽 또는 왼쪽으로 x_1의 절댓값만큼 움직였다는 것이고, 두 번째 성분 v_2가 위 또는 아래로 y_1의 절댓값만큼 움직였다는 것을 뜻한다.[7] 즉 벡터 $\mathbf{v}$의 시작점이 원점 $(0, 0)$에서 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$로 움직였으므로, 끝점을 B라 하면 B는 다음과 같다.

7 좌표평면과 좌표공간에서 (x, y)와 (x, y, z)는 각각 한 점을 나타내기도 하고 벡터를 나타내기도 한다. 따라서 벡터인지 좌표인지는 주어진 상황에 맞게 해석해야 한다.

$$\mathrm{B}(v_1 + x_1,\ v_2 + y_1) = \mathrm{B}(x_2,\ y_2)$$



[그림 5-5] 평행이동한 벡터

마찬가지로 공간좌표 $\mathbb{R}^3$에서 벡터 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$의 시작점이 원점에서 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$으로 바뀐 경우, 이 벡터의 끝점은 다음과 같다.

$$\mathrm{B}(v_1 + x_1,\ v_2 + y_1,\ v_3 + z_1) = \mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

바꿔 말하면, 좌표평면 위에 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$가 주어졌을 때 점 A를 시작점으로 하고, 점 B를 끝점으로 하는 벡터는 다음과 같다는 것이다.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$ [8]

8 $x_1 + v_1 = x_2$, $y_1 + v_2 = y_2$ 이므로 $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_2 - y_1$이다.

마찬가지로 좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$가 주어졌을 때 점 A를 시작점으로 하고, 점 B를 끝점으로 하는 벡터는 다음과 같다는 것이다.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

예제 5-1

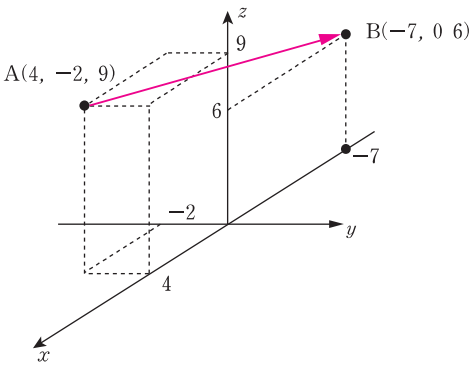
좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 점 $A(4, -2, 9)$를 시작점으로 하고, 점 $B(-7, 0, 6)$을 끝점으로 하는 벡터를 구하고, 좌표공간에 나타내라.

풀이

주어진 두 점 $A(4, -2, 9)$, $B(-7, 0, 6)$에 대해, 점 A를 시작점으로 하고 점 B를 끝점으로 하는 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-7-4,\ 0-(-2),\ 6-9)\\ &= (-11,\ 2,\ -3)\end{aligned}$$

이 벡터는 [그림 5-6]과 같이 나타낼 수 있다.



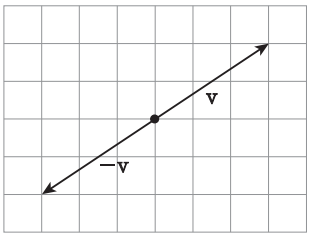
[그림 5-6]

5.1.2 벡터의 연산

이제 벡터의 연산에 대해 알아보자. 그 전에 먼저 벡터의 연산에서 매우 중요한 두 벡터에 대해 알아보자.

크기가 0인 벡터를 **영벡터**zero vector라 하고, **0**으로 표시한다.[9] 또 **v**가 **0** 아닌 벡터일 때, [그림 5-7]과 같이 **v**와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 **v**의 **음벡터**negative vector라 하고, $-\mathbf{v}$로 나타낸다.

9 영벡터는 크기가 0이므로 방향을 정하기가 쉽지 않다. 따라서 영벡터의 방향은 주어진 문제에 따라 어느 방향이든 가능한 것으로 한다.



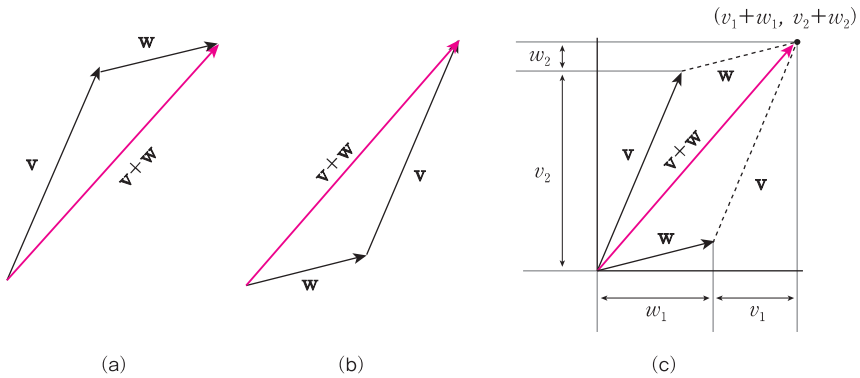
[그림 5-7] 음벡터

벡터의 연산에서 두 벡터의 합은 다음과 같이 정의한다.

■ 벡터의 합

임의의 두 벡터 **v**, **w**의 **합**sum은 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$로 나타낸다. 이때 **w**의 시작점은 **v**의 끝점과 일치시킨다. 그러면 두 벡터를 더한 벡터 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$의 시작점은 **v**의 시작점이고, 끝점은 **w**의 끝점이 된다.

[그림 5-8]은 좌표평면에서 두 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2)$, $\mathbf{w}=(w_1,\ w_2)$ 의 합을 세 가지 방법으로 나타낸 것이다.



[그림 5-8] 벡터의 합

[그림 5-8(a)]는 두 벡터의 합과 정확하게 일치하는 것으로, 먼저 벡터 $\mathbf{v}$를 그린 후 $\mathbf{v}$의 끝점을 시작점으로 하여 벡터 $\mathbf{w}$를 그린다. 그리고 $\mathbf{v}$의 시작점에서 $\mathbf{w}$의 끝점으로 화살표를 그린 결과가 두 벡터의 합 벡터이다.

[그림 5-8(b)]는 $\mathbf{w}+\mathbf{v}$이다. 그런데 그 결과 벡터가 (a)에서 구한 벡터와 정확하게 일치한다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v} \tag{5.4}$$

[그림 5-8(c)]는 두 벡터의 합을 좌표평면 위에서 그린 것이다. 이것으로부터 두 벡터의 합은 두 벡터의 성분의 각각의 합과 같음을 알 수 있다. 즉 다음이 성립한다.

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1+w_1,\ v_2+w_2) \tag{5.5}$$

마찬가지로 좌표 공간에서 두 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1,\ w_2,\ w_3)$의 합은 다음과 같다.

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3) \tag{5.6}$$

이것으로부터 한 벡터와 음벡터의 합을 다음과 같이 정의할 수 있다.

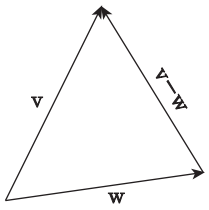
■ 벡터의 차

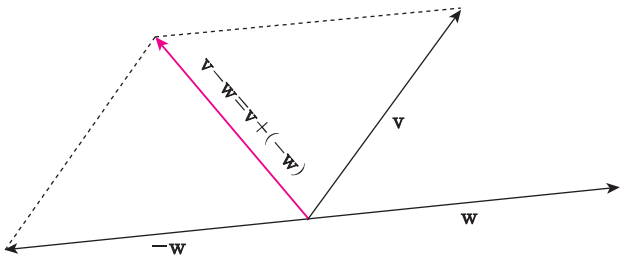
두 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 대해 $\mathbf{v}$에서 $\mathbf{w}$를 뺀 **차**difference는 $\mathbf{v}-\mathbf{w}$로 나타낸다. 즉 다음이 성립한다.

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w}) \tag{5.7}$$

두 벡터의 차는 [그림 5-9]와 같이 그림으로 나타낼 수 있다.[10]

10 두 벡터의 차 벡터 $\mathbf{v}-\mathbf{w}$를 옮겨 시작점은 $\mathbf{w}$의 끝점에, 끝점은 $\mathbf{v}$의 끝점에 맞추면 다음 그림과 같이 간단히 그릴 수 있다.





[그림 5-9] 벡터의 차

두 벡터의 합과 마찬가지로 두 벡터의 차를 평면과 공간에서 벡터의 성분으로 나타내면 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=(v_1-w_1,\ v_2-w_2) \tag{5.8}$$

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=(v_1-w_1,\ v_2-w_2,\ v_3-w_3) \tag{5.9}$$

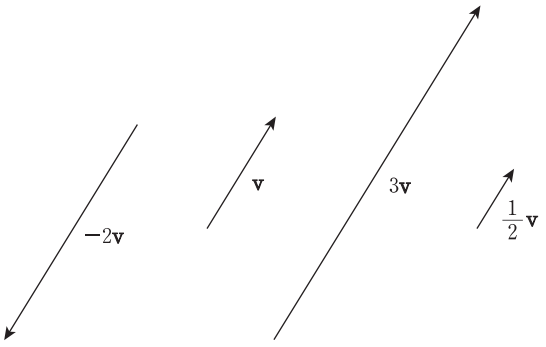
이제 벡터의 스칼라 배에 대해 알아보자.

■ 벡터의 스칼라 배

스칼라 c에 대해 $c\mathbf{v}$를 c에 의한 $\mathbf{v}$의 **스칼라 배**scalar multiplication라고 한다. 이때 $c\mathbf{v}$는 c에 따라 다음과 같이 된다.

❶ $c>0$이면 $\mathbf{v}$와 방향이 같으며 크기는 c배하여 얻는 벡터이다.
❷ $c<0$ 이면 $\mathbf{v}$와 방향이 반대이면서 크기는 $|c|$배하여 얻은 벡터이다.
❸ $c=0$이면 크기가 0인 벡터이다.

예를 들어 [그림 5-10]은 벡터 $\mathbf{v}$의 스칼라 배를 나타낸 것이다.



[그림 5-10] 벡터의 스칼라 배

[그림 5-10]으로부터 벡터 $\mathbf{v}$에 영이 아닌 스칼라 배한 벡터는 모두 $\mathbf{v}$에 평행함을 알 수 있다. 바꿔 말하면 두 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 평행한 벡터라면 $\mathbf{v}=c\mathbf{w}$를 만족하는 0이 아닌 스칼라 c가 존재한다는 것을 알 수 있다.

좌표평면과 좌표공간에서의 스칼라 배는 다음과 같이 각 성분에 실수 배한 결과이다.

$$c\mathbf{v}=(cv_1,\ cv_2)\ \text{또는}\ c\mathbf{v}=(cv_1,\ cv_2,\ cv_3)$$

이 사실로부터 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2)$의 음벡터 $-\mathbf{v}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\mathbf{v}=(-v_1,\ -v_2) \tag{5.10}$$

좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$의 음벡터 $-\mathbf{v}$도 마찬가지로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\mathbf{v} = (-v_1,\ -v_2,\ -v_3) \tag{5.11}$$

지금까지 살펴본 벡터의 연산에 대해 다음 정리가 성립한다. 이 정리를 증명하는 것은 어렵지 않으므로 연습문제로 남긴다.

정리 5-1 벡터 연산의 성질

스칼라 c, k와 좌표평면 $\mathbb{R}^2$이나 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 세 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(2) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}$

(4) $\mathbf{u}-\mathbf{u}=\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(5) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(6) $(ck)\mathbf{u}=c(k\mathbf{u})=k(c\mathbf{u})$

(7) $(c+k)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+k\mathbf{u}$

(8) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

예제 5-2

주어진 여섯 개의 벡터에 대해 각각의 문제를 풀어라. 또한 (1)~(3)의 결과를 좌표공간에 나타내라.

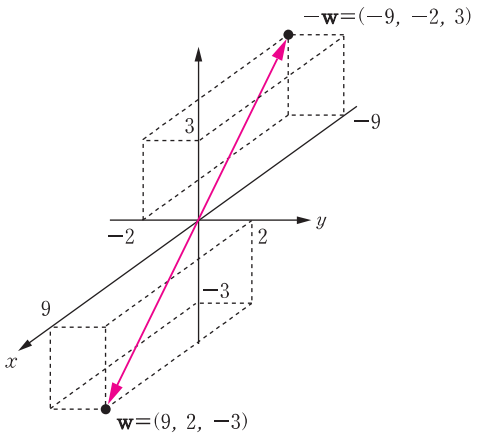
$$\mathbf{a}=(4,\ -6),\ \mathbf{b}=(-3,\ -7),\ \mathbf{c}=(-1,\ 5)$$
$$\mathbf{u}=(1,\ -2,\ 6),\ \mathbf{v}=(0,\ 4,\ -1),\ \mathbf{w}=(9,\ 2,\ -3)$$

(1) $-\mathbf{w}$ (2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (3) $\mathbf{a}-\mathbf{c}$

(4) $\mathbf{a}-3\mathbf{b}+10\mathbf{c}$ (4) $4\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}$

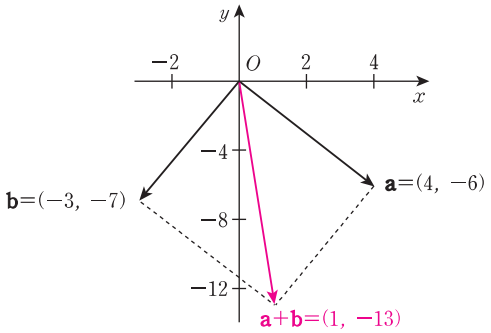
풀이

(1) $\mathbf{w}=(9,\ 2,\ -3)$이므로 $-\mathbf{w}=(-9,-2,\ 3)$이고, [그림 5-11]과 같이 나타낼 수 있다.



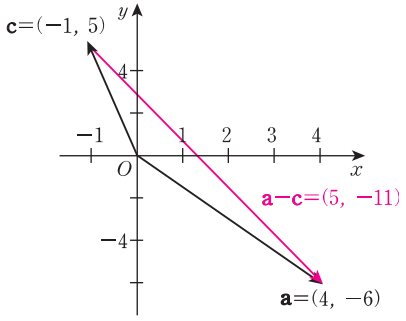
[그림 5-11]

(2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(4+(-3),\ (-6)+(-7))=(1,-13)$이고, [그림 5-12]와 같이 나타낼 수 있다.



[그림 5-12]

(3) $\mathbf{a}-\mathbf{c}=(4-(-1),\ (-6)-5)=(5,-11)$이고, [그림 5-13]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 5-13]

(4) $\mathbf{a}-3\boldsymbol{b}+10\boldsymbol{c}=(4,-6)-(-9,-21)+(-10,\ 50)=(3,\ 65)$

(5) $4\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}=(4,\ -8,\ 24)+(0,\ 4,\ -1)-(18,\ 4,\ -6)$

$=(-14,-8,\ 29)$

5.1.3 벡터의 크기

이 절에서 마지막으로 알아볼 것은 평면이나 공간에서 주어진 벡터의 크기[11]를 구하는 것이다.

11 벡터를 화살표로 나타낼 때, 화살표의 길이가 그 벡터의 크기이다.

벡터 $\mathbf{v}$의 크기를 **노름**norm이라 하고, $\|\mathbf{v}\|$로 나타낸다. 특히 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2)$이면

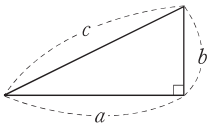
$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2} \tag{5.12}$$

이고, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$이면

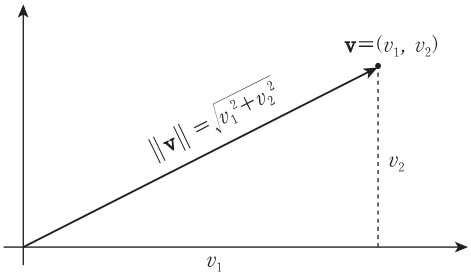
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{5.13}$$

이다.

12 피타고라스 정리 : 직각삼각형의 각 변의 길이 사이에 $a^2 + b^2 = c^2$이 성립한다.



좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$의 노름은 피타고라스 정리[12]를 이용하여 쉽게 얻을 수 있다.



[그림 5-14] 평면벡터의 크기

마찬가지로 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터의 노름도 피타고라스 정리를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

■ 벡터의 노름

정리 5-2

좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$에 적당한 스칼라 c를 곱한 벡터 $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, cv_3)$의 노름은 $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$이다.

특히 $\|\mathbf{u}\| = 1$과 같이 노름이 1인 벡터를 **단위벡터**unit vector라고 한다.

증명

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$에 적당한 스칼라 c를 배수한 벡터 $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, cv_3)$의 노름은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{v}\| &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2 + (cv_3)^2} \\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} \\ &= |c|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ &= |c|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

즉 다음이 성립한다.

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\| \tag{5.14}$$ ■

예제 5-3

다음 벡터의 노름을 구하고 단위벡터인 것을 찾아라.

(1) $\mathbf{v}=(1,-\sqrt{3})$과 $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ (2) $\mathbf{w}=(0,-2,4)$ (3) $\mathbf{j}=(0,1,0)$

풀이

(1) $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$이고,

$$\left\|-\frac{1}{2}\mathbf{v}\right\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1\text{이다.}$$ [13]

따라서 $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$는 단위벡터이다.

(2) $\|\mathbf{w}\|=\sqrt{0^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{0+4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(3) $\|\mathbf{j}\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$이므로 $\mathbf{j}$는 단위벡터이다.

13 $\left\|-\frac{1}{2}\mathbf{v}\right\|=\left|-\frac{1}{2}\right|\|\mathbf{v}\|$이고, $\|\mathbf{v}\|=2$이므로 $\left\|-\frac{1}{2}\mathbf{v}\right\|=\left|-\frac{1}{2}\right|\|\mathbf{v}\|=\frac{1}{2}\cdot 2=1$이다.

이제 노름이 0인 벡터에 대해 알아보자.

정리 5-3 영벡터의 노름

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{v}$에 대해 $\|\mathbf{v}\|\geq 0$이다. 특히 $\|\mathbf{v}\|=0$일 필요충분조건은 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$이다.

증명

벡터의 노름은 벡터의 각 성분의 제곱의 합으로 구한다. 그리고 실수의 제곱은 0보다 크거나 같기 때문에 벡터 $\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$\|\mathbf{v}\|\geq 0$$

이제 정리에서 주어진 필요충분조건을 좌표평면의 경우에 대해서만 보이자.[14] 하지만 공간의 경우도 평면의 경우와 마찬가지로 증명할 수 있다.

14 필요충분조건 $p\Leftrightarrow q$를 증명할 때에는 $p\Rightarrow q$와 $q\Rightarrow p$를 모두 보여야 한다.

먼저 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$의 노름이 $\|\mathbf{v}\|=0$이라 가정하자. 그러면 다음과 같다.

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=0 \quad\Rightarrow\quad v_1^2+v_2^2=0$$

그런데 실수를 제곱하면 항상 0보다 크거나 같기 때문에 두 수 v_1, v_2는 0일 수밖에 없다. 즉 다음과 같다.

$$v_1 = 0,\ v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (v_1,\ v_2) = (0,\ 0) = \mathbf{0}$$

따라서 $\|\mathbf{v}\| = 0$이면 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이다.[15]

15 노름이 0인 벡터는 영벡터뿐이다.

역으로 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이라 하자. 그러면 $\mathbf{v} = (0,\ 0)$ 이므로 다음과 같다.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

따라서 $\|\mathbf{v}\| = 0$일 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이다. ■

정리 5-4 단위벡터

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$에 대해 $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ 라 하면 $\mathbf{u}$는 단위벡터이다.

증명

영 아닌 벡터 $\mathbf{v}$에 대해 $\|\mathbf{v}\|$는 노름이므로 [정리 5-2]에 의해 $\|\mathbf{v}\| > 0$이다. 이제 $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$의 노름 $\|\mathbf{u}\| = \left\| \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\|$를 구해 보자.[16]

16 $\|\mathbf{v}\| > 0$이면 $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}$은 0보다 큰 실수이다. 즉 스칼라이다. 따라서 $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$는 벡터 $\mathbf{v}$에 스칼라 $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}$을 배수한 벡터이다.

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right\| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

따라서 $\mathbf{u}$는 단위벡터이다. ■

[정리 5-4]로부터 영 아닌 벡터로부터 항상 단위벡터를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 즉 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$에 대해 벡터 $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{v}$와 방향이 같고 크기가 1인 단위벡터이다.[17]

17 벡터 $\mathbf{v}$를 크기가 1인 벡터 $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$로 바꾸는 것을 정규화(normalization)라고 한다.

예제 5-4

벡터 $\mathbf{v} = (3, -1, -2)$에 대해 다음을 구하라.

(1) $\mathbf{v}$와 방향이 같은 단위벡터

(2) $\mathbf{v}$와 방향이 반대인 단위벡터

풀이

(1) $\mathbf{v}$와 방향이 같은 단위벡터는 $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ 이므로 먼저 $\mathbf{v}$의 노름을

구하고, 그 노름의 역수를 $\mathbf{v}$에 배수하면 된다. 따라서 $\mathbf{v}$와 방향이 같은 단위벡터는 다음과 같다.

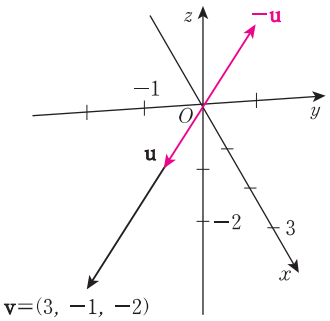
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

(2) $\mathbf{v}$와 방향이 반대인 단위벡터는 (1)에서 구한 $\mathbf{v}$와 방향이 같은 단위벡터에 -1을 배수하면 된다.

$$-\mathbf{u} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

벡터 $\mathbf{v}$와 단위벡터 $\mathbf{u}$와 $-\mathbf{u}$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



[그림 5-15]

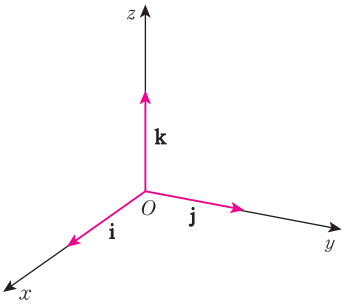
■ 표준단위벡터

이제 $\mathbb{R}^3$의 단위벡터 중에서 각 축과 방향이 같은 단위벡터에 대해 알아보자. 벡터의 시작점을 모두 원점으로 하면 세 벡터

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0),\ \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

는 각 축 위에 있고, 노름이 1인 단위벡터이다. 이 세 벡터를 $\mathbb{R}^3$의 **표준단위벡터**standard unit vector라고 한다.[18]

18 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$를 각각 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$로 나타내기도 한다.



[그림 5-16] 좌표공간의 표준단위벡터

이때 $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$에 대해

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1,\ x_2,\ x_3)\\ &= x_1(1,\ 0,\ 0)+x_2(0,\ 1,\ 0)+x_3(0,\ 0,\ 1)\\ &= x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있으므로, $\mathbb{R}^3$ 의 임의의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$는 단위 벡터 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$의 합으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 다음과 같다.

$$(2,\ -4,\ 3)=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k},\ (-3,\ 0,\ 1)=-3\mathbf{i}+\mathbf{k}$$

마찬가지로 $\mathbb{R}^2$에서의 표준단위벡터는 $\mathbf{i}=(1,\ 0)$, $\mathbf{j}=(0,\ 1)$이고, $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2)=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}$ 이다.

Section 5.1 연습문제

※ 다음 벡터를 좌표평면 $\mathbb{R}^2$와 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에 각각 그려라. [1~8]

1. $\mathbf{a}=(2,\ 3)$
2. $\mathbf{b}=(3,\ 2)$
3. $\mathbf{c}=(-2,\ 3)$
4. $\mathbf{d}=(-2,-3)$
5. $\mathbf{e}=(2,-1,\ 2)$
6. $\mathbf{f}=(-1,\ 2,-3)$
7. $\mathbf{g}=(0,-2,\ 3)$
8. $\mathbf{h}=(-2,-1,\ 3)$

※ 다음에 주어진 두 점 P, Q에 대해 벡터 $\overrightarrow{PQ}$를 구하라. [9~10]

9. $P(3,\ 4),\ Q(-1,\ 2)$
10. $P(3,\ 2,-1),\ Q(-2,-2,\ 1)$

※ 다음 물음에 답하라. [11~12]

11. 시작점이 $P(1,\ 1)$인 벡터 $\mathbf{v}=(1,\ 2)$의 끝점은 어디인가?
12. 끝점이 $Q(-1,-1,\ 2)$인 벡터 $\mathbf{w}=(1,\ 1,\ 3)$의 시작점은 어디인가?

※ 벡터 $\mathbf{u}=(2,\ 2,-1)$, $\mathbf{v}=(4,-2,\ 1)$, $\mathbf{w}=(0,-2,\ 4)$일 때, 다음 물음에 답하라. [13~15]

13. $2\mathbf{u}-3\mathbf{v}$
14. $(2\mathbf{u}-\mathbf{w})-(3\mathbf{v}-3\mathbf{u})$
15. $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{w}$를 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$를 구하라.

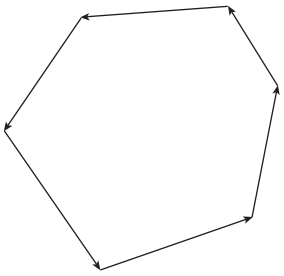
※ 다음 벡터의 노름을 구하고, 주어진 벡터와 같은 방향의 단위벡터를 구하라. [16~19]

16. $\mathbf{a}=(-2,\ 1)$
17. $\mathbf{b}=(\sqrt{2},\ 2)$
18. $\mathbf{c}=\left(\frac{1}{2},\ 1,-1\right)$
19. $\mathbf{d}=(1,\ 1,-1)$

20. [연습문제 16~19]에 주어진 벡터를 표준단위벡터의 합으로 나타내라.

21. 점 $P(x, y, z)$를 시작점으로 하고 점 $Q(a, b, c)$를 끝점으로 하는 벡터의 노름을 구하라.

22. [그림 5-17]에 주어진 벡터의 합을 구하라.



[그림 5-17]

23. [정리 5-1]의 (1)~(8)을 증명하라.

※ 다음에서 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$로 표시된 벡터는 3×1 행렬로, 3×1행렬로 표시된 벡터는 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$를 이용하여 나타내라. [**24**~**27**]

24. $\mathbf{x}=-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

25. $\mathbf{y}=2\mathbf{i}-3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$

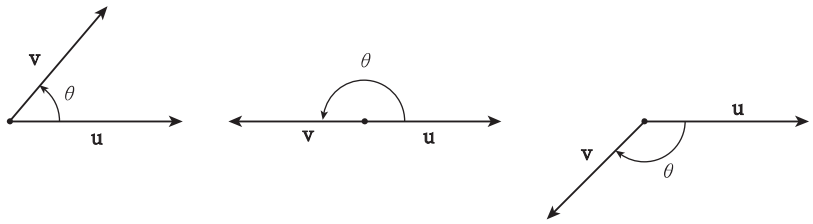
5.2 벡터의 내적

이 절에서는 내적이라고 하는 두 벡터의 새로운 연산에 대한 특별한 성질을 다룰 것이다.

5.2.1 벡터의 내적

두 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 $\mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$ 위에 있으며 시작점이 같은 벡터라고 하자. 그러면 [그림 5-18]과 같이 두 벡터의 사잇각 θ를 생각할 수 있다.[19]

19 두 벡터의 사잇각 범위는 $0 \le \theta \le \pi$일 때를 말한다.



[그림 5-18] 두 벡터 사이의 각

[그림 5-18]에서 알 수 있듯이 두 벡터 사이에는 항상 두 개의 각이 있다. 이 각을 이용하여 두 벡터의 새로운 연산인 내적을 정의할 수 있다.

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위에 영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 사이의 각을 θ라고 할 때, 두 벡터의 **내적**inner product을 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$로 나타내고 다음과 같이 정의한다.[20]

20 평면이나 공간에 있는 두 벡터는 적당히 평행이동하여 항상 시작점을 일치시킬 수 있다.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{5.15}$$

경우에 따라서 우리는 내적을 **스칼라 곱**scalar product, **유클리드 곱**Euclidean product 또는 **점 곱**dot product이라고도 한다.

예제 5-5

다음에 주어진 벡터의 내적을 구하라.

(1) 사잇각이 45°인 두 벡터 $\mathbf{u} = (0,\ 0,\ 3)$, $\mathbf{v} = (2,\ 0,\ 2)$

(2) 사잇각이 90°인 두 벡터 $\mathbf{u} = (0,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{v} = (-1,\ 1,\ 2)$

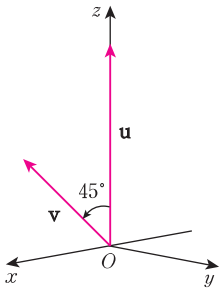
풀이

(1) 두 벡터 $\mathbf{u} = (0,\ 0,\ 3)$, $\mathbf{v} = (2,\ 0,\ 2)$의 노름은 각각 다음과 같다.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{0+0+9} = 3$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$$

따라서 두 벡터의 내적은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v} &= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \\ &= 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ \\ &= 6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$



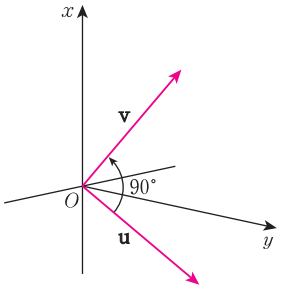
[그림 5-19]

(2) 두 벡터 $\mathbf{u}=(0,\ 2,-1)$, $\mathbf{v}=(-1,\ 1,\ 2)$의 노름은 각각 다음과 같다.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

따라서 두 벡터의 내적은 다음과 같다.

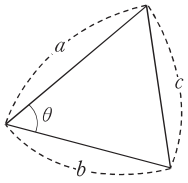
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v} &= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \\ &= \sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos 90^\circ \\ &= \sqrt{30}\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$



[그림 5-20]

정의에 의하면 주어진 두 벡터의 내적은 두 벡터의 노름과 사잇각을 알면 쉽게 구할 수 있다. 그런데 벡터가 성분으로 주어질 경우에는 두 벡터의 사잇각을 어떻게 구할 수 있을까? 사실 두 벡터의 사잇각을 구하기는 어렵다. 이런 문제를 해결하기 위해 사용하는 방법이 바로 코사인 제2법칙이다.[21] 이 방법을 사용하면 θ의 값을 몰라도 내적을 쉽게 구할 수 있다.

21 코사인 제2법칙 : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$



정리 5-5 벡터의 내적

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 벡터 $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$에 대해 두 벡터의 내적 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$는 다음과 같다.

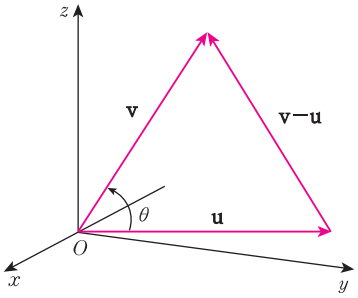
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{5.16}$$

또 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위에 두 벡터 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$에 대해 두 벡터의 내적 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{5.17}$$

증명

좌표평면에 대한 이 정리의 증명은 좌표공간에 대한 증명과 똑같다. 따라서 [그림 5-21]과 같이 좌표공간의 벡터 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$에 대해서만 증명한다.



[그림 5-21] 좌표공간의 벡터

[그림 5-21]과 같이 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$는 변의 길이가 각각 $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$인 삼각형을 이룬다. 따라서 삼각형에서 코사인 제2법칙에 의해 다음을 얻을 수 있다.

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\theta^{22}$$

22 $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

이 식은 내적의 정의에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

이 식을 내적에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2) \tag{5.18}$$

여기서 $\mathbf{v}-\mathbf{u}=(v_1-u_1,\ v_2-u_2,\ v_3-u_3)$이므로 $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2$을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 &= (v_1-v_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2\\ &= v_1^2-2v_1u_1+u_1^2+v_2^2-2v_2u_2+u_2^2+v_3^2-2v_3u_3+u_3^2\\ &= v_1^2+v_2^2+v_3^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2-2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)\end{aligned}$$

이 식에서 처음 세 개 항은 $\|\mathbf{v}\|^2$이고, 그 뒤의 세 개의 항은 $\|\mathbf{u}\|^2$이다. 이 결과를 식 (5.18)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}\|^2-(\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}\|^2-2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)))\\ &= v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3\end{aligned}$$

■

5.2.2 내적을 이용하여 두 벡터의 사잇각 구하기

내적의 정의와 [정리 5-5]로부터 두 벡터가 주어졌을 때, 두 벡터 사이의 코사인 값을 다음과 같이 구할 수 있다.[23]

23 두 벡터 사이의 코사인 값을 알면, 코사인의 역함수를 이용하여 두 벡터의 사잇각을 알 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \quad (0\le\theta\le\pi) \tag{5.19}$$

예제 5-6

다음에 주어진 두 벡터 사이의 코사인 값을 구하라.

(1) $\mathbf{a}=(9,-2)$, $\mathbf{b}=(4,\ 18)$

(2) $\mathbf{u}=(-1,\ 2,\ 2)$, $\mathbf{v}=(-1,\ 1,\ 0)$

풀이

(1) $\|\mathbf{a}\|=\sqrt{85}$, $\|\mathbf{b}\|=\sqrt{340}$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=9\cdot4+(-2)\cdot18=0$이므로, 코사인 값은 다음과 같다.

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{85}\,\sqrt{340}} = 0$$ [24]

24 $\cos\theta=0$이면 $0\le\theta\le\pi$이므로 $\theta=90^\circ$이다.

(2) $\|\mathbf{u}\|=3$, $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{2}$이고

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=(-1)\cdot(-1)+2\cdot1+2\cdot0=3$이므로, 코사인 값은

다음과 같다.

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ [25]

25 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이면 $0 \le \theta \le \pi$이므로 $\theta = 45^\circ$ 이다.

내적의 정의와 식 (5.19)로부터 알 수 있듯이 영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 사잇각 θ를 구할 수 있다. 두 벡터가 수직이면 사잇각은 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 이다. 이때 두 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 **직교한다**orthogonal고 한다. 또 $\theta = 0$ 이거나 $\theta = \pi$ 이면 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 **평행하다**parallel고 한다.[26] 따라서 두 벡터가 직교하는지 어떤지는 내적을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

26 두 벡터가 평행인 경우, 두 벡터는 방향이 같거나 ($\theta = 0$) 반대 방향 ($\theta = \pi$)이다.

정리 5-6 두 벡터의 직교

영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 직교할 필요충분조건은 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ 이다.

증명

먼저 두 벡터가 직교한다고 하면, 두 벡터의 사잇각이 90°이므로

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos 90^\circ = 0$$

이다. 따라서 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$이다.

역으로 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ 이라 하자. 그러면 $\|\mathbf{u}\| \ne 0$, $\|\mathbf{v}\| \ne 0$이므로[27]

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

이다. 따라서 두 벡터는 직교한다. ■

27 영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 노름은 0이 아니다.

두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 중 한 벡터가 영벡터($\mathbf{v} = \mathbf{0}$)일 때, 두 벡터의 내적을 구하면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$이므로 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$는 직교한다고 할 수 있다.[28] 따라서 영벡터는 모든 벡터와 직교한다고 할 수 있다. 특히 [정리 5-5]로부터 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 이면

28 영벡터는 모든 벡터와 직교하는 동시에 모든 벡터와 평행이기도 하다.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

이므로, 다음이 성립한다.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \tag{5.20}$$

다음은 내적에 관한 몇 가지 성질이다.

정리 5-7 내적의 성질

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 벡터 $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2)$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 두 벡터 $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$와 스칼라 k에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{0}$

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

(4) $(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

증명

위 정리는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 두 벡터 $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$에 대한 증명만으로도 충분하다. 여기서는 (1), (2), (4)만 증명하고, (3)의 증명은 연습문제로 남긴다.

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=u_1^2+u_2^2+u_3^2=\|\mathbf{u}\|^2\geq 0$이므로 다음과 같다.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{u}=\mathbf{0}$$

(2) $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}&=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\\&=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3\\&=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

29 두 실수 a, b의 곱에 대해 교환법칙 $ab=ba$가 성립한다.

(4) 실수의 성질로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}&=(ku_1)v_1+(ku_2)v_2+(ku_3)v_3\\\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})&=u_1(kv_1)+u_2(kv_2)+u_3(kv_3)\\k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})&=k((u_1v_1)+(u_2v_2)+(u_3v_3))\end{aligned}$$

따라서 다음과 같다.

$$(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

■

예제 5-7

세 벡터 $\mathbf{u}=(5,-2)$, $\mathbf{v}=(0,\ 7)$, $\mathbf{w}=(4,\ 10)$에 대해 다음을 구하라.

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$와 $\|\mathbf{u}\|^2$ (2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ (3) $(-2\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$와 $\mathbf{u}\cdot(-2\mathbf{v})$

풀이

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=(5)(5)+(-2)(-2)=25+4=29$

$\|\mathbf{u}\|^2=5^2+(-2)^2=29$

따라서 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2$ 임을 알 수 있다.

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=(5)(4)+(-2)(10)=0$

따라서 두 벡터는 직교함을 알 수 있다.

(3) $-2\mathbf{u}=(-10,\ 4)$, $-2\mathbf{v}=(0,-14)$

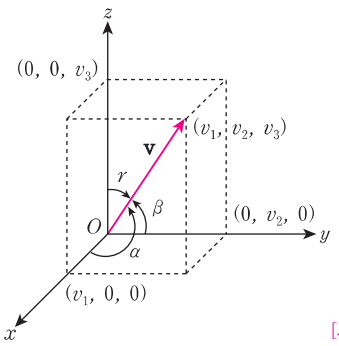
$(-2\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=(-10)(0)+(4)(7)=28$

$\mathbf{u}\cdot(-2\mathbf{v})=(5)(0)+(-2)(-14)=28$

따라서 $(-2\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(-2\mathbf{v})$ 임을 알 수 있다.

5.2.3 벡터의 방향코사인

이제 벡터가 좌표평면이나 좌표공간의 각 축과 이루는 각에 대해 알아보자. [그림 5-22]에서 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$와 x축, y축, z축의 사잇각을 차례로 α, β, γ라 하자. 이때 각 α, β, γ를 벡터 $\mathbf{v}$의 **방향각**direction angles이라고 한다.



[그림 5-22] 벡터의 방향각

[그림 5-22]에서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|},\ \cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|},\ \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \tag{5.21}$$

이를 벡터 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$의 **방향코사인**direction cosines이라고 한다.[30]

한편, $\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{5.22}$$

그런데 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 0과 π 사이의 각이고 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$이므로, 벡터 $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$는 단위벡터이다.

30 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $\|\mathbf{v}\| \neq 1$일 때, $v_1,\ v_2,\ v_3$를 $\mathbf{v}$의 방향수(direction numbers)라고 한다. 특히 평면에서는 직선의 기울기를 하나의 식 $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})}$으로 구할 수 있지만, 공간에서는 직선의 기울기를 하나의 식으로 표현할 수 없으므로 방향코사인을 이용한다.

예제 5-8

벡터 $\mathbf{v}=(1,-2,\ 3)$의 방향코사인 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$를 구하라.

풀이

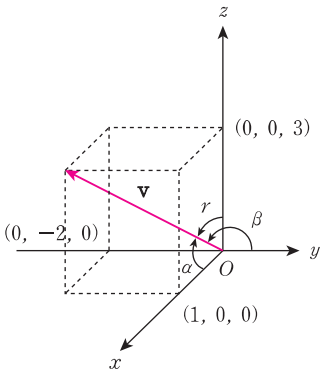
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$

이므로 다음과 같다.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



[그림 5-23]

Section 5.2 연습문제

※ 다음에 주어진 벡터들의 내적을 구하라. [1~4]

1. $\mathbf{u}=(2,\ 0)$, $\mathbf{v}=(-2,\ 1)$

2. $\mathbf{x}=(2,\ 0,-1)$, $\mathbf{y}=(3,-1,\ 2)$

3. $\mathbf{a}=(2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(1,-2)$

4. $\mathbf{p}=(\sqrt{2},-1,\ 3)$, $\mathbf{q}=(\sqrt{2},\ 2,\ 0)$

※ 다음에 주어진 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$의 사잇각을 θ라 할 때, $\cos\theta$를 구하라. [5~8]

5. $\mathbf{x}=(-1,\ 2)$, $\mathbf{y}=(0,\ 3)$

6. $\mathbf{x}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $\mathbf{y}=(0,\ 2)$

7. $\mathbf{x}=(2,-3,\ 1)$, $\mathbf{y}=(1,\ 0,\ 0)$

8. $\mathbf{x}=(-4,-2,\ 3)$, $\mathbf{y}=(6,-2,-1)$

※ 두 벡터 $\mathbf{u}=(2,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{v}=(1,\ 1,-2)$에 대해 다음을 구하라. [9~12]

9. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$와 $\|\mathbf{u}\|^2$

10. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$와 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

11. $(3\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$와 $\mathbf{u}\cdot 3(\mathbf{v})$

12. $3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

※ 다음에 주어진 벡터에 대해 물음에 답하라. [13~14]

$$\mathbf{x}_1=(1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{x}_2=(0,\ 1,\ 2),\ \mathbf{x}_3=(-2,-4,-6),\ \mathbf{x}_4=(0,\ 0,\ 0)$$
$$\mathbf{x}_5=(-2,\ 1,\ 0),\ \mathbf{x}_6=(2,\ 4,\ 6),\ \mathbf{x}_7=(-6,\ 6,-2),\ \mathbf{x}_8=(-4,-2,\ 1)$$

13. 서로 직교하는 것을 모두 찾아라.

14. 서로 평행한 것을 모두 찾아라.

※ 다음 벡터의 방향코사인을 구하라. [15~18]

15. $\mathbf{v}=(2,\ 0,-4)$

16. $\mathbf{v}=(-1,-1,-1)$

17. $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

18. $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

19. 다음의 세 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형은 직각삼각형인가?

$$\mathrm{P}(3,\ 1,\ 2),\ \mathrm{Q}(7,\ 0,\ 1),\ \mathrm{R}(2,\ 3,-4)$$

20. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위에 세 벡터 $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1,\ w_2,\ w_3)$에 대해 다음이 성립함을 보여라.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

21. 벡터 $\mathbf{z}$가 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$와 각각 직교하면 $\mathbf{z}$는 벡터 $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}$ $(a, b\in\mathbb{R})$와 직교함을 증명하라.

22. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위에 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 다음이 성립함을 증명하라.

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

23. 두 단위벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 내적은 1보다 작거나 같음을 증명하라.

5.3 벡터의 외적

기하학, 물리학, 공학 등에서 벡터를 응용할 때 종종 $\mathbb{R}^3$의 주어진 두 벡터에 동시에 수직인 벡터를 구해야 할 때가 있다. 이때 구하려는 벡터가 두 벡터의 외적인데, 이 절에서는 외적에 대해 알아보자.

5.3.1 벡터의 외적

이 벡터의 곱은 오직 좌표공간인 $\mathbb{R}^3$에서만 정의되며, 다음과 같이 두 가지 형태로 표현할 수 있다.

$\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$에 대해 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$의 **외적**cross product을 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$로 나타내며, 다음과 같이 정의한다.

❶ 벡터 표현

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=(x_2y_3-x_3y_2,\ x_3y_1-x_1y_3,\ x_1y_2-x_2y_1) \tag{5.23}$$

❷ 2차 행렬식 표현

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right) \tag{5.24}$$

두 벡터의 내적은 실수였지만, 외적은 내적과 달리 벡터이다. 그리고 두 벡터의 외적은 다음과 같은 3차 행렬식을 이용하면 간단히 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

즉 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$의 외적을 구할 때 $\mathbf{i}=(1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{j}=(0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{k}=(0,\ 0,\ 1)$을 실수와 같이 생각하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times\mathbf{y}&=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

예제 5-9

$\mathbf{x}=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{y}=(0,\ 2,\ -1)$에 대해 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$를 각각 구하라.

풀이

먼저 두 벡터의 외적 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$를 구해 보자.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times\mathbf{y}&=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}\\ &=(-2-6)\mathbf{i}-(-1+0)\mathbf{j}+(2-0)\mathbf{k}\\ &=-8\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}\end{aligned}$$

이번에는 두 벡터의 내적 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$를 구해 보자.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-1)=1$$

위 결과를 보면, 외적은 새로운 벡터지만 내적은 실수가 된다.

벡터의 외적에 관한 기본적인 계산규칙은 [정리 5-8]과 같다. 행렬식의 성질을 이용하면 쉽게 증명할 수 있으므로 증명은 연습문제로 남긴다.

정리 5-8 외적의 성질

$\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$와 임의의 스칼라 k에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-\mathbf{y}\times\mathbf{x}$

(2) $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+(\mathbf{x}\times\mathbf{z})$

(3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z}=(\mathbf{x}\times\mathbf{z})+(\mathbf{x}\times\mathbf{z})$

(4) $k(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=(k\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{x}\times(k\mathbf{y})$

(5) $\mathbf{x}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$

(6) $\mathbf{x}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$

[정리 5-8]로부터 $\mathbb{R}^3$의 표준단위벡터에 대해 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

예제 5-10

$\mathbb{R}^3$ 의 두 벡터 $\mathbf{x}=3\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{y}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$와 $\mathbf{z}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$에 대해 [정리 5-8]의 (2)가 성립함을 확인하라.

풀이

먼저 좌변을 계산하면 $\mathbf{y}+\mathbf{z}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$이므로

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

이다. 또한 우변을 계산하면

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{x}\times\mathbf{z}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=5\mathbf{j}$$

이므로, $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+(\mathbf{x}\times\mathbf{z})=-2\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}$이다.

따라서 $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+(\mathbf{x}\times\mathbf{z})$가 성립한다.

다음의 [정리 5-9]는 내적과 외적 사이에 성립하는 몇 가지 중요한 관계들이다.

정리 5-9 내적과 외적

$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$에 대해 다음 등식이 성립한다.

(1) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=0$

(2) $\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=0$

(3) $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$

(4) $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}$

(5) $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y}-(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})\mathbf{x}$

증명

여기서는 (1)~(3)을 증명한다. (4)와 (5)의 증명은 예제와 연습문제로 남긴다.

(1) $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$라 하면 다음이 성립한다.

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

(2) (1)과 마찬가지 방법으로 $\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=0$임을 알 수 있다.

(3) 이 식을 라그랑주의 항등식Lagrange's Identity이라고 한다.

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

이고

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\\&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\end{aligned}$$

이므로, 두 식의 우변을 각각 전개하여 비교하면 일치하는 것을 알 수 있다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$$ ■

예제 5-11

[예제 5-10]에서 주어진 벡터를 이용하여 [정리 5-9]의 (4)가 성립함을 확인하라.

풀이

먼저 좌변을 계산하면 $\mathbf{y}\times\mathbf{z}=-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$이므로

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&0&1\\-2&-3&-4\end{vmatrix}=3\mathbf{i}+10\mathbf{j}-9\mathbf{k}$$

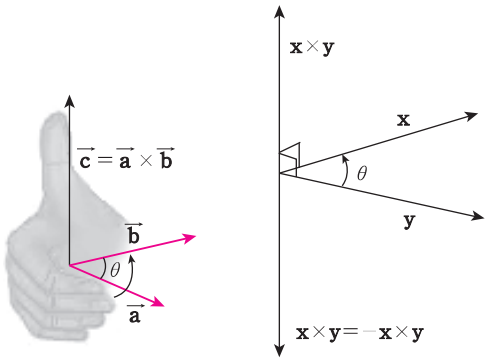
이다. 또한 우변을 계산하면

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}=5\mathbf{y}-4\mathbf{z}=3\mathbf{i}+10\mathbf{j}-9\mathbf{k}$$

이므로, $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}$이다. 따라서 (4)가 성립한다.

5.3.2 벡터의 외적의 기하학적 의미

이제 두 벡터의 외적에 대한 기하학적 의미를 알아보자. [정리 5-9]의 (1)과 (2)로부터 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$는 두 벡터 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$에 동시에 직교함을 알 수 있다. 따라서 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 평행이 아니면 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$는 이 두 벡터가 결정하는 평면에 수직인 벡터이다. 이때 벡터 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$의 방향은 **오른손 규칙**right hand rule에 의해 구할 수 있다. $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 이루는 각을 θ라 하고, $\mathbf{x}$를 θ만큼 회전시켜서 $\mathbf{y}$에 포갤 수 있다고 하자. 이 경우 $\mathbf{x}$에서 $\mathbf{y}$를 향해 오른손을 쥐었을 때 엄지손가락이 가리키는 방향이 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$의 방향이라고 생각하면 된다.



[그림 5-24] 오른손 규칙

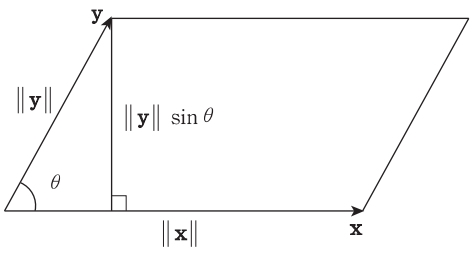
또한 [정리 5-9]의 (3)으로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\cos^2\theta\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

따라서

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\sin\theta$$

이므로, 벡터 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 의 크기는 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 만드는 평행사변형의 넓이와 같다.



[그림 5-25] 외적의 크기

예제 5-12

세 점 $P(2,\ 2,\ 0)$, $Q(-1,\ 0,\ 2)$, $R(0,\ 4,\ 3)$을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이를 구하라.

풀이

세 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이 A는 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$이 만드는 평행사변형의 넓이의 절반이다. 평행사변형의 두 변을 구하면

$$\overrightarrow{PQ} = (-3, -2,\ 2),\ \overrightarrow{PR} = (-2,\ 2,\ 3)$$

이고, 두 벡터의 외적은 다음과 같다.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-10,\ 5, -10)$$

따라서 삼각형의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{15}{2}$$

5.3.3 스칼라 삼중적

우리는 앞에서 두 벡터의 외적의 크기가 두 벡터에 의해 만들어지는 평행사변형의 넓이라는 것을 알았다. 이와 같이 외적의 성질을 이용하면 3차 행렬식의 기하학적 성질도 알 수 있다. 먼저 다음과 같이 세 벡터의 특별한 곱을 정의하자.

$\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2,\ z_3)$에 대해 $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$를 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$와 $\mathbf{z}$의 **스칼라 삼중적**scalar triple product이라고 한다.

세 벡터 $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2,\ z_3)$의 스칼라 삼중적은 벡터의 외적의 정의에 의해 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= (x_1,\ x_2,\ x_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$의 두 벡터 $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ 0)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\ 0)$에 대해 두 벡터의 외적은

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ [31]

이므로, 외적의 크기는 다음과 같다.

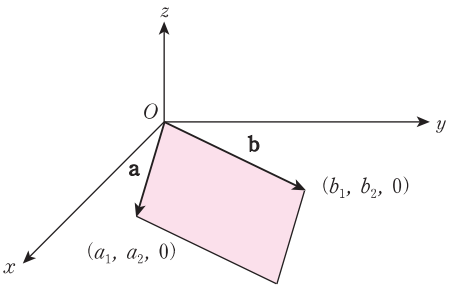
$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \left|\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right|$$

즉 벡터의 외적의 성질로부터 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

의 행렬식 $|A|$의 절댓값은 $\mathbb{R}^2$에서의 두 벡터 $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 평행사변형의 넓이와 같음을 알 수 있다.

31 $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ 0)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\ 0)$의 z축 좌표가 없으므로 두 벡터는 xy평면 위에 있는 벡터이다.



[그림 5-26] 평면에서의 외적

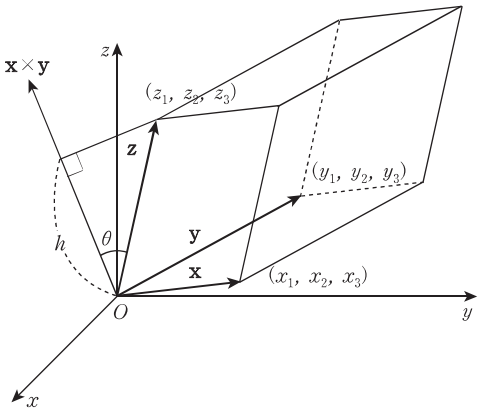
다음은 3차 행렬식의 기하학적 해석에 대한 정리이다.

정리 5-10

$\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$, $\mathbf{z}=(z_1,\ z_2,\ z_3)$에 의해 만들어지는 평행육면체의 부피는 이 세 벡터의 스칼라 삼중적의 절댓값 $|\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})|$와 같다.

증명

[그림 5-27]에서와 같이 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$와 $\mathbf{z}$가 만드는 평행육면체의 밑면을 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 만드는 평행사변형이라 하자. 그러면 밑면의 넓이는 $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$이고, $\mathbf{z}$와 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$의 사잇각을 θ라 하면 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$는 밑면에 수직이므로 평행육면체의 높이는 $h=\|\mathbf{z}\||\cos\theta|$이다.



[그림 5-27] 세 벡터의 삼중적

따라서 부피 V는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{z}\|\,|\cos\theta| \\ &= |(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}| \\ &= \left|\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\right| \end{aligned}$$

즉 평행육면체의 부피는 세 벡터의 스칼라 삼중적의 절댓값과 같다. ■

예제 5-13

[예제 5-12]에서 주어진 세 점 $\mathrm{P}(2,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{R}(0,\ 4,\ 3)$과 점 $\mathrm{S}(4,-2,\ 3)$에 대해 선분 PQ, PR, PS를 이웃하는 세 변으로 하는 평행육면체의 부피 V를 구하라.

풀이

$\mathbf{x}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\mathbf{y}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$, $\mathbf{z}=\overrightarrow{\mathrm{PS}}$라 하면

$$\mathbf{x}=(-3,-2,\ 2),\ \mathbf{y}=(-2,\ 2,\ 3),\ \mathbf{z}=(2,-4,\ 3)$$

이므로

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=-70$$

따라서 구하고자 하는 평행육면체의 부피는 다음과 같다.

$$V=|-70|=70$$

Section 5.3 연습문제

※ $\mathbf{x}=(3,\ 0,-2)$, $\mathbf{y}=(0,-1,\ 3)$, $\mathbf{z}=(1,\ 2,\ 2)$라 하고, 다음을 계산하라. [1~4]

1. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$
2. $\mathbf{y}\times\mathbf{x}$
3. $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$
4. $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$

※ 다음에 주어진 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 동시에 직교하는 벡터를 구하라. [5~8]

5. $\mathbf{x}=(1,-5,\ 3)$, $\mathbf{y}=(-1,-2,\ 1)$
6. $\mathbf{x}=(4,\ 3,-1)$, $\mathbf{y}=(2,\ 0,-2)$
7. $\mathbf{x}=(3,\ 1,\ 5)$, $\mathbf{y}=(-6,\ 4,\ 2)$
8. $\mathbf{x}=(-2,\ 1,\ 5)$, $\mathbf{y}=(2,\ 0,-2)$

※ 다음에 주어진 두 벡터 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 만드는 평행사변형의 넓이를 구하라. [9~12]

9. $\mathbf{x}=(1,-1,\ 2)$, $\mathbf{y}=(0,\ 3,\ 1)$
10. $\mathbf{x}=(1,\ 3,\ 2)$, $\mathbf{y}=(3,\ 1,\ 5)$
11. $\mathbf{x}=(6,-2,\ 8)$, $\mathbf{y}=(3,-1,\ 4)$
12. $\mathbf{x}=(2,\ 3,\ 0)$, $\mathbf{y}=(-1,\ 2,-2)$

※ 다음에 주어진 세 점 P, Q, R을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이를 구하라. [13~14]

13. $\mathrm{P}(3,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2,\ 4,\ 6)$, $\mathrm{R}(-1,\ 2,\ 7)$
14. $\mathrm{P}(1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(3,\ 2,-1)$, $\mathrm{R}(4,\ 3,\ 0)$

15. [연습문제 13~14]의 각 문제에 주어진 세 점과 점 $\mathrm{S}(0,\ 1,\ 6)$에 대해 선분 PQ, PR, PS를 이웃하는 세 변으로 하는 평행육면체의 부피를 구하라.

※ $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$와 스칼라 k에 대해 다음이 성립함을 보여라. [16~21]

16. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-\mathbf{y}\times\mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+(\mathbf{x}\times\mathbf{z})$

18. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z}=(\mathbf{x}\times\mathbf{z})+(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$

19. $k(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=(k\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{x}\times(k\mathbf{y})$

20. $\mathbf{x}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$

21. $\mathbf{x}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$

22. $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 대해 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 평행일 필요충분조건이 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{0}$임을 보여라.

23. 다음을 증명하라.

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}+(\mathbf{y}\times\mathbf{z})\times\mathbf{x}+(\mathbf{z}\times\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

힌트 이 등식은 자코비(Jacobi) 항등식이라고 한다.