Part 2

확률

Chapter

02

순열과 조합

Permutation and Combination

학습목표

- 합사건, 곱사건, 여사건에 대한 개념을 명확히 이해할 수 있다.
- 순열, 조합의 개념을 익히고, 이를 문제에 적용할 수 있다.
- 이항정리를 통해 항을 전개할 수 있다.

1장에서는 수열, 시그마, 적분을 배우면서 확률과 통계의 기초를 학습하였다. 2장에서는 어떤 사건이 일어나는 경우의 수 및 합사건, 곱사건, 여사건 등의 개념을 익히고 어떻게 적용되는지 살펴볼 것이다. 또한 수를 나열할 때 순서를 따져야 하는 순열과 순서가 상관없는 조합의 차이점에 대해 살펴보고, 이를 경우에 따라 적용하는 방법을 배운다.

통계를 이해하기 위해서는 확률을 이해해야 하고, 확률을 이해하기 위해서는 경우의 수를 이해해야 한다. 3장에서 배울 확률은 '모든 경우의 수에 대한 어떤 사건이 일어날 경우의 수의 비율'이라고 정의한다. 즉, 확률을 구하기 위해서는 경우의 수를 잘 알아야 하고 합사건, 곱사건 등은 확률 이론을 배우기 위해 기본적으로 알아야 할 용어이므로 이 장에서 그 개념을 확실히 익히도록 한다.

2.1 경우의 수

어떤 조건을 만족하는 집합을 사건이라 한다. 어떤 **사건**이 일어나는 방법이 n가지일 때, 그 사건이 일어나는 n가지를 **경우의 수**라고 한다. 이 절에서는 경우의 수를 구하기 위해 합사건, 곱사건과 어떤 사건이 일어나지 않는 여사건에 대해 배울 것이다.

2.1.1 합사건

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m가지이고 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n가지라고 하면, 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$가지다. 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우를 **합사건**이라 하고, $A \cup B$로 나타낸다. 이때 경우의 수는 $n(A \cup B)$로 표현한다.

집합 A가 $\{x|x$는 30 이하의 자연수$\}$일 때, 3의 배수 또는 5의 배수를 뽑는 경우의 수를 살펴보자. 3의 배수는 $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$로 10가지고, 5의 배수는 $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$로 6가지다. 이때 $\{15\}$와 $\{30\}$은 3의 배수이면서 5의 배수다.

그러므로 합사건의 경우의 수는 3의 배수인 경우와 5의 배수인 경우를 합한 후에 중복된 원소의 개수를 빼줘야 한다. 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$n(3\text{의 배수 또는 }5\text{의 배수}) = n(3\text{의 배수}) + n(5\text{의 배수}) - n(3\text{의 배수이면서 }5\text{의 배수})$$

이처럼 사건 A와 사건 B의 합사건을 구할 때는 사건 A가 일어나는 경우와 사건 B가 일어나는 경우의 합에서 동시에 일어나는 $A \cap B$의 경우를 빼주면 된다.

정리 2-1 합사건

두 사건을 A, B라고 할 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이번에는 세 가지 사건을 생각해보자. 사건 A, 사건 B, 사건 C가 일어나는 경우의 수를 위와 같은 방법으로 풀어 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

예제 2-1

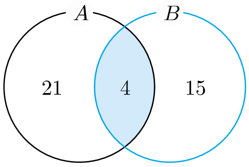
$n(A)=25$, $n(B)=19$, $n(A\cup B)=40$일 때, $n(A\cap B)$를 구하라.

풀이

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$40=25+19-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=4$$

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ 4$

예제 2-2

학생 60명에게 두 문제를 풀게 하였다. 1번 문제를 푼 학생은 35명이고, 2번 문제를 푼 학생은 28명, 두 문제를 모두 못 푼 학생은 5명이었다.

(a) 두 문제를 모두 푼 학생은 몇 명인지 구하라.
(b) 1번 문제만 푼 학생은 몇 명인지 구하라.

풀이

(a) 1번 문제를 푼 경우를 A, 2번 문제를 푼 경우를 B라고 하면

$$n(A)=35,\ n(B)=28$$

1번 문제와 2번 문제를 모두 못 푼 경우를 집합으로 표현하면

$$n(A^c\cap B^c)=n(A\cup B)^c=U-n(A\cup B)$$ ← **Hint 적용**

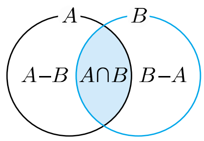
$$n(A\cup B)=U-n(A^c\cap B^c)$$
$$=60-5=55$$

따라서

$$n(A\cap B)=35+28-55=8$$

Hint

차집합



$A-B=A\cap B^c$

$B-A=B\cap A^c$

(b) 1번 문제만 푼 학생은 2번 문제를 풀지 못한 것이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B^c) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 35 - 8 = 27 \end{aligned}$$

$\therefore$ (a) 8명, (b) 27명

예제 2-3

직장인 100명을 대상으로 A, B, C 세 종류의 책 중에서 읽은 책을 조사하였다. A를 읽은 사람은 28명, B를 읽은 사람은 30명, C를 읽은 사람은 42명이었다. 또한 A와 B를 읽은 사람은 8명, B와 C를 읽은 사람은 5명, A와 C를 읽은 사람은 10명, A, B, C를 모두 읽은 사람은 3명이었다.

(a) A, B, C 중 어느 책도 읽지 않은 사람이 몇 명인지 구하라.
(b) A만 읽은 사람은 몇 명인지 구하라.
(c) B와 C만 읽은 사람은 몇 명인지 구하라.

풀이

(a) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 28 + 30 + 42 - 8 - 5 - 10 + 3 = 80$

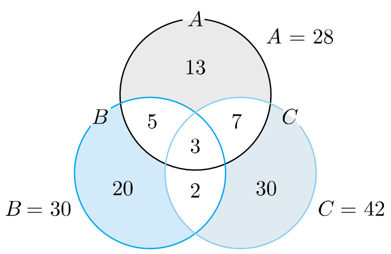
$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c \cap C^c) &= n(A \cup B \cup C)^c \\ &= U - n(A \cup B \cup C) \\ &= 100 - 80 = 20 \end{aligned}$$

(b) $n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = 80 - \{n(B) + n(C) - n(B \cap C)\}$

$= 80 - 30 - 42 + 5 = 13$

(c) $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 5 - 3 = 2$

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

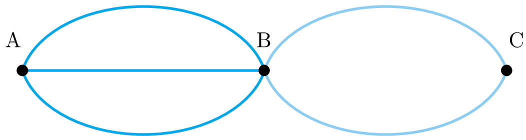


$\therefore$ (a) 20명, (b) 13명, (c) 2명

2.1.2 곱사건

두 사건 A, B에 대하여 A가 m가지 방법으로 일어나고 B가 n가지 방법으로 일어날 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$가지다. 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우를 **곱사건**이라 하고, $A \cap B$로 나타낸다. 이때 경우의 수는 $n(A \cap B)$로 표현한다.

다음 [그림 2-1]을 보자. A점에서 C점으로 가기 위해서는 B점을 반드시 지나가야 한다. 이때 A점에서 B점으로 가는 경우의 수는 3가지, B점에서 C점으로 가는 경우의 수는 2가지다. A점에서 C점으로 가기 위한 경우의 수는 3가지 × 2가지 = 6가지가 된다.



[그림 2-1] A 점에서 C 점을 가는 경로

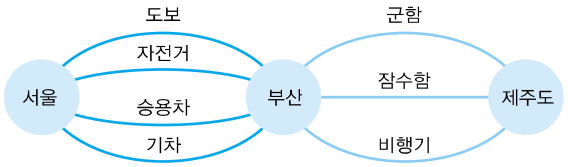
이처럼 사건 A와 사건 B가 연속적으로 일어나는 경우의 수는 사건 A가 일어나는 경우의 수와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 곱하여 구할 수 있다.

정리 2-2 곱사건

두 사건을 A, B라고 할 때, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수

$$n(A \cap B) = n(A) \times n(B)$$

예를 들어, 서울에서 부산을 거쳐 제주도에 가는 경로를 생각해보자. 서울에서 부산까지 가는 교통수단으로는 도보, 자전거, 승용차, 기차 4가지 중에서 하나를 선택해야 하고, 부산에서 제주도까지 가는 교통수단으로는 군함, 잠수함, 비행기 3가지 중에서 하나를 선택해야 한다. 서울에서 부산까지 가는 방법은 4가지, 부산에서 제주도를 가는 방법은 3가지다. 따라서 [그림 2-2]처럼 서울에서 부산을 거쳐 제주도를 가는 경로의 수는 4가지 × 3가지 = 12가지가 된다.



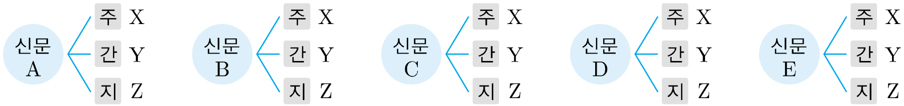
[그림 2-2] 서울에서 부산을 거쳐 제주도를 가는 경로

예제 2-4

신문 5종류와 주간지 3종류가 있다. 신문에서 하나, 주간지에서 하나를 선택하여 총 두 가지를 구독하려 할 때, 구독하는 방법의 수를 구하라.

풀이

신문 5종류를 A, B, C, D, E, 주간지 3종류를 X, Y, Z라고 하고, 신문 종류에 따라 주간지를 선택할 수 있는 경우의 수를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

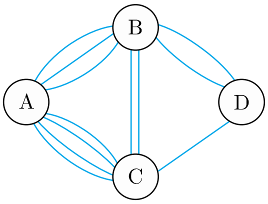


따라서 $5 \times 3 = 15$이다.

$\therefore$ 15

예제 2-5

A, B, C, D 네 지점 사이에 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 같은 지점은 한 번 밖에 지나 갈 수 없다고 할 때, A에서 D를 다녀오는 경로의 수를 구하라.



풀이

다음 두 가지 경로를 구하여 합하면 된다.

i) $A \to B \to D \to C \to A$

$3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$

ii) $A \to C \to D \to B \to A$

$4 \times 1 \times 2 \times 3 = 24$

따라서 $24 + 24 = 48$이다.

$\therefore$ 48

예제 2-6

$(a+b+c)(x+y+z+w)$의 항수를 구하라.

풀이

$(a+b+c)$항의 원소는 3개이고 $(x+y+z+w)$항의 원소는 4개이므로

$$3\times4=12$$

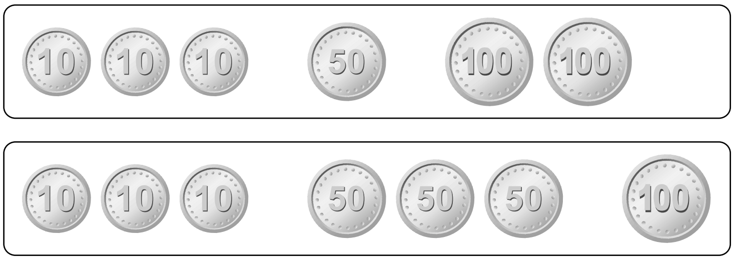
$\therefore$ 12

예제 2-7

10원, 50원, 100원짜리 동전을 모두 써서 280원을 지불하는 방법의 수를 구하라.
단, 동전은 10개 이내로 사용한다.

풀이

10원, 50원, 100원짜리 동전으로 280원을 만들 수 있는 경우는 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 2

2.1.3 여사건

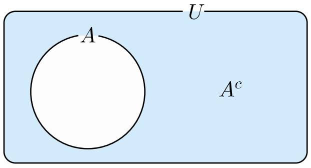
어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라고 하고, A^c로 나타낸다. [그림 2-3]처럼 전제 집합 U에서 사건 A가 아닌 영역이 여사건 A^c에 해당한다.

$U=\{a, b, c, d, e\}$일 때, $A=\{a, b\}$라 하면 A의 여집합은 $\{c, d, e\}$가 된다. 즉, $A^c=U-A$을 의미한다.

정리 2-3 여사건

전체 사건 U에서 사건 A가 일어나지 않는 사건

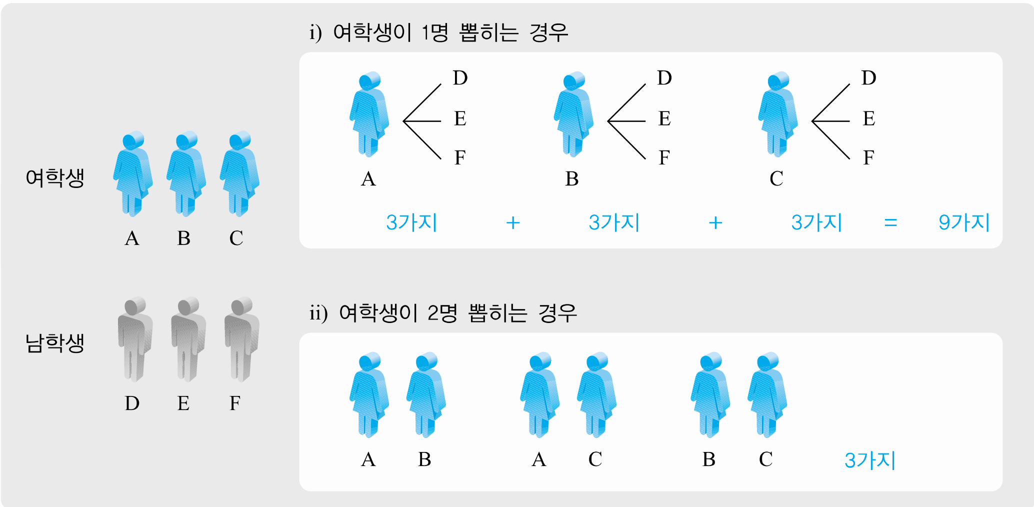
$$A^c = U - A$$



[그림 2-3] 사건 A의 여사건

여사건에서는 '적어도'가 들어있는 사건의 경우의 수를 살펴볼 필요가 있다. '적어도'는 전체 사건의 경우의 수에서 어떤 사건이 나오지 않는 경우의 수를 빼는 방법으로 접근한다.

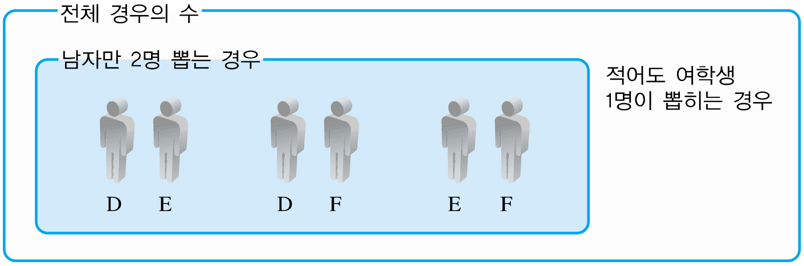
예를 들어, 남학생 3명과 여학생 3명 중에서 2명을 뽑을 때, '적어도' 여학생 1명이 뽑히는 경우는 몇 가지인지 생각해보자. '적어도' 여학생 1명이 뽑히는 경우는 여학생이 1명 뽑히는 경우와 여학생이 2명 뽑히는 경우가 있다. '적어도' 여학생 1명이 뽑히는 경우는 [그림 2-4]와 같이 이 두 경우의 수를 각각 구하여 합하면 된다.



[그림 2-4] '적어도' 여학생 1명이 뽑히는 경우

여학생이 1명 뽑히는 경우는 9가지, 여학생이 2명 뽑히는 경우는 3가지이므로 '적어도' 여학생이 1명 뽑히는 경우는 12가지가 된다. 그럼 이 경우를 여사건의 관점에서 생각해보자. 전체 6명에서 남녀 상관없이 2명을 뽑는 경우에서 여학생이 한 명도 뽑히지 않는 경우, 즉 남학생만 2명

뽑는 경우를 빼준다. 즉, [그림 2-5]와 같다.



[그림 2-5] 여사건을 이용한 '적어도' 여학생 1명이 뽑히는 경우

전체 6명에서 남녀 상관없이 2명을 뽑는 경우는 15가지, 남자 3명 중에서 2명을 뽑는 경우는 3가지이므로 15가지 - 3가지 = 12가지다. 이처럼 '적어도' 문제는 전체 집합에서 어떤 사건을 빼는 여사건의 개념으로 접근한다.

예제 2-8

다음 부분집합의 개수를 구하라.

(a) $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 집합 중 적어도 홀수를 하나 이상 포함한 부분집합

(b) $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 집합 중 적어도 짝수를 하나 이상 포함한 부분집합

풀이

(a) 원소가 n개인 부분집합 개수는 2^n이므로, 전체 부분집합의 개수는 2^5이다. 짝수의 집합은 $\{2,\ 4\}$이므로 짝수만 포함한 부분집합의 개수는 2^2이므로

$$A^c = U - A = 2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

(b) { 전체 부분집합의 개수 } − { 홀수의 부분집합 개수 }이므로

$$2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$$

∴ (a) 28, (b) 24

예제 2-9

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 16개일 때, n의 값을 구하라.

풀이

1, 2를 반드시 포함한 부분집합의 개수는

$$2^{n-2}=16=2^4$$
$$n-2=4$$

$\therefore\ n=6$

예제 2-10

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 $\{1,\ 2\}$와 서로소인 부분집합의 개수를 구하라.

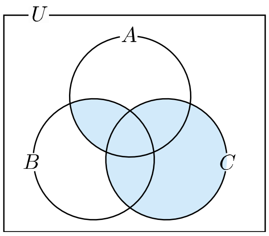
풀이

원소 1, 2를 제외한 집합은 $\{3,\ 4\}$이므로 부분집합 개수는 $2^2=4$

$\therefore\ 4$

Section 2.1 연습문제

A1. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타낸 집합을 찾아라.



① $A \cap (B \cup C)$ ② $A \cup (B \cap C)$
③ $B \cup (A \cap C)$ ④ $B \cap (A \cup C)$
⑤ $C \cup (A \cap B)$

풀이 ⑤

벤 다이어그램을 보면 집합 C가 모두 색칠되어 있다. 그리고 집합 C를 제외한 $A \cap B$에도 색칠되어 있다.

따라서 $C \cup (A \cap B)$

A2. 1부터 100까지 자연수 중 k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$의 원소 개수를 구하라.

풀이 33개

$$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)$$

2의 배수와 3의 배수의 교집합은 6의 배수이므로

$$A_2 \cap A_3 = A_6$$

2의 배수와 4의 배수의 교집합은 4의 배수이므로

$$A_2 \cap A_4 = A_4$$

$$n(A_4 \cup A_6) = n(A_4) + n(A_6) - n(A_{12})$$
$$= 25 + 16 - 8 = 33$$

A3. 수강생이 40명인 어느 강의에서 교재 A, B를 사용하는 학생의 수를 조사했더니 각각 24명, 32명이었다. 두 종류의 교재를 모두 사용하는 학생은 최소 몇 명인지 구하라.

풀이 16명

$n(U) = 40$, $n(A) = 24$, $n(B) = 32$

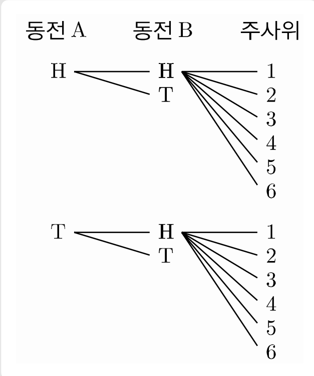
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 24 + 32 - n(A \cap B) \leq 40$$

따라서 $n(A \cap B) \geq 16$

A4. 서로 다른 동전 2개와 주사위 1개를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수를 구하라.

풀이 24

H = 앞면, T = 뒷면이라 하자.



따라서 $2\times2\times6=24$

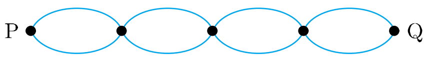
A5. $(x+y+z)(a+b)(u+v)$를 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하라.

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 12

풀이 ⑤

세 항의 원소 개수가 각각 3개, 2개, 2개이므로 $3\times2\times2=12$이다.

A6. P에서 Q까지 가는 방법의 수를 구하라. (단, 지나간 길은 다시 지나가지 않는다.)



① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

풀이 ③

$2\times2\times2\times2=2^4=16$

A7. 10원짜리 동전이 5개, 100원짜리 동전이 4개, 1000원짜리 지폐가 1장 있을 때, 이들 전부 또는 일부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 개수를 구하라. (단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

풀이 59개

$$\underset{6가지}{10원\begin{Bmatrix}0개\\1개\\2개\\3개\\4개\\5개\end{Bmatrix}}\quad \underset{5가지}{100원\begin{Bmatrix}0개\\1개\\2개\\3개\\4개\end{Bmatrix}}\quad \underset{2가지}{1000원\begin{Bmatrix}0개\\1개\end{Bmatrix}}$$

이때 0원을 지불하는 경우를 제외하면

$$(6\times5\times2)-1=59$$

A8. 두 집합 $A=\{x-2,\ x+1,\ x+3\}$, $B=\{1,\ 2,\ x^2-1\}$에 대하여 $A\cap B=\{0,\ 2\}$일 때, $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합을 구하라.

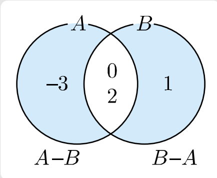
풀이 -2

$B=\{1,\ 2,\ x^2-1\}$, $A\cap B=\{0,\ 2\}$이므로

$$x^2-1=0,\ x=\pm 1$$

i) $x=1$, $A=\{x-2,\ x+1,\ x+3\}$
$=\{-1,\ 2,\ 4\}$
$A\cap B=\{2\}$이므로 조건에 안 맞는다.

ii) $x=-1$, $A=\{-3,\ 0,\ 2\}$
$A\cap B=\{0,\ 2\}$이므로 조건에 맞는다.



따라서 $(-3)+1=-2$

A9. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$이고, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때, 집합 A와 서로소인 집합 B의 모든 원소의 합을 구하라.

풀이 9

$B=(A\cup B)-A=\{4,\ 5\}$이므로 B의 원소의 합은 $4+5=9$이다.

A10. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합에서 4의 약수를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하라.

풀이 8

4의 약수는 1, 2, 4이므로 $\{1,\ 2,\ 4\}$을 제외한 $\{3,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 개수를 구하면 $2^3=8$이다.

A11. 집합 $S=\{x\,|\,x$는 12의 약수$\}$의 부분집합 중 2의 배수를 모두 포함하는 집합의 개수를 구하라.

풀이 4

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 이때 2의 배수는 2, 4, 6, 12이다.

따라서 $2^{6-4}=2^2=4$

A12. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 $\{4, 5, 6\}$을 반드시 포함하고 $\{3\}$은 포함하지 않는 집합의 개수를 구하라.

풀이 $2^2=4$

$\{4, 5, 6\}$을 반드시 포함하고, $\{3\}$은 포함하지 않아야 하므로 $\{1, 2\}$의 부분집합을 구하면 된다.

$$2^2=4$$

각 부분집합에 $\{4, 5, 6\}$을 포함시키면 구하려는 집합을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \{4, 5, 6\} \\ \{2\} &\rightarrow \{2, 4, 5, 6\} \\ \{1\} &\rightarrow \{1, 4, 5, 6\} \\ \{1, 2\} &\rightarrow \{1, 2, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

A13. 원소가 15개인 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=6$일 때, $n(A^c\cap B^c)$의 값을 구하라.

풀이 9

$(A^c\cap B^c)=(A\cup B)^c$이므로

$$\begin{aligned} n(A^c\cap B^c) &= n(A\cup B)^c \\ &= U-n(A\cup B) \\ &= 15-6=9 \end{aligned}$$

A14. 집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 a 또는 b를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하라.

풀이 24

a을 원소로 하는 부분집합 개수는

$$2^{5-1}=2^4=16$$

b를 원소로 하는 부분집합 개수는

$$2^{5-1}=2^4=16$$

a, b를 모두 원소로 하는 부분집합 개수는

$$2^{5-2}=2^3=8$$

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 16+16-8=24 \end{aligned}$$

A15. 50가구가 살고 있는 아파트가 있다. 이 아파트에서는 두 신문 H와 J 중 적어도 한 신문을 본다. 이때 H를 보고 있는 집이 35가구, J를 보고 있는 집이 28가구일 때, 신문 H와 J를 모두 보고 있는 집은 몇 가구인지 구하라.

풀이 13가구

두 신문 중 적어도 한 신문을 보는 집이 50가구이므로 신문을 보는 집은 모두 50가구다. 신문 H를 보는 집을 A, 신문 J를 보는 집을 B라고 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ 50 &= 35+28-n(A\cap B) \end{aligned}$$

따라서 $n(A\cap B)=13$

2.2 순열

어떤 전체 집합에서 순서를 생각하여 일렬로 배열하는 것을 순열이라 한다. 이 장에서는 순열에 대한 개념을 이해하고, 순열의 종류와 그에 따른 계산 방법에 대해 알아보자.

2.2.1 순열

서로 다른 n개의 원소 중에서 r개를 선택하여 순서를 생각하고 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라고 하고, ${}_nP_r$로 나타낸다. 예를 들어, 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 원소 2개를 순서를 생각하여 일렬로 배열한다고 하자. 순서를 생각하면 $\{1,\ 2\}$와 $\{2,\ 1\}$은 다른 경우가 되므로 다음과 같이 배열할 수 있다.

$$\begin{matrix} \{1,\ 2\} & \{1,\ 3\} & \{1,\ 4\} \\ \{2,\ 1\} & \{2,\ 3\} & \{2,\ 4\} \\ \{3,\ 1\} & \{3,\ 2\} & \{3,\ 4\} \\ \{4,\ 1\} & \{4,\ 2\} & \{4,\ 3\} \end{matrix}$$

서로 다른 원소 4개에서 원소 2개를 중복되지 않도록 순서를 생각하여 배열하는 경우는 ${}_4P_2$로 나타낼 수 있다. 원소 2개를 순서를 생각하여 배열하는 경우의 수는 $4\times 3=12$가 된다.

다른 예를 하나 더 들어보자. 문자 A, B, C, D, E, F에서 2개를 선택하여 순서 있게 배열한다면, 처음에 올 수 있는 문자는 6가지, 두 번째 올 수 있는 문자는 처음에 선택한 문자를 제외한 나머지 5가지다. 배열하는 방법의 수는 곱의 법칙으로 $6\times 5=30$가지다. 이처럼 순열은 n부터 시작하여 하나씩 작은 수를 r개 곱하면 된다.

정리 2-4 순열

(1) 서로 다른 n개에서 중복되지 않게 순서를 생각하여 r개를 배열하는 경우의 수

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } n \ge r)$$

(2) 순열의 성질($!$: *factorial* 또는 n의 계승이라고 읽는다.)

- ${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1 = n!$
- $0! = 1,\ \ 1! = 1$
- ${}_nP_0 = 1,\ \ {}_nP_1 = n$

예를 들면, 다음과 같다.

$_4P_1 = 4$ → 4개 중 1개만 선택하여 순서 있게 배열

$_4P_2 = 4\times 3$ → 4개 중 2개만 선택하여 순서 있게 배열

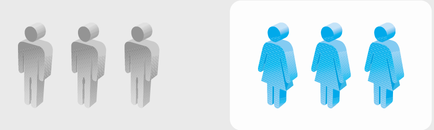
$_4P_3 = 4\times 3\times 2$ → 4개 중 3개만 선택하여 순서 있게 배열

$_4P_4 = 4\times 3\times 2\times 1$ → 4개 중 4개를 모두 선택하여 순서 있게 배열

정리 2-5 순열 관련 공식

- $_nP_r = {}_{n-1}P_r + r\times {}_{n-1}P_{r-1}$
- $_nP_r = n\times {}_{n-1}P_{r-1}$

순열에서는 원소가 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우를 살펴봐야 한다. 먼저 이웃하는 순열에 대해 생각해보자. 특정 원소가 이웃해야 하는 경우에는 이웃하는 것을 하나의 묶음, 즉 1개의 원소로 취급하여 전체 순열의 수를 구한다. 예를 들어, 남자 3명과 여자 3명을 일렬로 세울 때 여자 3명이 모두 이웃하는 경우의 수를 생각해보자.



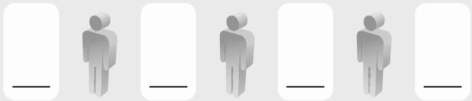
- 남, 남, 남, 여자 묶음을 나열하는 경우의 수 = 4!
- 묶음 안에서 여자 3명을 나열하는 경우의 수 = 3!

[그림 2-6] 여자 3명이 이웃하는 경우

여자 3명을 하나로 묶어 남자 3명과 일렬로 나열하면 $4! = 24$가지가 된다. 묶음 안에서 여자 3명이 순서를 바꿀 수 있으므로 여자 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$가지다. 따라서 여자 3명이 이웃하는 경우의 수는

$$4!\times 3! = 144\text{가지}$$

가 된다. 이웃하지 않게 원소를 나열하려면 이웃해도 되는 것을 먼저 나열한 뒤 이웃하지 않아야 하는 것을 나열한 원소 사이에 나열한다. 이번에는 남자 3명과 여자 3명을 일렬로 세울 때 여자 3명이 모두 이웃하지 않아야 하는 경우의 수를 생각해보자.



- 남자 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수 = 3!
- 4자리에서 3자리에 여자를 일렬로 나열하는 경우의 수 = ${}_4P_3 = 24$

[그림 2-7] 남자 3명 사이에 여자 3명을 나열하는 경우

먼저 남자 3명을 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_3$으로 3!이다. 여자를 나열하는 경우의 수는 [그림 2-7]처럼 남자 3명 사이에 생긴 4자리에 여자 3명을 순서대로 배열하면 된다. 따라서 여자를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 4\times3\times2 = 24$가지다. 전체 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$3!\times{}_4P_3 = 144\text{가지}$$

예제 2-11

${}_nP_2 = 90$일 때, 양수 n의 값을 구하라.

풀이

${}_nP_2 = n(n-1)$이므로

$$n(n-1) = 90$$
$$n^2 - n - 90 = 0$$
$$(n-10)(n+9) = 0$$
$$n = 10,\ -9$$

$\therefore\ 10$

예제 2-12

${}_4P_r \times 5! = 2880\,(r<4)$일 때, r의 값을 구하라.

풀이

$${}_4P_r \times 120 = 2880$$
$${}_4P_r = 24$$
$$\frac{4!}{(4-r)!} = 24$$
$$(4-r)! = 1,\ \ 4-r = 1,\ \ r = 3$$

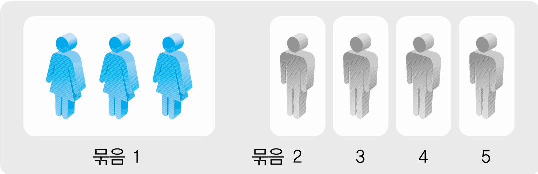
$\therefore\ 3$

예제 2-13

여학생 3명과 남학생 4명이 일렬로 설 때, 여학생끼리 이웃하게 서는 경우가 몇 가지인지 구하라.

풀이

여학생 3명을 하나로 묶으면



5묶음을 좌석 5개에 배열하여 세우는 경우는 ${}_5P_5 = 5!$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우는 ${}_3P_3 = 3!$

따라서

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

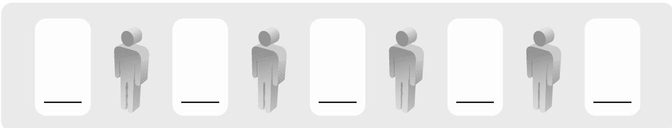
$\therefore$ 720가지

예제 2-14

여학생 3명과 남학생 4명이 일렬로 설 때, 여학생이 이웃하지 않는 경우가 모두 몇 가지인지 구하라.

풀이

먼저 남학생 4명을 일렬로 세우는 방법은 ${}_4P_4 = 4!$



위의 그림과 같이 빈 자리 5개에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_3$이므로

$$4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1440$$

$\therefore$ 1,440가지

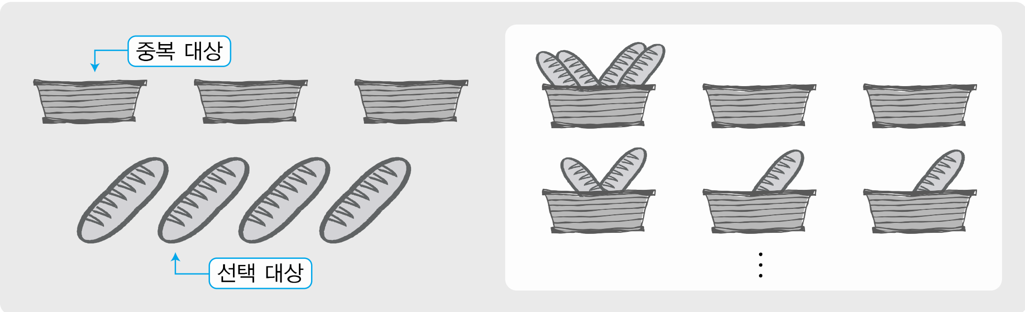
2.2.2 중복순열

집합 {1, 2, 3, 4}에서 원소 2개를 선택하여 배열하는 경우를 생각해보자. 앞에서 배운 순열로 표현하면 원소 4개에서 원소 2개를 중복되지 않게 순서를 생각하여 배열하는 경우이므로 ${}_4P_2 = 4\times 3 = 12$가지가 된다. 이 순열에 중복을 허락하면 경우의 수는 다음과 같다.

{1, 2} {1, 3} {1, 4}				
{2, 1} {2, 3} {2, 4}				
{3, 1} {3, 2} {3, 4}	+	{1, 1} {2, 2} {3, 3} {4, 4}		
{4, 1} {4, 2} {4, 3}				
순열	+	중복 허락	=	중복순열

이처럼 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 순열을 **중복순열**이라고 하고, ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.

예를 들어, 빵 4개를 바구니 3개에 나누어 담는 경우를 생각해보자.



[그림 2-8] 중복순열의 예

[그림 2-8]과 같이 한 바구니에 빵 4개를 모두 담을 수도 있고 바구니마다 빵을 나누어 담을 수도 있다. 중복순열에서는 중복되는 대상이 n, 선택하여 들어가는 대상이 r이 된다. 빵 4개를 바구니 3개에 담는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 = 81$이 된다.

정리 2-6 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하여 배열하는 방법의 수

$${}_n\Pi_r = n^r$$

순열 ${}_nP_r$에서는 $n \geq r$을 만족해야 하지만, ${}_n\Pi_r$에서는 n이 r보다 작아도 무방하다. 왜냐하면 중복을 허락하여 뽑기 때문이다.

예제 2-15

숫자 1, 2, 3, 4, 5를 써서 만들 수 있는 세 자리수가 몇 개인지 구하라.

풀이

111, 222와 같이 중복을 허락하여 나열할 수 있으므로

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

∴ 125개

예제 2-16

다음 경우의 수를 구하라.

(a) 4통의 편지를 3개의 우체통에 넣는 방법은 몇 가지인지 구하라.
(b) 빨간색, 파란색 두 깃발을 네 번씩 올려서 만들 수 있는 신호가 몇 가지인지 구하라.

풀이

(a) ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

(b) ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

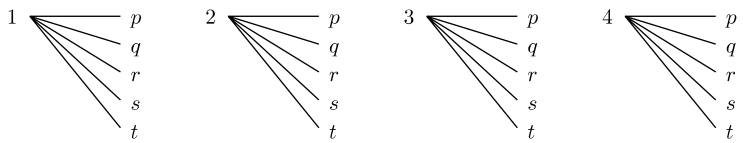
∴ (a) 81가지, (b) 16가지

예제 2-17

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B = \{p, q, r, s, t\}$일 때, A에서 B로 가는 함수의 개수를 구하라.

풀이

함수의 개수는 A의 원소가 B에 중복하여 갈 수 있으므로 중복순열로 구한다.



따라서 ${}_5\Pi_4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$이다.

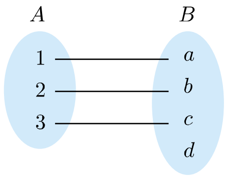
∴ 625

Check it up!

✔ **일대일함수의 개수**

일대일함수의 개수는 정의역에서 중복을 허락하지 않으므로 A에서 B로 일대일함수의 개수는 ${}_nP_r$로 구한다. 예를 들어, [그림 2-9]의 일대일함수를 살펴보자. 정의역 원소 3개가 공역에 있는 원소 4개 중에 하나와 연결되면 되므로 일대일함수의 개수는 다음과 같다.

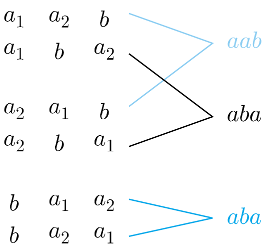
$$ {}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24 $$



[그림 2-9] 일대일함수

2.2.3 같은 것이 있는 순열

순열 중에서 같은 문자를 사용하는 순열을 **같은 것이 있는 순열**이라고 한다. n개 중 같은 것이 각각 p개, q개, r개, $\cdots$ s개가 있을 때, 이들 n개를 모두 사용하여 일렬로 배열하는 수는 $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots s!}$이다. 예를 들어 a, a, b를 나열해보자. 같은 a를 구별하기 위해 각각 a_1과 a_2로 표시하면, $3 \times 2 = 6$가지가 된다.



[그림 2-10] 문자 a, a, b 나열

그러나 a_1과 a_2는 같은 a이므로 a_1 a_2 b와 a_2 a_1 b는 모두 a a b이다. a_1 b a_2와 a_2 b a_1는 a b a고 b a_1 a_2와 b a_2 a_1는 b a a가 된다. 즉, 발생하는 순열은 a a b, a b a, b a a로 3개다. 공식으로 나타내면 3개의 문자 중에 a가 2개, b가 1개이므로 $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$이 되는 것을 확인할 수 있다.

이번에는 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 나열하는 방법의 수를 구해보자.

aaa	bb	c		$n=p+q+r$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\dfrac{n!}{p!\ q!\ r!}$
3개	2개	1개		
$3+2+1=6$			➡	$\dfrac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=\dfrac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1\times 2\times 1\times 1}=60$

a가 3개, b가 2개, c가 1개이므로 전체 수는 각각을 더한 6개라는 것을 확인할 수 있다. 또한 같은 문자를 고려하여 전체 문자를 나열하는 경우의 수는 다음과 같이 60가지가 된다.

$$\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1\times 2\times 1\times 1}=60$$

정리 2-7 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 p개, q개, r개, $\cdots$, s개가 있을 때, n개를 모두 선택하여 일렬로 배열하는 순열의 수

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots\times s!}\quad (\text{단, } p+q+r+\cdots+s=n)$$

예제 2-18

2, 2, 2, 3, 3, 5의 숫자를 나열하는 방법이 몇 가지인지 구하라.

풀이

숫자 2가 3개, 숫자 3이 2개, 숫자 5가 1개이므로

$$\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{6\times 2\times 1}=60$$

$\therefore$ 60가지

예제 2-19

SUCCESS를 모두 사용하여 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하라.

풀이

S가 3개, C가 2개, U가 1개, E가 1개이므로

$$\frac{7!}{3!\times 2!\times 1!\times 1!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4}{2\times 1} = 42\times 10 = 420$$

$\therefore$ 420

예제 2-20

mathematical를 모두 사용하여 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하라.

풀이

m이 2개, a가 3개, t가 2개이므로

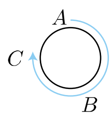
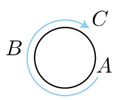
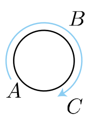
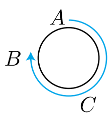
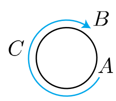
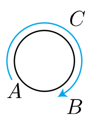
$$\frac{12!}{2!\times 3!\times 2!} = 19958400$$

$\therefore$ 19,958,400

2.2.4 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 것을 **원순열**이라고 한다. 원순열은 일반적인 순열과 달리 배열을 바라보는 관점에 따라서 같은 순열이 생기게 된다. A, B, C 세 사람을 일렬로 배열하는 경우의 수와 원형으로 배열하는 경우의 수를 비교해보자.

[표 2-1] 순열과 원순열의 비교

	배열					
순열	A B C	C A B	B C A	A C B	C B A	B A C
원순열						

순열에서 ABC, CAB, BCA는 다른 경우지만, 원순열에서는 회전 방향을 살펴보면 동일한 순열이라는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 ACB, CBA, BAC도 원순열에서는 같은 순열이다. 세 사람을 일렬로 배열한 순열을 원형으로 바꾸면 회전 방향이 같아지는 것이 3개씩 생기므로 $3!\times\frac{1}{3} = 2!$이 된다. 따라서 원순열은 순열의 수를 배열하는 원소의 수로 나누어준다.

정리 2-8 원순열
서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열의 수

$$n! \times \frac{1}{n} = (n-1)!$$

원순열에서 뒤집어 놓을 수 있으면 **염주순열**이라고 한다. 즉, 염주나 목걸이처럼 뒤집어 놓아도 같은 것이 되는 원순열을 의미한다. 염주순열은 원순열에서는 구슬의 순서가 다르나 뒤집어 놓으면 같게 되는 것이 2개씩 있다. 따라서 염주순열은 원순열의 수에 $\frac{1}{2}$이 된다.

정리 2-9 염주순열
서로 다른 n개의 구슬을 실로 꿰어서 배열하는 방법의 수

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

구슬 n개를 서로 다른 방법으로 배열하는 수를 정리하면 다음과 같다.

- 일렬로 배열하는 경우의 수 : $n!$
- 원형으로 배열하는 경우의 수 : $(n-1)!$
- 염주로 만드는 경우의 수 : $\frac{(n-1)!}{2}$

예제 2-21

탁자에 구슬이 5개가 있다.

(a) 이 구슬을 일직선으로 늘어놓는 방법의 수를 구하라.
(b) 이 구슬을 원형으로 늘어놓는 방법의 수를 구하라.
(c) 이 구슬을 실에 꿰어서 목걸이를 만드는 방법의 수를 구하라.

풀이

(a) 일직선으로 나열하므로 $5! = 120$

(b) 원형으로 나열하므로 $(5-1)! = 4! = 24$

(c) 염주 형태로 나열하므로 $\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = 12$

$\therefore$ (a) 120, (b) 24, (c) 12

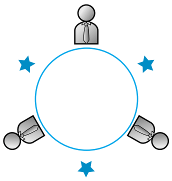
예제 2-22

남학생 3명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수를 구하라.

풀이

먼저, 남학생 3명이 원형 탁자에 앉는 방법의 수는 $(3-1)!=2!$
남학생이 앉고 남은 자리에 여학생 3명이 앉는 방법의 수는 ${}_3P_3=3!$

따라서 $2!\times 3!=12$이다.



$\therefore$ 12

예제 2-23

구슬 6개를 원형으로 늘어놓는 방법의 수와 구슬을 꿰어서 목걸이를 만드는 방법의 수를 구하라.

풀이

원형으로 늘어 놓는 방법은 원순열이므로

$$(6-1)!=5!=120$$

목걸이를 만드는 방법은 염주순열이므로

$$\frac{(6-1)!}{2!}=\frac{5!}{2}=60$$

$\therefore$ 120, 60

예제 2-24

아버지와 어머니를 포함한 가족 6명이 원탁에 둘러앉을 때, 아버지와 어머니가 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하라.

풀이

아버지와 어머니를 하나로 묶으면 5명을 원탁에 앉히는 경우의 수와 같으므로 원탁에 앉는 수는

$$(5-1)!=24$$

이때 부모가 자리 바꾸는 경우의 수는 2가지이므로

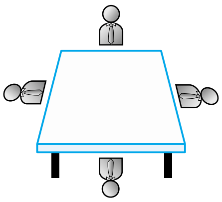
$$24 \times 2 = 48$$

$\therefore$ 48

2.2.5 대칭순열

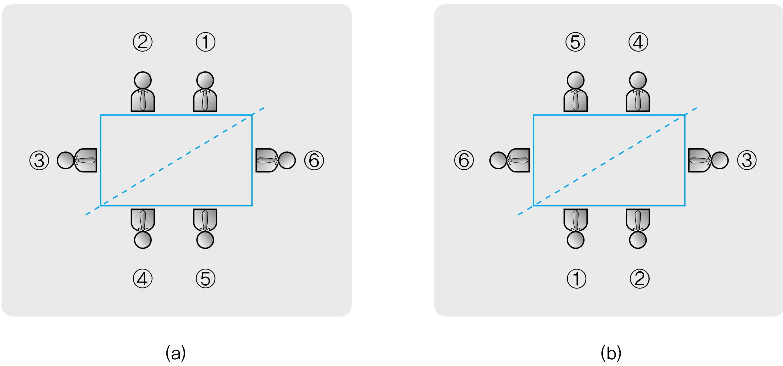
서로 다른 n개를 원형이 아닌 다각형에 배열하는 순열을 **대칭순열**이라고 한다. 대칭순열은 정사각형, 직사각형, 정삼각형 등의 다각형에 배열하는 것을 의미한다.

다음 [그림 2-11]을 보자. 정사각형 탁자에 4명이 앉는 경우는 원탁에 4명이 앉는 경우와 같이 $(4-1)!$이다.



[그림 2-11] 정사각형 탁자에 4명이 앉는 경우

[그림 2-12]와 같이 직사각형 탁자에 6명이 둘러앉는 경우도 생각해보자. 대각선을 중심으로 [그림 2-12(a)]처럼 ①번 자리에 A, ②번 자리에 B, ⑥번 자리에 C가 앉는 경우와 [그림 2-12(b)]처럼 ①번 자리에 A, ②번 자리에 B, ③번 자리에 C가 앉는 경우는 배열 모양이 같다. 즉 대각선을 중심으로 어느 한부분에서 고정된 한 사람이 앉는 경우의 수를 생각하면 된다.



(a) (b)

[그림 2-12] 직사각형 탁자에 6명이 앉는 경우

정리 2-10 대칭순열

다각형의 모양에 따라 대칭순열을 나타내면

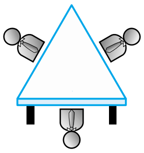
- 정사각형에 n명을 앉히는 방법의 수 $(n-1)!\times\dfrac{n}{4}$
- 직사각형에 n명을 앉히는 방법의 수 $(n-1)!\times\dfrac{n}{2}$
- 정삼각형에 n명을 앉히는 방법의 수 $(n-1)!\times\dfrac{n}{3}$
- 정오각형에 n명을 앉히는 방법의 수 $(n-1)!\times\dfrac{n}{5}$

예제 2-25

정삼각형 모양의 탁자에 3명이 앉는 방법의 수를 구하라.

풀이

그림으로 나타내면 다음과 같다.



$$(3-1)!\times\frac{3}{3}=2$$

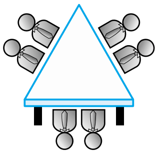
$\therefore$ 2

예제 2-26

가족 6명이 정삼각형 모양의 식탁에 앉는 방법의 수를 구하라.

풀이

그림으로 나타내면 다음과 같다.



$$(6-1)!\times\frac{6}{3}=5!\times 2=240$$

$\therefore$ 240

Section 2.2 연습문제

A1. 회원 수가 40명인 동호회에서 회장, 부회장을 각각 한 명씩 선출하는 방법의 수를 구하라.

① 50 ② 84
③ 1200 ④ 1560
⑤ 2450

풀이 ④

회원 40명에서 2명을 순서대로 뽑는 경우이므로

${}_{40}P_2 = 40 \times 39 = 1560$

A2. ${}_nP_3 + 3 \times {}_nP_2 = 5 \times {}_{n+1}P_2$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하라. (단, $n \ge 3$)

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

풀이 ①

$$n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = 5(n+1)n$$

양변을 n으로 나누면

$$n^2 - 3n + 2 + 3n - 3 = 5n + 5$$
$$n^2 - 5n - 6 = 0$$
$$(n-6)(n+1) = 0$$
$$n = -1,\ 6$$

$n \ge 3$이므로 $n = 6$

A3. A, B, C, D, E 다섯 사람 중에서 회장, 부회장, 총무를 각각 한 사람씩 뽑으려고 한다. 이때 A가 반드시 회장에 뽑히는 경우의 수를 구하라.

① 3 ② 6 ③ 12
④ 24 ⑤ 60

풀이 ③

회장을 A로 고정하고 B, C, D, E 4명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

A4. 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 세 개의 숫자를 선택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하라.

① 48 ② 42 ③ 40
④ 38 ⑤ 32

풀이 ①

첫 번째 자리에는 0을 제외한 1, 2, 3, 4를 선택할 수 있고, 나머지 두 자리에는 첫 번째 숫자를 제외한 4개의 숫자에서 2개를 순서대로 배열하면 $4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \times 3 = 48$

A5. 과일이 세 종류가 있다. 사과, 배, 오렌지라고 할 때, 중복을 허락하여 접시 4개에 한 개씩 담는 방법의 수를 구하라.

① 27 ② 36 ③ 72
④ 81 ⑤ 243

풀이 ④
접시 4개에 1개씩 담으려면 과일 4개가 필요하므로, 과일 세 종류에서 중복하여 4개를 뽑는 중복순열이 된다.

따라서 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

A6. 학생 6명이 밴드부와 사진부 두 동아리에 가입하는 방법의 수를 구하라. (단, 각각의 학생은 한 동아리에만 가입할 수 있다.)

① 36 ② 40 ③ 52
④ 64 ⑤ 128

풀이 ④
두 동아리에는 중복하여 가입할 수 있다.

따라서 ${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$

A7. $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, X에서 Y로의 함수의 개수를 구하라.

① 27 ② 36 ③ 64
④ 81 ⑤ 243

풀이 ③
함수의 개수는 중복순열로 구한다.

따라서 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

A8. $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, X에서 Y로의 일대일함수의 개수를 구하라.

① 81 ② 64 ③ 36
④ 27 ⑤ 24

풀이 ⑤
일대일함수의 개수는 순열로 구한다.

따라서 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

A9. $10001_{(2)}$, $10011_{(2)}$와 같이 이진법으로 다섯 자리를 표현하는 방법의 개수를 구하라.

① 32 ② 28 ③ 24
④ 20 ⑤ 16

풀이 ⑤
맨 앞자리에 1이 오고 나머지 네 자리에는 0 또는 1이 오면 되므로 ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

A10. 숫자 1, 2, 3을 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 정수의 개수를 구하라.

① 88 ② 128 ③ 149
④ 200 ⑤ 243

풀이 ⑤
자리마다 숫자 1, 2, 3을 넣을 수 있다.

따라서 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

A11. TOMORROW를 일렬로 배열할 때, 양 끝에 모음이 오는 경우의 수를 구하라.

① 120 ② 320 ③ 360
④ 520 ⑤ 720

풀이 ③
양 끝에 모음 O 2개를 배열하면,

$$\mathrm{O}\ \underbrace{\mathrm{T}\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{R}\quad \mathrm{R}\quad \mathrm{O}\quad \mathrm{W}}_{\mathrm{T}:1\text{개},\ \mathrm{M}:1\text{개},\ \mathrm{R}:2\text{개},\ \mathrm{O}:1\text{개},\ \mathrm{W}:1\text{개}}\ \mathrm{O}$$

따라서 $\dfrac{6!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = 360$

A12. 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자에서 네 개를 골라 만들 수 있는 네 자리 자연수가 몇 가지인지 구하라.

풀이 38가지
먼저, 1이 3개인 경우는 1이 3개 들어가고 나머지 한 자리에 다른 숫자가 들어가므로

$$1\ 1\ 1\ 3 \rightarrow \frac{4!}{3!\times 1!} = 4$$

$$1\ 1\ 1\ 2 \rightarrow \frac{4!}{3!\times 1!} = 4$$

1이 2개인 경우는 나머지 두 자리에 숫자가 들어가는 방법을 생각해야 한다. 1이 2개 들어가고 2가 2개 들어가면

$$1\ 1\ 2\ 2 \rightarrow \frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

1이 2개 들어가고 두 자리에 서로 다른 숫자가 들어가면

$$1\ 1\ 2\ 3 \rightarrow \frac{4!}{2!\times 1!\times 1!} = 12$$

마지막으로 1이 1개 들어가면

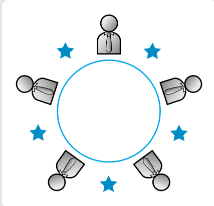
$$2\ 2\ 3\ 1 \rightarrow \frac{4!}{2!\times 1!\times 1!} = 12$$

따라서 $4+4+6+12+12=38$

A13. 남자 5명과 여자 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 여자끼리 이웃하지 않는 경우의 수를 구하라.

풀이 1440

여자끼리 이웃하지 않기 위해서는 남자를 먼저 앉힌 후에 그 사이에 여자가 앉으면 된다.



남자를 배열하는 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

★ 자리에 여자가 앉는 경우의 수는

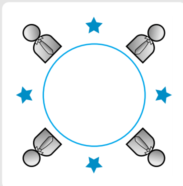
$$_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

따라서 $4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1440$

A14. 한국인 4명과 중국인 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 중국인끼리는 이웃하지 않는 경우의 수를 구하라.

① 192 ② 180 ③ 168
④ 156 ⑤ 144

풀이 ⑤



★ 자리를 중국인이 앉는 자리로 생각하면 ${}_4P_3 = 24$이므로 $(4-1)! \times {}_4P_3 = 144$

A15. 커플 5쌍이 원탁에 둘러앉을 때, 커플끼리 이웃하여 앉는 방법의 수를 구하라.

① 180 ② 240 ③ 360
④ 768 ⑤ 720

풀이 ④

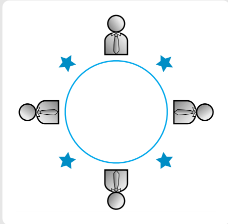
각각의 커플을 한 팀으로 생각한다. 5팀이 원탁에 앉는 방법의 수는 $(5-1)!$, 커플이 자리를 바꾸는 수는 각각 $2!$이므로

$(5-1)! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 768$

A16. 어른 4명과 아이 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 어른과 아이가 교대로 앉는 경우의 수를 구하라.

① 108 ② 144 ③ 180
④ 216 ⑤ 288

풀이 ②



어른 4명이 원탁에 앉는 방법의 수는

$$(4-1)!=3!=6$$

★자리에 아이 4명이 앉는 방법은

$$_4P_4=4!=24$$

따라서 $(4-1)!\times{}_4P_4=6\times24=144$

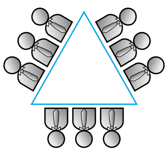
A17. 구슬 6개로 목걸이를 만들 수 있는 개수를 구하라.

① 30 ② 60 ③ 90
④ 120 ⑤ 150

풀이 ②

염주순열은 $\dfrac{(n-1)!}{2}$이므로 $(6-1)!\times\dfrac{1}{2}=60$

A18. 다음 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 9명이 둘러앉는 방법의 수를 구하라.



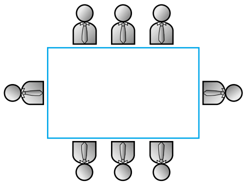
① $8!$ ② $8!\times2$ ③ $8!\times3$
④ $9!\times2$ ⑤ $9!\times3$

풀이 ③

그림을 보면 대칭이 되는 구간이 3개이므로

$(9-1)!\times\dfrac{9}{3}=(9-1)!\times3=8!\times3$

A19. 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 방법의 수를 구하라.

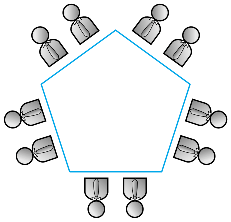


① 2520 ② 5040 ③ 20160
④ 40320 ⑤ 80640

풀이 ③
그림을 보면 대칭이 되는 구간이 2개이므로

$(8-1)!\times\dfrac{8}{2}=5040\times4=20160$

A20. 다음 그림과 같은 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 방법의 수를 구하라.



① $9!$ ② $9!\times2$ ③ $9!\times3$
④ $9!\times5$ ⑤ $9!\times{}_5P_2$

풀이 ②
그림을 보면 대칭이 되는 구간이 5개이므로

$(10-1)!\times\dfrac{10}{5}=(10-1)!\times2=9!\times2$

2.3 조합

순서를 생각하지 않고 일렬로 선택하는 것을 **조합**이라 한다. 이번 절에서는 조합에 대한 개념을 이해하고, 조합의 종류와 그에 따른 계산 방법에 대해 알아보자.

2.3.1 조합

서로 다른 n개 중에서 중복되지 않도록 r개를 선택하여 순서를 생각하지 않고 선택하는 것을 n개에서 r개를 선택하는 **조합**이라고 하고, ${}_nC_r$로 나타낸다.

1, 2, 3, 4 숫자 4개에서 2개를 선택하는 경우를 살펴보자. 순서를 생각하여 배열하는 경우(순열)와 순서를 생각하지 않고 배열하는 경우(조합)를 나열하면 다음 [그림 2-13]과 같다.

순열

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
$(2,1)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,4)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$

${}_4P_2 = 12$가지

조합

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
	$(2,3)$	$(2,4)$
		$(3,4)$

${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = 6$가지

[그림 2-13] 조합의 정의

조합에서는 순서를 무시하므로 (1, 2)와 (2, 1)은 서로 같다. 이런 식으로 순서를 무시하여 숫자 4개에서 2개를 선택하는 방법은 따라서 6가지다. 따라서 조합은 순서를 배열하는 경우에서 같은 경우의 수만큼 나누면 된다. 즉 조합은 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$로 구한다.

정리 2-11 조합

- 서로 다른 n개에서 중복되지 않게 r개를 선택하는 경우의 수

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

정리 2-12 조합의 성질

- ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
- ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$
- ${}_nC_0 = 1,\ {}_nC_n = 1,\ {}_nC_1 = n$

예를 들면, 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&{}_5C_0 = 1,\ {}_5C_1 = 5 \\
&{}_5C_2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10 \\
&{}_5C_3 = \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1} = 10
\end{aligned}
$$

순열과 조합의 차이점을 생각해보자. [표 2-2]와 같이 A, B, C 세 사람 중에서 대표, 부대표를 1명씩 뽑는 경우와 대표 2명을 뽑는 경우를 비교해보자. 대표, 부대표를 뽑는 경우는 대표와 부대표라는 순서가 있으므로 순열에 해당한다. 반면에, 대표 2명을 뽑는 경우는 순서를 고려할 필요가 없으므로 조합에 해당한다.

[표 2-2] 순열과 조합 비교

대표, 부대표를 1명씩 뽑는 경우	대표 2명을 뽑는 경우
(A, B) (A, C) (B, C) (B, A) (C, A) (C, B) ${}_3P_2 = 6$가지	(A, B) (A, C) (B, C) ${}_3C_2 = 3$가지

예제 2-27

${}_{100}C_{98}$의 값을 구하라.

풀이

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$이므로

$$
{}_{100}C_{98} = {}_{100}C_2 = \frac{100\times 99}{2\times 1} = 4950
$$

$\therefore$ 4950

예제 2-28

$12\times{}_{n}C_{3}-6\times{}_{n}P_{2}={}_{n}P_{3}$을 만족하는 n의 값을 구하라.

풀이

$$12\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}-6n(n-1)=n(n-1)(n-2)$$

$n\geq3$이므로 $n(n-1)$로 양변을 나누면

$$2(n-2)-6=n-2$$
$$2n-4-6=n-2$$
$$n=10-2=8$$

$\therefore\ n=8$

예제 2-29

10개의 축구팀이 리그전을 할 때, 전체 시합의 수를 구하라.

풀이

축구 시합을 하는 두 팀을 뽑는 경우는 순서가 상관없으므로

$${}_{10}C_{2}=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$

$\therefore\ 45$

예제 2-30

후보 10명에서 대표 5명을 선출하려고 한다. 이때 특정한 2명이 뽑히는 경우의 수를 구하라.

풀이

특정한 2명은 이미 뽑았다고 생각하고, 후보 8명 중에서 나머지 대표 3명을 선출하면 된다.

$${}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

$\therefore\ 56$

2.3.2 중복조합

서로 다른 n개 중에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 조합을 **중복조합**이라 하고, ${}_nH_r$로 나타낸다.

정리 2-13 중복조합

서로 다른 n개 중에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 조합의 수

$$ {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r $$

1, 2, 3, 4 숫자 4개 중에서 2개를 선택할 때, 순열의 종류에 따른 경우의 수를 [표 2-3]에 정리하였다.

[표 2-3] 순열과 조합 정리

순열의 종류	전개	계산식
순열	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)	${}_4P_2 = 12$가지
중복순열	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3) + (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)	${}_4\Pi_2 = 16$가지
조합	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)	${}_4C_2 = 6$가지
중복조합	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) + (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)	${}_4H_2 = 10$가지

예제 2-31

유권자 10명이 입후보자 3명에게 투표할 때, 기명투표를 하는 경우와 무기명투표를 하는 경우의 수를 각각 구하라. (단, 입후보자 1명에게만 투표를 할 수 있으며 기권이나 무효표는 없다고 가정한다.)

풀이

기명투표는 중복순열로 구할 수 있으므로

$$ {}_3\Pi_{10} = 3^{10} $$

무기명투표는 중복조합으로 구할 수 있으므로

$$ {}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = 66 $$

$\therefore$ 기명투표 : 3^{10}, 무기명투표 : 66

예제 2-32

$(x+y+z)^6$의 전개식에서 항의 총 수를 구하라.

풀이

$$_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$$

$\therefore$ 28

예제 2-33

다음 방정식을 만족하는 음이 아닌 정수해는 몇 쌍인지 구하라.

$$x+y+z=10$$

풀이

$$_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12\times 11}{2\times 1} = 6\times 11 = 66$$

$\therefore$ 66쌍

2.3.3 분할과 분배

분할과 분배에 대한 개념에 대해 생각해보자. 서로 다른 n개의 물건을 나누는 것을 **분할**, 나누어 주는 것을 **분배**라고 한다.

분할은 나누는 방법에 따라 경우의 수가 달라진다. 예를 들어, $\{a, b, c, d, e, f, g, h, g\}$까지 총 9명을 세 조로 나누는 경우의 수를 생각해보자.

■ 2명, 3명, 4명으로 조를 나누는 경우 (각 조의 인원이 다른 경우)

9명에서 2명을 선택하는 경우의 수는 $_9C_2$, 남은 7명에서 3명을 선택하는 경우의 수는 $_7C_3$이다. 그리고 나머지 4명을 한 조로 생각하면 $_4C_4$가 된다. 즉 9명에서 2명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

$$_9C_2\times {}_7C_3\times {}_4C_4 = \frac{9\times 8}{2\times 1}\times\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\times 1 = 36\times 35\times 1 = 1260$$

■ 2명, 2명, 5명으로 조를 나누는 경우 (두 조의 인원이 같은 경우)

9명에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_9C_2$, 남은 7명에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_2$이다. 그리고 나머지 5명을 한 조로 생각하면 ${}_5C_5$가 된다. 그러나 3조를 뽑은 경우의 수에서 $\{(a,\ b),\ (c,\ d),\ (e,\ f,\ g,\ h,\ i)\}$와 $\{(c,\ d),\ (a,\ b),\ (e,\ f,\ g,\ h,\ i)\}$는 같은 경우가 된다. 따라서 9명에서 2명, 2명, 5명으로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = \frac{9\times 8}{2\times 1} \times \frac{7\times 6}{2\times 1} \times 1 \times \frac{1}{2!} = 36 \times 21 \times \frac{1}{2!} = 378 $$

■ 3명, 3명, 3명으로 조를 나누는 경우 (세 조의 인원이 같은 경우)

9명에서 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_9C_3$, 남은 6명에서 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3$이다. 그리고 나머지 3명을 한 조로 생각하면 ${}_3C_3$이 된다. 그러나 $\{(a,\ b,\ c),\ (d,\ e,\ f),\ (g,\ h,\ i)\}$는 서로 자리를 바꿔도 같은 경우가 된다. 따라서 9명에서 3명, 3명, 3명을 뽑는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} \times \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} \times 1 \times \frac{1}{6} = 84\times 20\times \frac{1}{6} = 280 $$

분배는 분할하는 경우에서 나누어 주는 경우의 수를 곱하여 구할 수 있다. 3묶음을 3명에게 나누어 주면 $3!$, 4묶음을 4명에게 나누어 주면 $4!$이 된다.

정리 2-14 분할 경우의 수

서로 다른 n개를 p개, q개, r개의 3묶음으로 나누는 경우의 수

- $p,\ q,\ r$이 모두 다른 경우 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r$
- $p,\ q,\ r$ 중 2묶음의 수가 같은 경우 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{2!}$
- $p,\ q,\ r$ 중 3묶음의 수가 모두 같은 경우 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{3!}$

정리 2-15 분배 경우의 수

p개, q개, r개씩 나누어 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수

$$ (\text{분배하는 방법의 수}) \times 3! $$

예제 2-34

인턴 10명을 4명과 6명의 두 조로 나누는 방법은 몇 가지인지 구하라.

풀이

10명 중에서 4명을 먼저 뽑고, 나머지 인원에서 6명을 뽑는다.

$$_{10}C_4 \times {_6C_6} = 210$$

∴ 210가지

예제 2-35

아르바이트생 10명을 5명씩 두 조로 나누는 방법은 몇 가지인지 구하라.

풀이

$$_{10}C_5 \times {_5C_5} \times \frac{1}{2!} = 126$$

∴ 126가지

예제 2-36

서로 다른 15종류의 꽃이 있다. 5송이씩 세 다발로 나누는 방법은 몇 가지인지 구하라.

풀이

$$_{15}C_5 \times {_{10}C_5} \times {_5C_5} \times \frac{1}{3!} = 126126$$

∴ 126,126가지

예제 2-37

서로 다른 15종류의 꽃이 있다. 5송이씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인지 구하라.

풀이

15종류의 꽃을 5송이씩 분할하는 방법은

$$_{15}C_5 \times {_{10}C_5} \times {_5C_5} \times \frac{1}{3!}$$

3다발의 꽃을 세 사람에게 나누어 주는 방법은

$$_3P_3 = 3!$$

따라서

$$_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756$$

$\therefore$ 756,756가지

Section 2.3 연습문제

A1. ${}_nP_2+4{}_nC_3={}_nP_3$을 만족하는 n의 값을 구하라.

① 9　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 5

풀이 ⑤

${}_nP_3$이므로 $n\geq 3$이다.

$$n(n-1)+4\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=n(n-1)(n-2)$$

양변을 $n(n-1)$로 나누면

$$1+\frac{2\times(n-2)}{3}=(n-2)$$

양변에 3을 곱하면

$$3+2(n-2)=3(n-2)$$

따라서 $n=5$

A2. ${}_nP_r=120,\ {}_nC_r=20$일 때, $n+r$의 값을 구하라.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

풀이 ④

${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!},\ {}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$이므로

$${}_nP_r={}_nC_r\times r!$$
$$120=20\times r!$$
$$r!=6=3\times2\times1,\ r=3$$
$${}_nP_3=n(n-1)(n-2)=120$$

$120=6\times5\times4$이므로 $n=6$

따라서 $n+r=6+3=9$

A3. ${}_nC_3={}_nC_5$을 만족하는 n의 값을 구하라.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

풀이 ④

${}_nC_5$이므로 $n\geq 5$이다.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$$(n-3)(n-4)=5\times4,\ n-3=5$$

따라서 $n=8$

A4. ${}_{12}C_r = {}_{12}C_{r-4}$를 만족하는 r의 값을 구하라.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀이 ④

${}_{12}C_r = {}_{12}C_{r-4}$에서 $r = r-4$을 만족하는 r은 없으므로 ${}_{12}C_r$을 ${}_{12}C_{12-r}$로 바꾸면

$$\begin{aligned} {}_{12}C_{12-r} &= {}_{12}C_{r-4} \\ 12-r &= r-4 \\ 2r &= 16 \end{aligned}$$

따라서 $r=8$

A5. $A=\{a, b, c\}$에서 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 f 중에서

(a) $f(a) < f(b) < f(c)$를 만족하는 f의 개수를 구하라.

(b) $f(a) \le f(b) \le f(c)$를 만족하는 f의 개수를 구하라.

풀이 (a) 10, (b) 35

(a) 순서를 무시하고 집합 B에서 원소 3개를 크기에 맞게 나열하면 되므로 ${}_5C_3 = 10$

(b) 순서를 무시하고 중복을 허용하여 나열하므로 ${}_5H_3 = 35$

A6. $x+y+z+w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수해는 몇 쌍인지 구하라.

① 152 ② 512 ③ 286
④ 143 ⑤ 72

풀이 ③

${}_4H_{10} = {}_{4+10-1}C_{10} = 286$

A7. 탁구동호회 회원 10명이 모여 있다. 2명이 한 팀을 이루어, 두 팀끼리 시합을 하기로 한다. 이때 시합하는 방법은 몇 가지인지 구하라.

풀이 9,450가지

2명이 한 팀을 이루는 방법은

$$ {}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{5!} $$

5팀에서 2팀이 시합하는 경우는 ${}_5C_2$

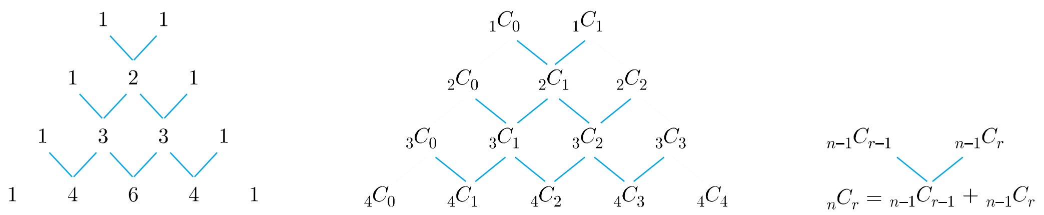
따라서

$$ {}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{5!} \times {}_5C_2 = 9450 $$

2.4 이항정리

이항정리는 다항식의 거듭제곱에 관한 정리식이다. [그림 2-14]는 다항식을 거듭제곱할 때 나오는 계수를 보여준다. 예를 들어, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$의 계수는 순서대로 1, 2, 1로 [그림 2-14]의 두 번째에 해당하는 수와 같음을 확인할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + a^0b^5
\end{aligned}
$$



[그림 2-14] 파스칼의 삼각형

정리 2-16 이항정리

n이 양의 정수일 때,

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_na^0b^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

$(a+b)^n$과 같이 2개의 항을 전개할 때를 이항정리라고 하고, $(a+b+c)^n$과 같이 3개의 항을 전개할 때를 삼항정리라고 한다. 일반적으로 삼함정리 이상을 다항정리라고 한다.

정리 2-17 다항정리

$$(a+b+c)^n = \frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \quad (\text{단, } p+q+r = n\text{이고 } p,\ q,\ r \geq 0)$$

정리 2-18 이항계수의 성질

- ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

  ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

- ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1}$

  ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots = 2^{n-1}$

- $1 \times {}_nC_1 + 2 \times {}_nC_2 + 3 \times {}_nC_4 + 4 \times {}_nC_4 + \cdots + n \times {}_nC_n = n \times 2^{n-1}$

  $1 \times {}_nC_1 - 2 \times {}_nC_2 + 3 \times {}_nC_4 - 4 \times {}_nC_4 + \cdots = 0$

$(1+x)^n = {}_nC_0 x^0 + {}_nC_1 x^1 + nC_2 x^2 + nC_3 x^3 + \cdots + nC_n x^n$ 이므로

$$x = 1,\ {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$
$$x = -1,\ {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

두 식을 더하면

$$2\{{}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\} = 2^n$$
$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1}$$

두 식을 빼면

$$2\{{}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots\} = 2^n$$
$${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots = 2^{n-1}$$

따라서 홀수항 계수의 총합과 짝수항 계수의 총합은 모두 2^{n-1}이 된다.

예제 2-38

$(2a-b)^4$을 전개하라.

풀이

$$\begin{aligned}(2a-b)^4 &= 1(2a)^4(-b)^0 + 4(2a)^3(-b)^1 + 6(2a)^2(-b)^2 + 4(2a)^1(-b)^3 + 1(2a)^0(-b)^4 \\ &= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4\end{aligned}$$

예제 2-39

$(2x^2-3x)^4$의 전개식에서 x^7의 계수를 구하라.

풀이

$(a+b)^n = {}_nC_r a^{n-r}b^r$이므로

$${}_4C_r(2x^2)^{4-r}(-3x)^r = {}_4C_r 2^{4-r}(-3)^r x^{8-2r}x^r = {}_4C_r 2^{4-r}(-3)^r x^{8-r}$$

x^7의 계수를 구하려면

$$x^{8-r}=x^7,\ \ 8-r=7,\ \ r=1$$

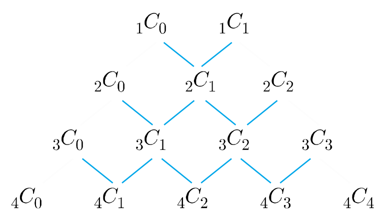
계수 부분인 ${}_4C_r 2^{4-r}(-3)^r$에 $r=1$을 대입하면

$${}_4C_1 2^3(-3)^1 = 4\times 8\times(-3) = -96$$

$\therefore\ -96$

예제 2-40

파스칼의 삼각형을 이용하여 ${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$의 값을 구하라.



풀이

앞에서부터 차례로 구하면

$${}_3C_2+{}_3C_3={}_4C_3$$
$${}_4C_2+{}_4C_3={}_5C_3$$
$${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$$
$${}_6C_2+{}_6C_3={}_7C_3$$

따라서 모든 항을 더하면

$${}_7C_3-{}_3C_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}-1=35-1=34$$

$\therefore\ 34$

Section 2.4 연습문제

A1. $\left(x - \dfrac{a}{x}\right)^7$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 84 일 때, a^2 의 값을 구하라.

풀이 4

$$ {}_7C_r x^{7-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r = (-a)^r {}_7C_r x^{7-r}x^{-r} = (-a)^r {}_7C_r x^{7-2r} $$

x^3 의 계수를 구해야 하므로

$$7 - 2r = 3, \quad r = 2$$

계수 부분인 $(-a)^r {}_7C_r$ 에 $r=2$ 을 대입하면

$$(-a)^2 {}_7C_2 = a^2\left(\frac{7\times 6}{2\times 1}\right) = 84$$

따라서 $a^2 = 4$

A2. $\dfrac{{}_5P_1}{1!} + \dfrac{{}_5P_2}{2!} + \dfrac{{}_5P_3}{3!} + \dfrac{{}_5P_4}{4!} + \dfrac{{}_5P_5}{5!}$ 의 값을 구하라.

풀이 31

$\dfrac{{}_nP_r}{r!} = {}_nC_r$ 이므로

$$\frac{{}_5P_1}{1!} + \frac{{}_5P_2}{2!} + \frac{{}_5P_3}{3!} + \frac{{}_5P_4}{4!} + \frac{{}_5P_5}{5!} = {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$$

이 식에 ${}_5C_0$ 을 더하고 빼면

$$ {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 - {}_5C_0 = 2({}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2) - {}_5C_0 = 2(1+5+10) - 1 = (2\times 16) - 1 = 31 $$

A3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} {}_nC_k = 1024$ 일 때, n 의 값을 구하라.

Hint

조합의 성질

${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1}$

${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots = 2^{n-1}$

풀이 10

$\displaystyle\sum_{k=0}^{100} {}_nC_k = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots$ 을 짝수항과 홀수항으로 나누면

$$ {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots = ({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots) + ({}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots) $$

Hint 적용

$$ = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n $$

$2^n = 1024$ 이므로

$$2^n = 2^{10}$$

따라서 $n = 10$

A4. ${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2048$ 을 만족하는 자연수 n의 값을 구하라.

풀이 6

${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2048$이므로

$$2^{2n-1} = 2^{11}$$

$$2n - 1 = 11$$

$$2n = 12$$

따라서 $n = 6$

A5. $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{10}$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하라.

풀이 330

$(1+x)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수 ${}_3C_3$

$(1+x)^4$ 의 전개식에서 x^4 의 계수 ${}_4C_3$

$(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^5 의 계수 ${}_5C_3$

$$\vdots$$

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수 ${}_{10}C_3$

전체 x^3의 계수의 총합은

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3$$

이때 ${}_3C_3$을 ${}_4C_4$로 바꾸면

$${}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3$$

파스칼의 삼각형을 이용하여 정리하면

$${}_4C_4 + {}_4C_3 = {}_5C_4$$

$${}_5C_4 + {}_5C_3 = {}_6C_4$$

$$\vdots$$

$${}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 = {}_{11}C_4$$

따라서 ${}_{11}C_4 = 330$

Chapter 02 연습문제

2.1.1 합사건

B1. 학생 식당에 있는 학생 전체 40명에게 좋아하는 음식을 조사해 보았다. 피자와 자장면을 좋아하는 학생이 각각 28명, 16명이었다. 피자와 자장면을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하라.

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

풀이 ⑤

전체 학생의 수를 U, 피자를 좋아하는 사람을 A, 자장면을 좋아하는 사람을 B라고 하면

$$n(U)=40,\ n(A)=28,\ n(B)=16$$
$$n(A\cap B)\le n(A),\ n(A\cap B)\le n(B)$$

이므로

$$n(A\cap B)\le 16 \cdots ①$$

$n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$$
$$28+16-n(A\cap B)\le 40$$
$$4\le n(A\cap B)\cdots ②$$

식 ①과 식 ②를 합하면

$$4\le n(A\cap B)\le 16$$

따라서 최댓값 $M=16$, 최솟값 $m=4$이므로

$$M+m=20$$

B2. 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\cap B=\phi$, $n(A)=5$, $n(B)=4$, $n(C)=3$, $n(A\cup C)=7$, $n(B\cup C)=5$일 때, $n(A\cup B\cup C)$의 값을 구하라.

① 6 ② 7 ③ 9
④ 10 ⑤ 12

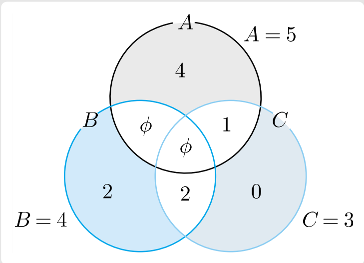
풀이 ③

$$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$$
$$7\ =\ 5\ +\ 3\ -n(A\cap C)$$

$n(A\cap C)=1$

$$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$$
$$5\ =\ 4\ +\ 3\ -n(B\cap C)$$

$n(B\cap C)=2$



$n(A\cup B\cup C)$

$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=5+4+3-0-2-1+0=9$$

B3. 대학생 50명에게 영어와 중국어 문제를 풀게 하였더니 영어 문제를 푼 학생은 25명, 중국어 문제를 푼 학생은 22명이었다. 영어와 중국어 문제를 모두 풀지 못한 학생이 8명일 때, 모두 푼 학생 수를 구하라.

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

풀이 ①

$$n(A\cup B)=U-(A\cup B)^c$$
$$=U-(A^c\cap B^c)$$
$$=50-8=42$$

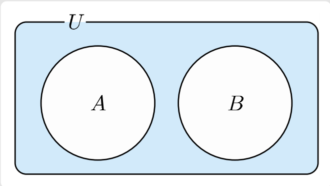
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=25+22-42$$
$$=5$$

B4. 전체 집합 U의 공집합이 아닌 두 유한집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$가 성립할 때, 다음 중 $A-B$와 같은 집합을 구하라.

① ϕ　② A　③ $A\cup B$
④ A^c　⑤ B^c

풀이 ②

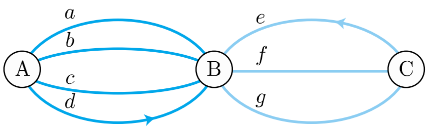
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=n(A)+n(B)-\phi$$



따라서 $A-B=A$

2.1.2 곱사건

B5. 다음 그림과 같은 도로망에서 도로 d와 e는 화살표 방향으로 일방통행만 되고 그 외의 도로는 양쪽 방향으로 통행이 된다고 한다. 이때 A지점에서 출발하여 B지점을 거쳐 C까지 갔다가 다시 B지점을 거쳐 A지점까지 되돌아오는 길의 가짓수를 구하라.



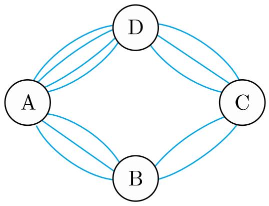
① 12　② 36　③ 64
④ 72　⑤ 144

풀이 ④

A → B경로는 4가지, B → C경로는 2가지
C → B경로는 3가지, B → A경로는 3가지

따라서 $4\times2\times3\times3=72$

B6. 다음 그림과 같이 도시 A, B, C, D가 연결되어 있다. A를 출발하여 모든 도시를 한 번씩만 거치고 다시 A로 돌아오는 방법의 수를 구하라.



① 14 ② 72 ③ 144
④ 216 ⑤ 228

풀이 ③

그림을 보면 A로 다시 돌아오는 방법은

i) $A \to B \to C \to D \to A$

$3 \times 2 \times 3 \times 4 = 72$

ii) $A \to D \to C \to B \to A$

$4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

따라서 $72 + 72 = 144$

B7. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이다.
함수 $f : A \to A$에서 A의 임의의 원소 a에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수 f를 구하라.

(a) $f(a) \geq a$는 몇 개인지 구하라.

① 30개 ② 40개 ③ 90개
④ 120개 ⑤ 150개

(b) $a + f(a)$가 홀수를 만족하는 것은 몇 개인지 구하라.

① 24개 ② 36개 ③ 48개
④ 64개 ⑤ 72개

풀이 (a) ④, (b) ⑤

(a) $f(1) = 1, 2, 3, 4, 5$가 될 수 있으므로 5개

$f(2) = 2, 3, 4, 5$가 될 수 있으므로 4개

$f(3) = 3, 4, 5$가 될 수 있으므로 3개

$f(4) = 4, 5$가 될 수 있으므로 2개

$f(5) = 5$가 될 수 있으므로 1개

따라서 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(b) i) a가 홀수일 때 $a + f(a) =$홀수

$f(a) =$ 홀수 $- a =$짝수

ii) a가 짝수일 때 $a + f(a) =$홀수

$f(a) =$ 홀수 $- a =$홀수

즉, f(홀수) = 짝수, f(짝수) = 홀수이므로

$$\begin{array}{cccccc} a : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2\text{개} & 3\text{개} & 2\text{개} & 3\text{개} & 2\text{개} \end{array}$$

따라서 $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$

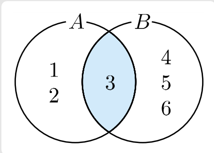
2.1.3 여사건

B8. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 $(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$를 만족하는 X의 개수를 구하라.

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

풀이 ④

$A\cap B=\{3\}$이므로 원소 3은 집합 X에 반드시 포함되어야 한다.



따라서 $2^{6-1}=2^5=32$

B9. 전체 집합 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 $\{c,\ d,\ e\}\cap X\neq\phi$을 만족하는 U의 부분집합 X의 개수를 구하라.

① 4 ② 8 ③ 16
④ 28 ⑤ 32

풀이 ④

X는 $c,\ d,\ e$중 적어도 하나의 원소를 가져야 한다. 적어도 문제이므로 여사건으로 접근한다.

$\{c,\ d,\ e\}$를 원소로 가지지 않는 집합의 개수는

$$2^{5-3}=4$$

전체 부분집합의 수에서 $\{c,\ d,\ e\}$를 원소로 가지지 않는 집합의 수를 뺀다.

따라서 $2^5-4=32-4=28$

2.2.1 순열

B10. ${}_nP_2+4{}_nP_1=28$을 만족하는 n의 값을 구하라.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

풀이 ③

${}_nP_2$가 존재하므로 $n\geq 2$이다.

$$n(n-1)+4n=28$$
$$n^2+3n-28=0$$
$$(n+7)(n-4)=0$$
$$n=-7,\ 4$$

따라서 $n=4$

B11. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 네 숫자를 이용하여 네 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하라.

① 60 ② 420 ③ 450
④ 480 ⑤ 510

풀이 ②
자릿수가 짝수이려면 일의 자리가 짝수여야 한다.

$\square\square\square\,0$ 의 꼴 $\rightarrow$ ${}_6P_3$

맨 앞 자리에 0이 오는 것을 제외해야 하므로

$\square\square\square\,2$ 의 꼴 $\rightarrow$ $5\times{}_5P_2$
$\square\square\square\,4$ 의 꼴 $\rightarrow$ $5\times{}_5P_2$
$\square\square\square\,6$ 의 꼴 $\rightarrow$ $5\times{}_5P_2$

따라서 ${}_6P_3+3\times(5\times{}_5P_2)=420$

B12. 0, 1, 2, 3, 4중에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리 정수를 만들 때, 3의 배수의 개수를 구하라.

① 15 ② 17 ③ 20 ④ 24 ⑤ 27

풀이 ③
3의 배수이려면 각 자리 수의 합이 3의 배수여야 한다. 만들 수 있는 세 자리를 나타내면

$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 2),\ \mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$
$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 3),\ \mathrm{D}(2,\ 3,\ 4)$

A, B 경우에는 ${}_3P_3-{}_2P_2=4$
C, D 경우에는 ${}_3P_3=3!=6$

따라서 $(4\times2)+(6\times2)=20$

2.2.2 중복순열

B13. 두 개의 숫자 1, 2로 중복을 허락하여 만들 수 있는 정수를 K라 할 때, $99<K<10000$을 만족하는 K의 개수를 구하라.

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 64

풀이 ③
$99<K<10000$을 만족하는 K는 세 자리 또는 네 자리 정수이다.

i) K가 세 자리 정수인 경우 1, 2를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 정수 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

ii) K가 네 자리 정수인 경우 1, 2를 사용하여 만들 수 있는 네 자리 정수 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

따라서 $8+16=24$

B14. 기호 '∘'와 '—'를 1개 이상, 4개 이하로 사용하여 만들 수 있는 신호의 가짓수를 구하라.

① 16 ② 22 ③ 30
④ 36 ⑤ 42

풀이 ③

1개를 사용하여 만들 수 있는 신호는

$${}_2\Pi_1 = 2^1$$

2개를 사용하여 만들 수 있는 신호는

$${}_2\Pi_2 = 2^2$$

3개를 사용하여 만들 수 있는 신호는

$${}_2\Pi_3 = 2^3$$

4개를 사용하여 만들 수 있는 신호는

$${}_2\Pi_4 = 2^4$$

따라서 $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

B15. 기호 '∘'와 '—'를 배열하여 전신부호를 만들려고 한다. 100가지 부호를 만들려면 이 기호를 몇 개까지 써야 되는지 구하라.

① 6개 ② 7개 ③ 8개
④ 9개 ⑤ 10개

풀이 ①

기호를 사용하는 갯수에 따라 만들 수 있는 부호의 갯수를 더하면

$$\begin{aligned} &{}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + \cdots + {}_2\Pi_n \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2-1} \geq 100 \end{aligned}$$

$$2^n - 1 \geq 50,\ 2^n \geq 51,\ n \geq 6$$

따라서 6개까지 써야 한다.

2.2.3 같은 것이 있는 순열

B16. 남학생 6명과 여학생 5명의 모임에서 대표 4명을 선출할 때, 적어도 여학생 한명을 포함하는 방법의 수를 구하라.

① 195 ② 220 ③ 280
④ 315 ⑤ 330

풀이 ④

전체 11명의 학생에서 대표 4명을 선출하는 경우에서 남학생에서만 4명을 선출하는 경우를 제한다.

$$\begin{aligned} {}_{11}C_4 - {}_6C_4 &= \frac{11!}{4! \times 7!} - \frac{6!}{4! \times 2!} \\ &= 330 - 15 = 315 \end{aligned}$$

B17. 다섯 개의 문자 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 일렬로 나열할 때, a_2는 a_1의 오른쪽에, a_3는 a_2의 오른쪽에, b_1는 b_2의 왼쪽에 놓이도록 나열하는 방법의 수를 구하라.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

풀이 ②

a_1, a_2, a_3는 왼쪽부터 차례로 a_1, a_2, a_3이고, b_1, b_2는 왼쪽부터 차례로 b_1, b_2이다.

3개의 a와 2개의 b를 $a\,a\,a\,b\,b$로 일렬로 나열한 후 왼쪽부터 차례로 a의 각 문자를 a_1, a_2, a_3로, b의 각 문자를 b_1, b_2로 쓴다.

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

B18. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 $f(1) + f(2) + f(3) = 14$를 만족하는 함수 f의 개수를 구하라.

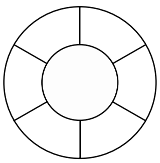
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이 ①

B의 원소가 $\{4, 5\}$이므로 세 함숫값의 합이 14가 되기 위해서는 4가 1번, 5가 2번 나와야 한다. $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 집합이 $\{4, 5, 5\}$이어야 하므로 $\dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$

2.2.4 원순열

B19. 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 큰 원 내부의 7칸을 칠하는 방법의 수를 구하라.



① 210 ② 420 ③ 840
④ 1280 ⑤ 1680

풀이 ③

가운데 원을 색칠하는 방법은 7가지이고,
나머지 6가지의 색을 6등분 칸에 칠하는 방법은 원순열이므로 $(6-1)!$이다.

따라서 $7 \times (6-1)! = 7 \times 5! = 840$

B20. 사람 8명이 원탁에 둘러앉을 때, 특정한 3명이 이웃하여 앉는 방법의 수를 구하라.

① 720　② 480　③ 360
④ 240　⑤ 120

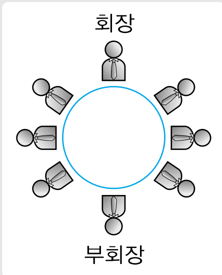
풀이 ①
특정한 세 명을 묶으면 $(6-1)!$

특정한 3명 자리를 변경할 경우는 ${}_3P_3=3!$이므로 $(6-1)!\times{}_3P_3=5!\times3!=720$

B21. 회장과 부회장을 포함한 8명의 임원이 원형 탁자에 둘러앉아 회의를 할 때, 회장 맞은편에 부회장이 앉는 방법의 수를 구하라.

① 1080　② 8160　③ 5040
④ 1440　⑤ 720

풀이 ⑤

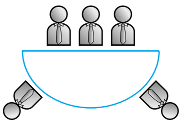


맞은편에 앉은 회장, 부회장을 한 사람으로 보고 7명을 원형으로 배열한다.

따라서 $(7-1)!=6!=720$

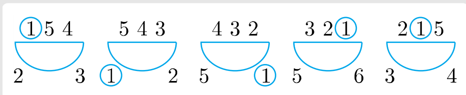
2.2.5 대칭순열

B22. 그림과 같은 반달 모양의 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하라.



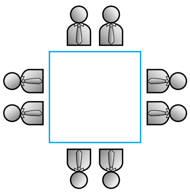
① $5!$　② $5!\times2$　③ $4!$
④ $4!\times3$　⑤ $4!\times5$

풀이 ⑤
5명을 원탁에 배열하는 수는 $(5-1)!=4!$



이때 주어진 모양의 테이블에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 5가지씩 존재하므로 $4!\times5$

B23. 다음 그림과 같이 8명을 정사각형 모양의 탁자에 앉히는 방법의 수를 구하라.



① 60 ② 120 ③ 720
④ 5040 ⑤ 10080

풀이 ⑤
그림을 보면 대칭되는 영역이 4개 있으므로

$$(8-1)! \times \frac{8}{4} = 7! \times 2$$
$$= 5040 \times 2 = 10080$$

2.3.1 조합

B24. ${}_{n+1}C_{n-2} + {}_{n+1}C_{n-1} = 35$를 만족하는 n의 값을 구하라.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

풀이 ④
${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$을 이용하여 식을 정리하면

$${}_{n+1}C_3 + {}_{n+1}C_2 = 35$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{(n+1)n}{2 \times 1} = 35$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = 35$$
$$\frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{n-1}{3} + 1\right) = 35$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 35$$
$$n(n+1)(n+2) = 6 \times 35 = 6 \times 5 \times 7$$
$$= 5 \times 6 \times 7$$

따라서 $n=5$

B25. 학생 10명에서 5명을 뽑아 일렬로 세우려고 할 때, 학생 A와 B가 모두 뽑혀 인접해 있는 경우의 수를 구하라.

① 1344 ② 1855 ③ 2688
④ 3244 ⑤ 5376

풀이 ③
학생 A와 B는 이미 뽑혔다고 생각하고 8명 중에서 3명을 뽑으면 ${}_8C_3$
뽑은 5명 중에서 A와 B는 인접해 있으므로 하나로 묶어서 일렬로 배열하면 $4!$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로

$${}_8C_3 \times 4! \times 2 = 56 \times 24 \times 2 = 2688$$

2.3.2 중복조합

B26. 토마토 12개를 3접시에 나눠 담아서 갑, 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수를 구하라.

① 182 ② 364 ③ 546
④ 628 ⑤ 720

풀이 ③

토마토는 구별을 할 수 없으므로 중복조합을 이용하면

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2$$

세 사람에게 분배하므로 구하는 확률은

$${}_{14}C_2 \times 3! = 546$$

2.3.3 분할과 분배

B27. 10명을 3명, 3명, 4명의 세 모임으로 나누는 방법의 수는 몇 가지인지 구하라.

① 2000 ② 2050 ③ 2100
④ 2150 ⑤ 2200

풀이 ③

두 조의 인원이 같으므로

$${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!}$$

$$= 120 \times 35 \times \frac{1}{2} = 2100$$

2.4 이항정리

B28. $\left(x - \frac{a}{x}\right)^7$ 의 전개식에서 x^3의 계수가 84일 때, a^2의 값을 구하라.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 ④

$$\begin{aligned} {}_7C_r x^{7-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r &= (-a)^r {}_7C_r x^{7-r} x^{-r} \\ &= (-a)^r {}_7C_r x^{7-2r} \end{aligned}$$

$$7 - 2r = 3\,,\ \ r = 2$$

$$(-a)^2 {}_7C_2 = a^2 \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 84$$

따라서 $a^2 = 4$

B29. $x\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^7의 계수가 240일 때, 양수 a의 값을 구하라.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 ④

$x\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^7의 계수는

$\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^6을 구하면 된다.

$$_6C_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r = {_6C_r}(-a)^r x^{12-3r}$$

x^6의 계수를 구해야 하므로

$$12-3r=6,\quad r=2$$

계수 부분인 $_6C_r(-a)^r$에 $r=2$를 대입하면

$$240={_6C_2}(-a)^2$$

$$15a^2=240,\ a^2=16,\ a=\pm 4$$

a는 양수이므로 $a=4$

B30. $(1+i)^{16}$의 전개식을 이용하여 $_{16}C_0-{_{16}C_2}+{_{16}C_4}-{_{16}C_6}+\cdots-{_{16}C_{14}}+{_{16}C_{16}}$ 의 값을 구하라.

(단, i는 허수)

Hint

복소수 성질

$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$

$i+i^2+i^3+i^4=0$

풀이 256

$$(1+i)^{16}={_{16}C_0}i^0+{_{16}C_1}i^1+{_{16}C_2}i^2+{_{16}C_3}i^3+{_{16}C_4}i^4+\cdots+{_{16}C_{16}}i^{16}$$

(좌변) $\{(1+i)^2\}^8=(1+2i-1)^8=(2i)^8$

Hint 적용

$$=2^8 i^8=256(i^2)^4=256$$

(우변) $_{16}C_0+\cancel{_{16}C_1 i}-{_{16}C_2}-\cancel{_{16}C_3 i}+{_{16}C_4}$
$+{_{16}C_5}i-{_{16}C_6}-{_{16}C_7}i+{_{16}C_8}$
$+{_{16}C_9}i-{_{16}C_{10}}-{_{16}C_{11}}i+{_{16}C_{12}}$
$+\cancel{_{16}C_{13}i}-{_{16}C_{14}}-\cancel{_{16}C_{15}i}+{_{16}C_{16}}$

$$={_{16}C_0}-{_{16}C_2}+{_{16}C_4}-{_{16}C_6}+\cdots-{_{16}C_{14}}+{_{16}C_{16}}$$

$$=256$$