CHAPTER

05

정상전류와 전도성 물질

Steady Currents and Conductive Materials

목차

학습목표

- 전류의 정의를 설명하고 다양한 형태의 전류(선전류, 표면전류, 부피전류)를 구분할 수 있다.
- 연속방정식과 전하보존 법칙을 이해한다.
- 전도성 물질의 특성을 이해하고 전도성 물질 속에서의 전하의 움직임을 설명할 수 있다.
- 옴의 법칙, 줄의 법칙, 완화시간의 의미를 설명할 수 있다.
- 두 매질의 경계면에서 정상전류에 대해 성립하는 경계조건을 이해하고, 이를 적용하여 문제를 풀 수 있다.
- 저항과 컨덕턴스의 정의를 이해하고, 다양한 구조에 대해 저항을 계산할 수 있다.
- 커패시턴스와 저항 사이의 관계식을 이해한다.

5.1 개요

앞의 4장에서는 전하가 정지해 있는 정전기 문제를 살펴보았다. 5장에서는 전하가 움직여 전류가 흐르는 경우를 포함하는 문제를 다루기로 한다. 특히 전도성 물질conductive material이나 저항성 물질resistive material의 양끝에 일정한 전압을 걸어주는 경우에 발생하는 정상전류[1] steady current를 중점적으로 다룬다. 3장에서는 전도율이 0인 완전유전체를 공부했는데, 여기서는 유한한 값의 전도율을 가진 유전체를 다룬다.

먼저, 전류의 정의를 살펴본다. 그 다음에는 연속방정식, 옴의 법칙, 줄의 법칙, 완화시간을 비롯하여 몇 가지 일반적인 관계식에 대해 알아본다. 이 관계식은 시간에 따라 전류가 변하는 일반적인 경우는 물론, 정상전류가 흐르는 특수한 경우에도 적용할 수 있다. 마지막에는 정상전류인 경우에 충족해야 할 새로운 경계조건인 부피전하밀도의 수직성분의 연속을 다룬다.

5.2 전류 (Electric Current)

전하가 어떤 도체 속을 움직이고 있다. 그 도체 속에서 어떤 면적 S를 임의로 잡은 다음, 그 면적을 통과하는 전하를 측정했더니 $Q(t)$였다. 그러면 이 면적을 통해 흐르는 전류 $I(t)$는 다음 식으로 정의된다.

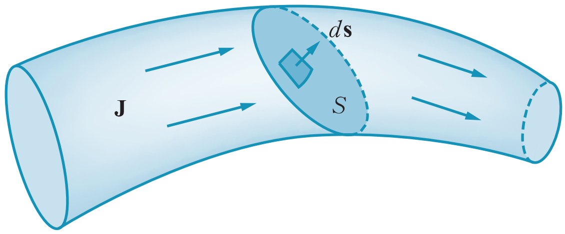
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \tag{5.1}$$

전류의 단위는 암페어(A)로 프랑스의 과학자인 앙페르A. M. Ampère의 이름에서 따온 것이다. 암페어는 쿨롱/초coulomb/second와 같다. 따라서 전류는 전하가 단면 S를 얼마나 빠르게, 또는 얼마나 많이 통과하는지 나타내는 기준이다.

부피전류밀도

[그림 5-1]과 같이 전하가 어떤 부피 속을 통과하고 있다. 부피 내의 한 점에서 부피전류밀도 $\mathbf{J}$를 정의하기 위해 전류가 흐르는 방향에 수직인 작은 면적 ds를 만든다. 그 면적을 통해 흐르는 전류가 dI라고 하면 벡터 $\mathbf{J}$의 크기를 식 (5.2)로 나타낼 수 있다.

1 [옮긴이] 여기서 정상(定常, steady)은 사전적으로 '시간에 따른 변화 없이 늘 한결같음'의 뜻을 가진 단어로 normal/abnormal의 정상/비정상(正常/非正常)과는 의미가 조금 다르다. 정상전류는 시간에 따라 크기가 변하지 않으며 전하가 어느 곳에서도 멈춰 쌓이지 않는 연속적인 전하의 흐름이다. 따라서 도선에 정상전류가 흐르면 전류의 크기는 도선의 어느 곳에서나 똑같아지므로 정상전류는 결국 직류전류(dc current)이다. 정상전류에 대한 자세한 설명은 '기초 전자기학(원서 : *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Ed.), Griffiths 저, 김진승 역, 223쪽(원서는 215쪽)'을 참조하기 바란다.



[그림 5-1] 임의의 면적을 통과해 흐르는 부피전하

$$J = \frac{dI}{ds} \ [\mathrm{A/m^2}] \tag{5.2}$$

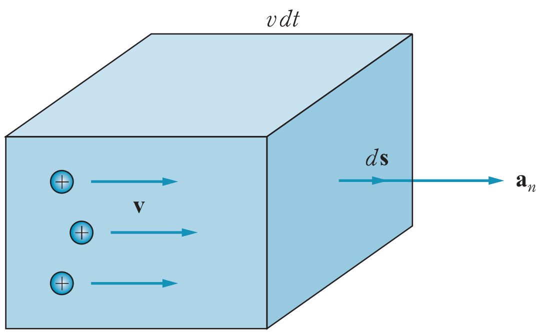
벡터 $\mathbf{J}$는 크기가 J이고 방향은 $(+)$전하가 이동하는 방향, 즉 전류가 흐르는 방향과 같다. 전류가 미소면적 $d\mathbf{s}$를 언제나 수직으로 통과하는 것은 아니므로 이 미소면적을 통과하는 전류는 다음 식으로 주어진다.

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

따라서 면적 S를 통해 흐르는 총 전류는 다음과 같다.

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{5.3}$$

이번에는 전하가 일정한 유동속도[drift velocity] $\mathbf{v}$로 움직이는 경우를 다뤄보자([그림 5-2] 참조).



[그림 5-2] 유동속도

먼저 직사각형 모양의 부피$(ds\,v\,dt)$를 만드는데, 이때 전류가 부피 표면의 면적 ds를 수직으로 통과하게 만든다. 시간 dt 동안 부피 속의 모든 전하는 면적 ds를 통해 빠져나간다. 단위부피당 전하의 개수를 N이라고 하고, 각 전하의 전하량을 q라고 하자. 그러면 면적 $d\mathbf{s}$를 통해 흐르는 전류는

$$dI = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Nq(ds\,v\,dt)}{dt} = Nq\,ds\,v$$

가 된다. 여기서 $v = |\mathbf{v}|$이다. 따라서 전류밀도는 다음과 같다.

$$J = \frac{dI}{ds} = Nqv$$

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} = \rho_v \mathbf{v}$$

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}} \tag{5.4}$$

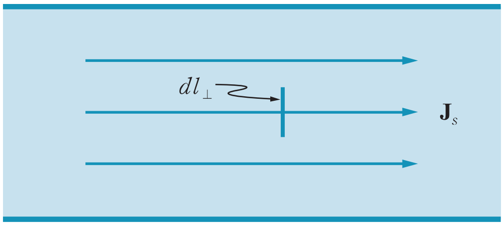
전류를 만드는 전하의 유형에는 여러 가지가 있는데, 가장 일반적인 형태의 수식으로 나타내면

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i = \sum_i \rho_{vi} \mathbf{v}_i$$

가 된다. 여기서 N_i, q_i, $\mathbf{v}_i$, ρ_{vi}는 여러 유형의 전하 중 특정 전하의 단위부피당 전하의 개수, 각 전하의 전하량, 속도, 부피전하밀도를 의미한다.

표면전류밀도

표면전류는 어떤 표면 위에 있는, 두께가 0인 층에 흐르는 전류이다([그림 5-3] 참조).



[그림 5-3] 표면전류밀도 $\mathbf{J}_s$

어떤 한 점에서 표면전류밀도surface current density $\mathbf{J}_s$를 정의하기 위해 먼저 미소선분 $dl_{\perp}$을 만든다. $\perp$ 표시는 선분의 방향이 전류가 흐르는 방향과 직각임을 나타낸다. 그러면 표면전류밀도 벡터는

$$\boxed{J_s = \frac{dI}{dl_{\perp}} \quad [\mathrm{A/m}]} \tag{5.5}$$

가 된다. 여기서 벡터 $\mathbf{J}_s$는 크기가 J_s이고 전류가 흐르는 방향을 향한다. 여기서 주의할 것은 부피전류밀도의 단위는 $\mathrm{A/m^2}$인 반면 표면전류밀도의 단위는 $\mathrm{A/m}$라는 사실이다. [그림 5-3]

과 같은 표면의 전체 폭을 통해 흐르는 총 전류는 다음과 같다.

$$I = \int J_s \, dl_{\perp} \tag{5.6}$$

선전류

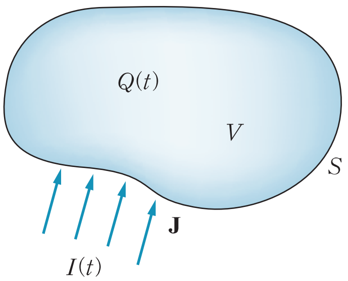
선전류line current는 단면적이 0인 무한히 가는 선을 통해 흐르는 전류로, 어떤 한 점의 선전류 I는 그 점을 통과하는 전하의 총 개수를 헤아리면 된다. 따라서

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

가 된다. 여기서 전류벡터 $\mathbf{I}$는 크기가 I이고 전류가 흐르는 방향을 향한다.

5.3 연속방정식(Equation of Continuity)

전하가 움직이면 전류가 발생한다. 따라서 전하량과 전류는 서로 연관되어 있다. [그림 5-4]에 나타낸 곡면 S로 둘러싸인 임의의 부피 V를 이용하여 이 두 양quantity 사이의 기본 관계를 살펴보자. 이 닫힌곡면을 통해 전류 $I(t)$가 안으로 흘러 들어오면 전하 $Q(t)$가 부피 속에 쌓이게 된다.



[그림 5-4] 연속방정식 : 전하량 보존법칙

부피 V 속으로 흘러 들어오는 총 전류는

$$I(t) = -\oint\!\!\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv \qquad : \text{발산 정리 적용}$$

$$= \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho_v \, dv = \iiint_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \qquad : \text{적분의 도함수에 대한 라이프니츠 규칙 적용}$$

와 같다. 이 관계식은 다음과 같이 부피 V 내에서 전하가 보존된다는 것을 뜻한다.

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv = \iiint_V -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

적분식의 V는 어떤 부피이든 가능하므로 결국 다음과 같이 피적분함수끼리 서로 같아야 한다.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{5.7}$$

식 (5.7)을 **연속방정식**equation of continuity이라고 한다. 이 식은 전류밀도와 전하밀도 사이의 기본 관계를 나타낸다. 이 식은 8장에서 다루는 시변장time-varying field에서 중요한 역할을 한다.

정상상태steady state(전하와 전류가 시간에 따라 변하지 않는 경우)에서는 식 (5.7)이 다음과 같이 간단해진다.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad : \text{정상전류인 경우} \tag{5.8}$$

5.4 옴의 법칙과 전도성 물질

옴의 법칙 Ohm's law을 다음과 같이 전자기 형식으로 표시하면, 전도성 물질 속에서 흐르는 부피 전류밀도 $\mathbf{J}$와 전기장 $\mathbf{E}$는 서로 비례함을 알 수 있다.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{5.9}$$

여기서 σ는 물질의 **전도율**conductivity이다. 전도율의 단위는 지멘스/미터Siemens/m이며, S/m로 쓴다. 다양한 물질의 전도율을 [표 5-1]에 정리했다. 이 표에는 특성이 좋은 도체와 절연체의 전도율이 함께 들어 있다. 가장 좋은 도체 세 가지를 순서대로 나열하면 은, 구리, 금이다.

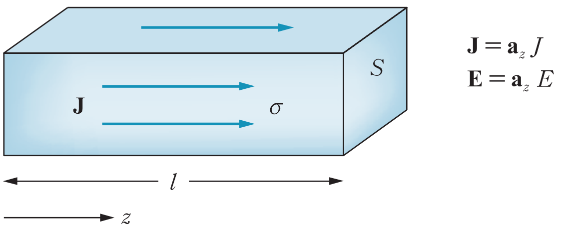
- 은 : 가장 뛰어난 특성을 갖고 있지만 가격이 비싸고 쉽게 녹이 슨다. 녹이 슬면 전도율이 떨어진다. 다른 물질에 은 도금을 해서 전도율을 높이는 경우도 많다.
- 구리 : 은이나 금에 비해 값이 싸므로 많은 양이 필요한 경우에 선택한다.
- 금 : 초소형 전자부품에 많이 사용되며, 세 도체 중에서 부식에 가장 강하다.

끝으로, 가장 좋은 절연체 두 가지를 순서대로 나열하면 석영유리, 고무이다.

[표 5-1] 물질의 전도율

물질	전도율(S/m)	물질	전도율(S/m)
은(Silver)	6.2×10^{7}	실리콘(Silicon)	4.4×10^{-4}
구리(Copper)	5.8×10^{7}	증류수(Distilled Water)	10^{-4}
금(Gold)	4.1×10^{7}	마른 땅(Dry Earth)	10^{-5}
알루미늄(Aluminum)	3.5×10^{7}	유리(Glass)	10^{-12}
황동(Brass)	1.6×10^{7}	고무(Rubber)	10^{-15}
철(Iron)	10^{7}	석영유리(Fused Quartz)	10^{-17}
바닷물(Sea Water)	4		

식 (5.9)가 회로이론에서 주로 사용하는 식과 같은지 확인해보자. 먼저 [그림 5-5]와 같은 직사각형 도체를 생각해보자.



[그림 5-5] 저항성(전도성) 물질 속을 흐르는 균일전류

$\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$, σ는 도체 전체 영역에서 균일하다고 가정한다. 식 (5.9)의 양변에 단면적 S를 각각 곱하면

$$JS = \sigma ES = \frac{\sigma S}{l}(El)$$

이 된다. $I = JS$, $V = El$이므로

$$I = \frac{\sigma S}{l} V$$

가 되어, 마침내

$$V = \frac{l}{\sigma S} I$$

로 표시되는 V와 I 사이의 선형 관계식을 얻을 수 있다. 이 식에 들어있는 $\frac{l}{\sigma S}$을 **저항**resistance R이라고 한다. 이렇게 해서 익숙한 형태의 수식인

$$V = IR \tag{5.10}$$

을 얻을 수 있다. 다음과 같은 저항의 표시식

$$R = \frac{V}{I} = \frac{l}{\sigma S} \tag{5.11}$$

은 길이 l, 단면 S인 모양을 가진 균질한 homogeneous 저항성 물질의 저항을 구하는 데 적용할 수 있다. 전도율의 역수인 $\frac{1}{\sigma}$을 **저항률** resistivity 이라고 한다.

$\mathbf{J}$가 $\mathbf{E}$에 비례하는 까닭은 무엇일까? 전자는 전기장 $\mathbf{E}$에 의해 계속해서 가속되는데, 왜 $\mathbf{J}$는 계속해서 커지지 않는 것일까? 이 물음에 대답할 수 있으려면 먼저 도체 속에서 전류가 흐르는 과정을 이해해야 한다. 지금부터 이것을 설명하기로 한다.

외부 전기장이 걸려있지 않은 경우, 상온에서 전도전자 conduction electron 는 약 $10^6\,[\mathrm{m/s}]$의 속력으로 도체의 격자구조 lattice structure 사이를 이동한다. 이동 방향은 전자마다 제멋대로이므로 평균속도 벡터는 0이 되어 알짜전류가 없다($\mathbf{J}=0$). 이제 도체의 양끝에 전압을 걸어주면 도체 내부에 전기장 $\mathbf{E}$가 발생한다. 그러면 $-e$의 전하량을 갖는 전도전자 q는 $q\mathbf{E} = -e\mathbf{E}$만큼의 힘을 받아 가속되므로 $\mathbf{E}$와 같은 방향으로 전류 $\mathbf{J}$가 발생한다. 그렇지만 전자가 가속되는 시간은 $10^{-14}\,[\mathrm{s}]$ 정도로 아주 짧다. 따라서 전자는 $10^{-8}\,[\mathrm{m}]$ 정도의 아주 짧은 거리만큼 진행한 다음에는 격자구조와 충돌하여 아무 방향으로나 흩어져버린다. $\mathbf{E}$ 방향으로 흐르는 전류 $\mathbf{J}$를 생기게 하는 것은 충돌하기 전까지의 전자의 이동이다. 충돌이 일어나자마자 전자는 제멋대로 흩어져 움직이므로 이들 전자의 움직임을 평균하면 0이 되어 $\mathbf{E}$ 방향으로 향하는 전류 $\mathbf{J}$는 생기지 않는다. 말하자면 충돌 후 발생하는 전자의 움직임은 전류의 발생에 기여하지 못하는 헛수고인 셈이다. 이러한 과정은 계속해서 되풀이된다. 전자는 충돌 전까지는 가속되어 $\mathbf{J}$의 발생에 기여하다가 충돌과 동시에 더 이상 기여하지 못하게 된다. 그렇지만 평균 유동속도는 $\mathbf{J}$가 발생하는 데 기여한다. 유동속도는 간단히 말해 한번 충돌하고 나서 다음 번 충돌이 일어나기 전까지의 짧은 시간 동안 가속되는 전하의 평균속도이다. 유동속도는 $10^{-4}\,[\mathrm{m/s}]$ 정도로 아주 느리다.

이렇게 전자는 임의의 방향으로 매우 빠르게($10^6\,[\mathrm{m/s}]$) 움직이지만, 이 빠른 움직임을 모두 합성하면 매우 느린 유동속도($10^{-4}\,[\mathrm{m/s}]$)가 되며, 바로 이것이 $\mathbf{E}$ 방향으로 전류 $\mathbf{J}$를 발생시킨다. 전압을 두 배로 높이면 충돌 사이의 시간(즉 가속 시간)은 변함이 없고 가속력 $q\mathbf{E}$가 두 배가 되므로 평균 유동속도도 두 배가 된다. 이러한 선형 관계를 가지므로 식 (5.9)와 같이 $\mathbf{J}$는 $\mathbf{E}$에 비례한다. 이때 비례상수 σ를 전도율이라고 한다.

여기서 강조할 것은 일반적으로 도체는 전기적으로 중성이라는 사실이다. 움직이는 (−)전하는 (+)전하를 지니고 있는 움직이지 않는 격자구조 사이를 이동한다. 어떤 전도성 또는 저항성

물질이 전도율 σ가 일정한 선형 균질 물질이라면 그 물질 내부에는 전하가 존재하지 않는다($\rho_v = 0$). 이것은 선형 균질 유전체의 경우에 $\rho_{pv} = 0$인 것과 비슷하다. 표면전하는 일반적으로 경계면에 쌓인다. 비균질 도체인 경우에는 부피전하밀도가 존재할 수도 있다($\rho_v \neq 0$).

5.5 옴과 옴의 법칙의 발견

Georg Simon Ohm

1827년은 옴Georg Simon Ohm, 1789~1854에게 아주 대단한 해였다. 그는 저항성 회로에 대한 광범위한 내용을 담은 책을 출간했다. 그는 그 주제를 철저하게 연구했고, 신중하고 빈틈없이 실험을 수행하여 자신의 이론을 확인했다. 당시 그의 나이는 마흔에 가까웠다. 만약 그가 주위로부터 자신의 업적에 대해 합당한 인정을 받았다면, 이를 발판으로 오랫동안 꿈꿔왔던 대학교수가 될 수도 있었을 것이다.

그는 자신의 책 「갈바니 회로의 수학적 연구The Galvanic Circuit Mathematically Investigated」에서 그 주제를 거의 완벽하게 조사했다. 그는 전압이 V인 배터리와 단면이 균일한 도체로 이루어진 간단한 루프 회로에서 도선에 흐르는 전류는 도선 전체에 걸쳐 균일하다는 사실을 밝혀냈다. 그 덕분에 현재 우리가 회로의 특성을 단일 전류 I로 나타낼 수 있는 것이다. 또한 그는 배터리로부터 도선wire을 따라 멀어지면 전압이 일정한 비율로 떨어진다는 사실을 실제로 증명했다. 오늘날에는 너무나 당연한 사실들이지만, 그 당시에는 옴이 발견하기 전까지는 아무도 몰랐던 내용이었다.

그러고 나서 그는 다음과 같은 전압과 전류 사이의 선형 관계를 입증했다.

$$V = IR \tag{5.10}$$

여기서 R은 회로의 저항으로, 다음과 같이 도선의 길이 l에 비례하고 도선의 단면적 S에 반비례한다.

$$R = \frac{kl}{S} = \frac{l}{\sigma S} \tag{5.11}$$

여기서 상수 k는 저항률이다. 저항률은 전도율의 역수로, 도선을 이루는 물질의 종류에 따라 달라진다. 옴은 다양한 금속의 상대 전도율을 구했는데, 그 크기는 [표 5-1]에 정리된 것과 같았다. 옴의 실험은 아주 정교하고 믿을 만했다. 그는 1821년에 발명된 제벡 열전 배터리Seebeck thermoelectric battery를 사용했는데, 그 이유는 이 배터리의 내부 저항을 예측하는 것이 가능했기

때문이었다. 전류와 그 전류에 의한 자기장을 측정하기 위해 그는 비틀림저울 나침반 바늘 검류계torsion balance compass needle galvanometer를 사용했다. 이 검류계는 자극magnetic pole에 대한 역제곱 법칙을 측정하기 위해 자신이 고안한 것이었다.

저항성 회로와 열흐름heat flow은 서로 간에 분명한 유사성을 가지고 있었다. 도선 속을 흐르는 열량은 도선 양끝 사이의 온도차에 비례하고, 열저항thermal resistance에 반비례했다. 또한 열저항은 도선의 길이에 비례하고, 도선의 단면적에 반비례했다. 옴은 푸리에Fourier가 쓴 「열의 해석적 연구Analytical Study of Heat」를 읽고 전류의 흐름이 열흐름과 유사하다는 점을 꿰뚫어 보았다. 전압, 전류, 전기 저항은 각각 온도차, 열흐름, 열저항과 닮아 있었다.

우리에게 익숙한 저항의 직렬연결, 병렬연결에 대한 규칙은 옴의 법칙에 따라 그렇게 된 것이다. 예를 들어 똑같은 도선 두 개를 직렬로 연결하면 도선 전체의 길이 l이 두 배가 되므로 저항도 두 배가 된다. 반면 도선 두 개를 병렬로 연결하면 단면적 S가 두 배가 되므로 저항은 절반이 된다.

옴은 1789년 독일의 에를랑겐Erlangen에서 자물쇠 제조공의 아들로 태어났다. 옴과 동생 마틴Martin은 좋은 교육을 받았다. 옴은 1811년 에를랑겐 대학에서 박사학위를 받았다. 이후 그는 몇 군데의 중학교에서 교사직을 얻어 학생들을 가르쳤고, 나중에는 쾰른Cologne에 정착하여 그곳에서 9년 동안 가르쳤다. 옴은 대부분의 기초 연구를 쾰른에서 수행했다. 그는 중학교에서 부과된 과중한 강의업무에도 불구하고 수학과 과학을 독학으로 공부하여 전류실험기술 분야의 전문가가 되었다. 그는 매우 진지하고 유능하며 혁신적인 교사였다.

19세기 초반은 전기과학에서 큰 발전이 이루어진 시기였다. 1800년에 볼타Alessandro Volta는 일정한 전류를 공급하는 전원인 볼타전지voltaic cell를 발명했다. 이 전지는 라이덴 병Leyden jar보다 전원으로 사용하기에 훨씬 적합했다. 볼타전지는 연구를 촉진시키는 데 큰 역할을 했다. 1820년에 에르스텟Oersted은 전류에 의한 자기장을 극적으로 발견했다(6장 참조). 이로부터 채 1년이 지나지 않아 이 발견은 자기장을 구하여 전류를 측정하는 방법에 적용되었다. 이렇게 해서 나침반 바늘이 돌아간 각도에 따라 전류를 측정할 수 있었다. 이런 방법으로 볼타와 에르스텟은 정상전류를 공급하고 이를 측정하는 방법을 제시했는데, 그 덕분에 옴은 자신의 실험을 수행할 수 있었다.

불행하게도 옴의 책은 독일에서 좋은 평가를 받지 못했다. 실제로 그의 이론은 대부분 받아들여지지 않았는데, 그 이유는 그의 이론이 일부 사람들에게는 너무 복잡했고 또 다른 사람들에게는 너무 간단했기 때문이었다. 전반적으로 그의 연구에 대한 반응은 매우 부정적이었다. 쾰른에서 더 이상 교사직을 수행할 수 없음을 느낀 옴은 베를린으로 옮겨 사관학교에서 학생들을 가르쳤다.

이후 다른 나라의 과학자들이 서서히 그의 연구를 인정하기 시작하고, 그 성과에 합당한 존경을 보내기 시작했다. 그는 1841년에 코플리상을 받았고 1849년에는 마침내 뮌헨대학University of Munich의 물리학 교수로 임명되었다. 그가 책을 출간한지 22년만이었다. 옴은 1854년 65세의 나이로 세상을 떠날 때까지 뮌헨대학에서 강의를 하면서 명예와 존경을 누렸다.

옴이 옴의 법칙을 발견하기에 앞서, 캐번디시Henry Cavendish를 비롯한 몇몇 연구자들이 이와 비슷한 발견을 했다. 그러나 옴의 연구 결과가 상대적으로 철저하고 완벽했기 때문에 최초 발견자의 영예는 옴에게 돌아갔다.

5.6 전력 : 줄의 법칙

전도성 또는 저항성 물질에서 소모되는 전력power은 다음과 같이 전기장과 전류밀도로부터 구할 수 있다.

$$P = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv \ \ [\mathrm{W}] \tag{5.12}$$

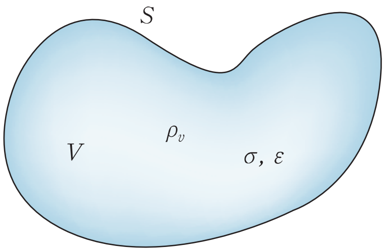
여기서 V는 저항성 물질의 부피이다. 따라서 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$는 소모된 부피전력밀도로 단위는 $\mathrm{W/m^3}$이다. 식 (5.12)를 **줄의 법칙**Joule's law이라고 한다.

회로이론에서 사용하는 식과 어떻게 대응되는지를 알아보기 위해 [그림 5-5]의 저항성 물질을 살펴보자. 이 물질은 균일한 $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$, σ를 갖는 것으로 가정한다. 식 (5.9)를 식 (5.12)에 대입하여 정리하면 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} P &= \iiint \sigma E^2\, dv = \iiint \frac{1}{\sigma} J^2\, dv = \sigma E^2 (Sl) = \frac{J^2}{\sigma}(Sl) \\ &= (El)^2 \frac{S\sigma}{l} = \frac{V^2}{R} \\ &= (JS)^2 \frac{l}{S\sigma} = I^2 R \\ &= \int E\, dl \iint J\, ds = (El)(JS) = VI \end{aligned}$$

5.7 완화시간 (Relaxation Time)

앞서 2장에서 전하를 도체 속에 놓으면 놓자마자 거의 동시에 반발력이 작용하여 이 전하를 도체의 표면으로 밀어낸다는 사실을 배웠다. 다시 말해, 부피전하밀도는 아주 빠르게 사라지면서 표면전하밀도를 발생시킨다. 이제 이 현상을 정량적으로 분석하여 얼마나 빠르게 사라지는지 구해보자. [그림 5-6]과 같이 전도율이 σ, 유전율이 ε이고, 경계를 이루는 닫힌곡면이 S인 선형 균질 물질을 생각해보자.



[그림 5-6] 완화시간

먼저 연속방정식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{D}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v \qquad : \text{식 (3.10b)를 사용}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\rho_v$$

이 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\rho_v(x, y, z, t) = \rho_{v0}(x, y, z)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{5.13}$$

이를 다시 써보자.

$$\rho_v(x, y, z, t) = \rho_{v0}(x, y, z)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

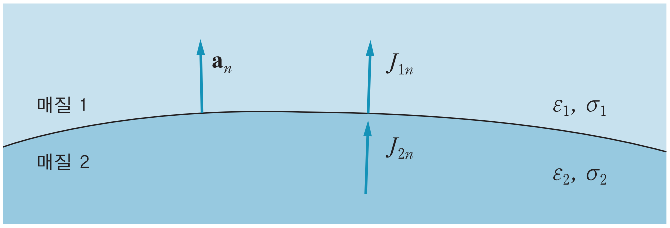
여기서 $\tau = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$을 완화시간relaxation time이라고 한다. 식 (5.13)을 설명하면, $t=0$인 순간에 부피 V 내부의 초기 부피전하밀도가 $\rho_{v0}(x, y, z)$이다. 이제 시간이 지남에 따라 부피 내부의 모든 점에서의 부피전하밀도는 지수함수 형식으로 감소한다. 전하량은 보존되어야 하므로 알짜 전하(감소한 전하)는 결국에는 표면 S 위에 존재할 수밖에 없다. 부피전하밀도가 감소하면 감소한 만큼 표면전하밀도는 증가한다. τ는 부피 내의 부피전하밀도가 처음 값의 $\dfrac{1}{e}$(=약 37%)까지 줄어드는 데 걸리는 시간이다. [표 5-2]에 몇 가지 도체와 절연체의 완화시간을 정리했다. 좋은 도체일 경우의 완화시간은 10^{-19}[s] 정도로 매우 짧다. 따라서 도체 속의 초과 전하가 표면으로 옮아가는 과정은 거의 순간적으로 일어난다고 보면 된다.

[표 5-2] 몇 가지 물질의 완화시간

물질	완화시간
구리	1.5×10^{-19}[s]
바닷물	2×10^{-10}[s]
증류수	10^{-6}[s]
석영유리	10^{5}[s] = 약 11일

5.8 정상전류의 경계조건

정상전류가 있는 경우에는 앞서 3장에서 유도한 기본 경계조건에, $\mathbf{J}$의 수직성분의 연속성과 관련한 경계조건을 하나 더 추가해야 한다. [그림 5-7]을 보면 두 매질이 서로 경계를 이룬 채 놓여있다. 매질 1의 특성은 $(\varepsilon_1, \sigma_1)$이고, 매질 2의 특성은 $(\varepsilon_2, \sigma_2)$이다.



[그림 5-7] $\mathbf{J}$의 수직성분의 연속

경계면에서 부피전류밀도의 수직성분인 J_{1n}과 J_{2n}을 살펴보자. J_{2n}은 경계면을 향하는 방향으로 흐르는 전하를 나타내고, J_{1n}은 경계면에서 밖으로 흘러 나가는 전하를 나타낸다. J_{1n}과

J_{2n}은 반드시 같아야 한다. 만일 이것이 성립하지 않으면 전하가 경계면에 계속 쌓일 것이기 때문이다. 그러므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

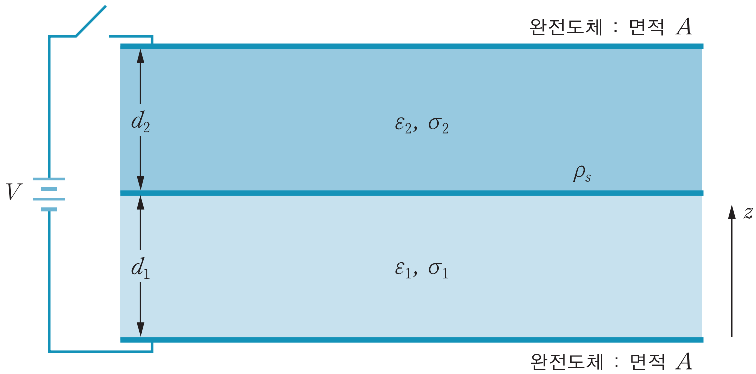
$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}} \quad : \text{정상전류인 경우} \tag{5.14}$$

요약하면, 정상전류인 경우 경계면에서 성립하는 세 개의 기본 경계조건은 다음과 같다.

1. $E_{1t} = E_{2t}$: $\mathbf{E}$의 접선성분은 연속이다.
2. $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$: $\mathbf{D}$의 수직성분은 자유 표면전하의 양만큼 불연속이다.
3. $J_{1n} = J_{2n}$: $\mathbf{J}$의 수직성분은 연속이다.

예제 5-1 서로 다른 물질이 들어있는 평행판 커패시터

[그림 5-8]을 보면 면적이 A인 똑같은 도체판 두 개가 $d_1 + d_2$만큼 떨어진 채 나란히 놓여 있다. 이 평행판 사이의 영역은 서로 다른 두 개의 물질로 채워져 있다. 두 물질의 유전율과 전도율은 각각 ε_1, σ_1과 ε_2, σ_2이다. 스위치가 닫히고 시간이 경과하면 결국에는 정상상태에 도달한다. 전류, 총 저항 그리고 두 물질의 경계면에서의 자유 표면전하를 구하라.



[그림 5-8] 서로 다른 물질이 들어 있는 평행판 커패시터

풀이

이러한 유형의 문제에서는 전류를 구하는 데 집중해야 한다. 정상상태에서는 $\mathbf{J}$의 수직성분이 연속이어야 하므로 두 영역에 존재하는 부피전류밀도는 당연히 다음과 같이 하나가 되어야 할 것이다.

$$\mathbf{J} = -\mathbf{a}_z J_0$$

전압은 다음과 같이 식 (5.9)의 옴의 법칙을 적용하여 구할 수 있다.

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{J_0 d_1}{\sigma_1} + \frac{J_0 d_2}{\sigma_2} = J_0\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right)$$

따라서

$$J_0 = \frac{V}{\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right)}$$

가 된다. 그러면

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = J_0 A = \frac{VA}{\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right)}$$

이므로

$$R = \frac{V}{I} = \frac{d_1}{\sigma_1 A} + \frac{d_2}{\sigma_2 A} \tag{5.15}$$

가 된다. 경계면($z = d_1$)에서의 전위는 다음과 같다.

$$E_1 d_1 = J_0 \frac{d_1}{\sigma_1} = V \frac{\frac{d_1}{\sigma_1}}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}}$$

이 전위는 $z = 0$의 전위를 기준으로 한 것이다. 전도율 σ_1, σ_2 값이 주어지면 경계면에서의 전위를 계산할 수 있다.

경계면에서의 표면전하밀도를 구하기 위해 다음과 같이 식 (3.25)로 주어지는 $\mathbf{D}$의 수직성분에 대한 경계 조건을 사용한다.

$$\mathbf{D}_1 = -\mathbf{a}_z \frac{J_0}{\sigma_1} \varepsilon_1,\ \mathbf{D}_2 = -\mathbf{a}_z \frac{J_0}{\sigma_2} \varepsilon_2$$

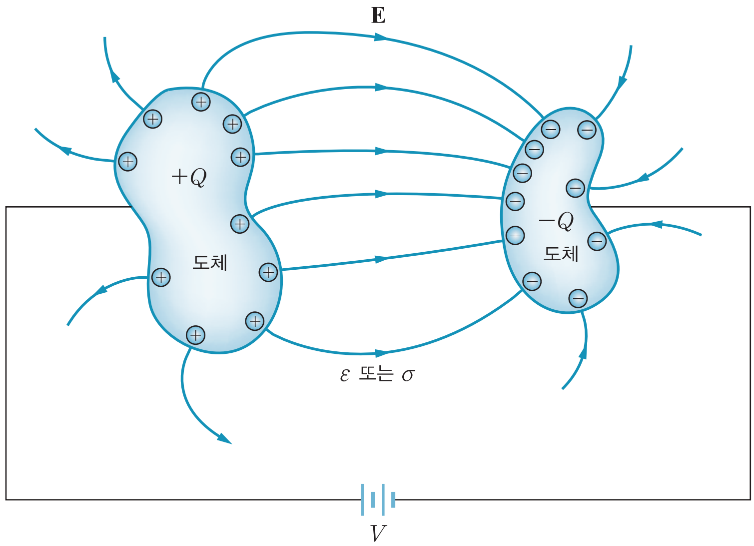
$$\rho_s = D_{2z} - D_{1z} = J_0 \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \right) \tag{5.16}$$

$$\rho_s \Rightarrow 0 \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \text{인 경우} \right)$$

전하 ρ_s는 어디에서 온 것일까? $\mathbf{J}$의 수직성분은 정상상태에서는 연속이므로 이것에 의해 전하가 쌓일 수는 없다. 그렇다면 전하 ρ_s는 $\mathbf{J}$의 수직성분이 반드시 연속일 필요가 없는 과도기간 transient period 동안에 경계면에 쌓인 것으로 생각할 수 있다. 알짜 전하는 두 물질의 완화시간이 같지 않을 때에만 생길 수 있다.

5.9 커패시턴스와 저항 사이의 관계

[그림 5-9]를 보면 무한히 큰 균일 매질 속에 두 개의 도체가 놓여 있다.



[그림 5-9] 커패시턴스와 저항 사이의 관계

먼저, 도체가 놓인 매질을 유전율이 ε인 이상적인 유전체라고 가정하자. 두 완전 도체 사이에 전압 V를 걸어주면 유전체에는 전기장 $\mathbf{E}$가 발생하고 두 도체 표면에는 각각 전하 $+Q$와 $-Q$가 생긴다. 커패시턴스는 다음과 같다.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{V} = \frac{\varepsilon \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{V} \tag{5.17}$$

여기서 S는 도체를 둘러싸는 닫힌표면에서 도체와 배터리를 연결하는 도선이 지나가는 부분(도선 단면)을 제외한 열린표면이다.

이번에는 도체가 놓인 매질을 전도율이 σ인 저항이라고 가정하자. 두 도체에 전압 V를 걸어주면 정상전류 I가 저항을 통해 흐른다($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). 전류 I는

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \sigma \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

이므로, 저항은 다음과 같다.

$$R = \frac{1}{G} = \frac{V}{I} = \frac{V}{\sigma \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \tag{5.18}$$

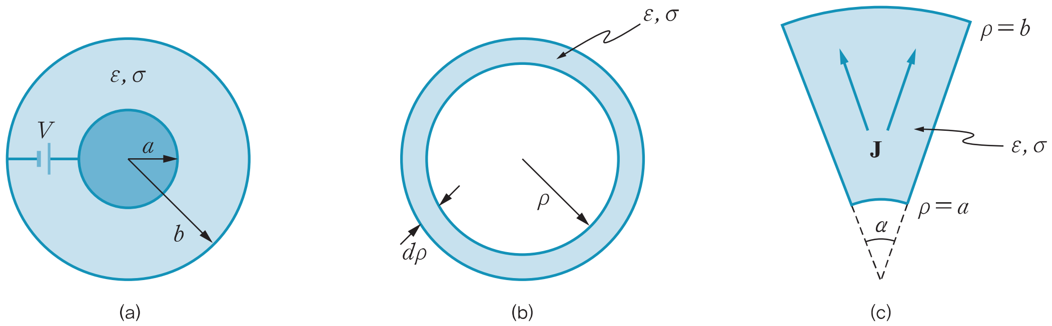
저항의 역수인 G를 **컨덕턴스**conductance라고 한다. 위의 두 경우에서 전압 V가 같다고 가정하자. 그러면 유일성 정리에 따라 전기장 $\mathbf{E}$ 또한 같으므로 식 (5.17)과 식 (5.18)을 곱하면 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \tag{5.19}$$

[그림 5-9]의 물질이 완전유전체에서 불완전유전체로 바뀌면 어떻게 될까? 이때는 전류가 흐르게 되고, 그 전류의 크기는 전도율 σ가 증가할수록 커진다. σ가 증가해도 V, $\mathbf{E}$, Q, C는 변하지 않고 오직 $\mathbf{J}$와 R만 달라진다. 그러므로 저항 문제와 커패시턴스 문제는 따로 다룰 수 있다.

예제 5-2 동축선로의 병렬 저항과 병렬 커패시터

[그림 5-10(a)]에는 동축선로의 단면이 나타나 있다. 동축선로의 축은 z방향을 따라 놓여 있다. 이 선로의 내부 도체의 반지름은 a, 외부 도체의 반지름은 b이며 길이는 l이다. 동축선로의 내부와 외부 도체 사이는 유전율이 ε이고 전도율이 σ인 물질로 완전히 채워져 있다. 내부와 외부 도체 사이에 전압 V를 걸어주면 전류 I는 내부 도체에서 외부 도체 쪽으로 반지름방향을 따라 부챗살 형태로 흐른다. 내부 도체와 외부 도체 사이의 저항과 커패시턴스를 구하라.



[그림 5-10] 내부 도체 반지름이 a, 외부 도체 반지름이 b, 길이가 l인 동축선로
(a) 동축선로 (b) 얇은 원통 껍질 (c) 뾰족하게 자른 조각

풀이

이 구조는 원통 대칭성을 지니고 있으므로 부피전류밀도는 ϕ에 따라서는 달라지지 않는다. 총 전류는 ρ에 따라 달라져서는 안 되므로 부피전류밀도는 $\frac{1}{\rho}$의 비율로 변해야 한다. 따라서 부피전류밀도를 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_\rho \frac{I}{2\pi\rho l} \tag{5.20}$$

다음 식에서 확인할 수 있듯이 부피전류밀도를 반지름이 ρ이고 길이가 l인 원통면에 대해 적분하면 총 전류 I가 된다.

$$\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi\rho l} \rho \, d\phi \, dz = I$$

그러므로

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{a}_\rho \frac{I}{2\pi\rho\sigma l}$$

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma l\rho} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$I = \frac{2\pi\sigma l V}{\ln(b/a)}; \quad \mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{V}{\ln(b/a)} \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

이 되고, 따라서

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma l} \tag{5.21}$$

$$G = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}; \quad \frac{G}{l} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \tag{5.22}$$

가 된다. 길이가 l인 내부 도체 표면의 전하 Q는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q = (\text{면적})\rho_s = (\text{면적})D_\rho = (2\pi a l)\,\varepsilon \frac{V}{\ln(b/a)} \frac{1}{a} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)} V$$

따라서

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}; \quad \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \tag{5.23}$$

이 된다. 여기서 주목할 점은 식 (5.21)의 R과 식 (5.23)의 C는 식 (5.19)의 관계식 $RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$을 만족한다는 것이다.

저항 R은 [그림 5-10(b)]에 있는 반지름이 ρ, 길이가 l인 얇은 원통 껍질을 이용하여 다음과 같은 과정으로 구할 수도 있다.

$$dR = \frac{dl}{\sigma A} = \frac{d\rho}{2\pi\rho\sigma l}$$

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \frac{d\rho}{2\pi\sigma l\rho} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma l}$$

이 식은 식 (5.21)과 일치한다.

컨덕턴스 G는 [그림 5-10(c)]와 같이 중심각이 α가 되도록 뾰족하게 자른 조각을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 여기서 전류는 이 조각에서 반지름방향으로 흐른다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_\rho \frac{I}{\alpha\rho l}; \quad \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{I}{\alpha\rho l\sigma}; \quad V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I\ln(b/a)}{\alpha l \sigma}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(b/a)}{\alpha l \sigma}; \; G = \frac{\alpha l \sigma}{\ln(b/a)} \quad \text{(중심각이 } \alpha \text{ 인 조각)} \tag{5.24}$$

각이 $d\phi$인 얇은 조각에 대해서는

$$dG = \frac{d\phi l \sigma}{\ln(b/a)}$$

이므로, 전체 동축선로에 대해서는

$$G = \int dG = \int_0^{2\pi} \frac{l\sigma d\phi}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}$$

이 된다. 이 결과는 식 (5.22)와 일치한다.

동축선로에서 생기는 전력손실은 다음과 같이 구할 수 있다.

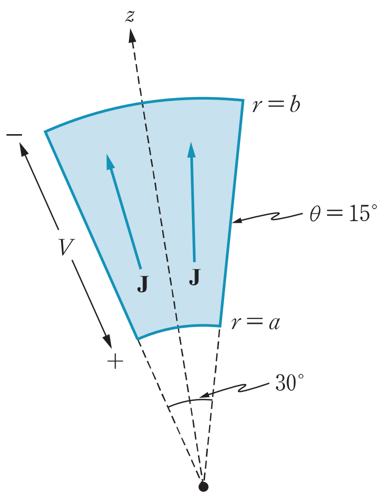
$$\begin{aligned} P &= \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv = \iiint \sigma E_\rho^2\, dv \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\sigma V^2 \rho\, d\rho\, d\phi\, dz}{\ln^2(b/a)\rho^2} = \frac{V^2(2\pi l \sigma)}{\ln(b/a)} \\ &= \frac{V^2}{R} = I^2 R \end{aligned}$$

예제 5-3 원뿔대 모양의 저항

[그림 5-11]에는 $r=a$, $r=b$, $\theta=15°$인 곡면이 경계면을 이루고 있는 원뿔대 모양의 저항이 나타나 있다. 저항은 다음과 같은 전도율을 가진 비균질 물질로 이루어져 있다.

$$\sigma = \sigma_0 \frac{r}{a}$$

곡면 $r=a$와 곡면 $r=b$ 사이에 전압 V가 걸려 있는 경우에 이 두 곡면 사이에 있는 물질의 저항과 내부의 전기장 $\mathbf{E}$를 구하라.



[그림 5-11] 원뿔대 모양의 저항

풀이

먼저, 총 전류 I가 r에 무관하려면 전류밀도는 다음과 같이 반지름방향을 향하고, 반지름의 제곱에 반비례해야 한다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_r \frac{C_1}{r^2}$$

총 전류 I, 전기장 $\mathbf{E}$, 전위 V는 다음과 같은 과정으로 차례로 구할 수 있다.

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/12} \frac{C_1 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{r^2}$$
$$= 2\pi C_1 (1 - \cos 15°)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{a}_r \frac{C_1}{r^2} \frac{1}{\sigma_0 \dfrac{r}{a}} = \mathbf{a}_r \frac{C_1 a}{\sigma_0 r^3}$$

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a E_r \, dr = \frac{C_1 a}{2\sigma_0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

따라서 전기장과 저항은 다음과 같다.

$$C_1 = 2\sigma_0 \left(\frac{b^2 a}{b^2 - a^2} \right) V; \quad \mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{2b^2 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{r^3} \right) V$$
$$R = \frac{V}{I} = \frac{b^2 - a^2}{4\pi\sigma_0 a b^2 (1 - \cos 15°)} \tag{5.25}$$

5.1 [그림 5-1]과 같이 반지름이 a인 원 모양의 단면을 갖는 도선 속을 통해 전류 I_0가 흐르고 있다. 다음의 각 경우에 대해 부피전류밀도 $\mathbf{J}$를 구하라.

(a) 단면 전체에 걸쳐 전류가 고르게 퍼져 흐르는 경우, 즉 $\mathbf{J}$가 균일한 경우
(b) 도선 속의 전류밀도가 도선 축(예를 들어 z축)으로부터의 거리에 비례하는 경우

힌트 $\mathbf{J} = \mathbf{a}_z\, k\rho$인 경우의 k를 구하면 된다.

5.2 전류 I_0가, 반지름이 a인 원 모양의 단면을 갖는 도선의 표면으로만 흐르고 있다. 아주 좋은 도체로 만든 도선인 경우에는 주파수가 매우 높을 때 실제로 전류가 이렇게 흐른다. 전류가 도체 표면에 고르게(균일하게) 퍼져 흐른다고 가정할 때 표면전류밀도 $\mathbf{J}_s$를 구하라.

5.3 지름이 2 [mm]이고 길이가 1 [m]인 알루미늄 도선의 양쪽 끝에 0.9 [mV]의 직류전압이 걸려 있다. 이 도선을 통해 흐르는 전류는 100 [mA]로 측정되었다. 전류가 도선의 단면 전체에 걸쳐 고르게 퍼져 흐른다고 가정할 때 다음을 구하라.

(a) 도선의 저항
(b) 알루미늄의 전도율
(c) 도선 속의 전기장의 세기
(d) 도선에서 소모되는 전력(전기장을 이용하여 계산)

5.4 도체 속에서 전자의 평균 유동속도 $\mathbf{v}$는 다음과 같이 전기장 $\mathbf{E}$에 비례한다.

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$$

여기서 μ를 전하운반자 charge carrier의 이동도 mobility라고 한다. 반지름이 1 [mm]이고 길이가 1 [m]인 구리도선의 저항이 5.5×10^{-3} [Ω]이다. 이 구리도선에 4 [A]의 전류가 흐르고 있다. 구리의 단위부피당 자유전자의 개수는 8.43×10^{28} [m^{-3}]이다. 전류가 도선의 단면 전체에 걸쳐 고르게 퍼져 흐른다고 가정할 때 다음을 구하라.

(a) 전류밀도
(b) 구리의 전도율
(c) 자유전자의 평균 유동속도
(d) 자유전자의 이동도

5.5 $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $\sigma = 5\,[\mathrm{S/m}]$, 반지름 $a = 0.5\,[\mathrm{m}]$인 전도성 유전체 구가 있다. $t = 0$인 순간에 이 유전체 구에 번개가 떨어져서 총 $1\,[\mathrm{mC}]$의 전하가 유전체 구로 옮겨 갔다.

(a) 유전체 구의 전하밀도가 초깃값의 10%로 줄어드는 데 걸리는 시간을 계산하라.
(b) 모든 t에 대해 유전체 구 외부 영역과 내부 영역에서 $\mathbf{E}$와 $\mathbf{J}$를 구하라.

힌트 전하는 구 전체에 균일하게 분포한다고 가정하라. [예제 2-3]의 결과를 이용하라.

5.6 두 개의 매우 넓은 금속 평행판이 $a+b$만큼 서로 떨어져 있다. 두 금속판 사이의 공간은 두 개의 전도성 물질로 채워져 있다. 첫 번째 물질은 전도율이 σ_1이고 두께는 a이다. 두 번째 물질은 전도율이 σ_2이고 두께는 b이다. 두 금속판의 면적은 각각 A이다. 두 금속판 사이의 저항을 구하라.

5.7 두 개의 매우 넓은 금속 평행판이 d만큼 서로 떨어져 있다. 두 금속판 사이의 공간에는 두 개의 전도성 물질로 채워져 있는데, 두 물질은 서로 옆면을 맞대고 있다. 첫 번째 물질은 전도율이 σ_1이고 단면적은 $w \times l_1$이다. 두 번째 물질은 전도율이 σ_2이고 단면적은 $w \times l_2$이다. 두 금속판 사이의 저항을 구하라.

5.8 [그림 3-15(a)]에서 유전체를 전도율이 σ인 도체로 바꾸면 구 저항 spherical resistor이 된다. 안쪽 구의 도체표면(완전도체, $\sigma \to \infty$)과 바깥쪽 구의 도체표면(완전도체) 사이에는 전압 V_0가 걸려 있는데, 안쪽 도체 표면($r = a$)의 전위가 $(+)$이다.

(a) $a \le r \le b$에서 전기장 $\mathbf{E}$와 부피전류밀도 $\mathbf{J}$를 구하라.
(b) 저항 R을 계산하라.
(c) 식 (5.12)의 줄의 법칙을 이용하여 저항에서 소모되는 전력을 계산하라. 또 $P = \dfrac{V_0^2}{R}$임을 보여라.
(d) (b)에서 구한 저항 R과 [예제 3-6(ii)]에서 구한 커패시턴스(식 (3.30) 참조) C를 비교하고, 다음으로 표시되는 식 (5.19)를 만족함을 보여라.

$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad : \text{커패시턴스-컨덕턴스 유사성}$$

5.9 [그림 3-15(b)]에서 두 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2인 두 개의 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

힌트 [연습문제 5.8]의 결과를 이용할 수 있다.

5.10 [그림 3-15(c)]에서 두 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2인 두 개의 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

5.11 [그림 3-15(d)]에서 세 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2, σ_3인 세 개의 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

5.12 [그림 3-15(b)]를 길이가 l인 동축선로의 단면으로 가정한다. 두 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2인 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

힌트 [예제 5-2]의 결과를 이용할 수 있다.

5.13 [그림 3-15(c)]를 길이가 l인 동축선로의 단면으로 가정한다. 두 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2인 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

5.14 [그림 3-15(d)]를 길이가 l인 동축선로의 단면으로 가정한다. 세 개의 유전체를 각각 전도율이 σ_1, σ_2, σ_3인 세 개의 도체로 바꾼 다음, 저항을 구하라.

5.15 심화 전도율이 σ인 전도성 물질이 균일한 전기장 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_0$ 속에 놓여 있다. 물질 속에는 반지름이 a인 빈 공간이 형성되어 있다. 빈 공간 내부($r < a$)의 전기장을 구하라. 또 전도성 물질 속($r > a$)의 전류밀도를 구하라.

힌트 $\mathbf{E}$와 $\mathbf{J}$를 전위를 써서 나타낸 다음, 라플라스 방정식을 풀어서 전위를 구하라.