Chapter 03

도체, 반도체, 유전체 및 정전용량

Conductor, Semiconductor, Dielectric substance, Electric capacity

학습목표

- 도체 및 반도체에서의 전기전도현상 및 전도전류밀도, 도전율, 전기저항 등에 대해 이해할 수 있다.
- 유전체에서의 유전분극현상 및 유전분극의 발생으로 인한 전속밀도와 전계 사이의 관계에 대해 이해할 수 있다.
- 맥스웰 방정식을 이용하여 두 물질의 경계면에서 전계 및 전속밀도를 해석할 수 있다.
- 각종 도체계에서 에너지 및 정전용량을 해석할 수 있다.
- 푸아송 및 라플라스 방정식을 이용하여 전위의 공간적 분포를 해석할 수 있다.

3.1 개요

- 지금까지는 자유공간에서의 전기적 현상 및 쿨롱의 법칙과 가우스의 법칙을 이용하여 각종 전하분포하에서의 전계 및 전속밀도를 구하였다. 이번에는 자유공간으로부터 물질로 옮겨 모든 전기적 현상을 공부하기로 한다. 우선 도체와 반도체, 그리고 유전체를 간단히 소개하고 자유공간과의 차이점에 주목하여 전계해석 및 전위, 정전에너지, 그리고 정전용량을 공부한다.

- 도체는 전류를 흐르게 할 목적으로 사용하는 것이므로 전기전도현상에 관심을 가져야 한다. 도체에서는 전계에 의한 전자의 이동에 의해 전기전도가 발생한다. 이때 전자의 드리프트 속도는 $\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E}$로 전계에 비례하며, 비례상수 μ_e를 '전자의 이동도'라 한다. 도체의 도전율 $\sigma = \rho_v \mu_e$는 체적전하밀도와 이동도의 곱으로 주어진다. 또한 도체 내부를 전계와 반대 방향으로 운동하는 전자는 도체의 원자와 지속적으로 충돌함으로써 전기저항을 발생하게 된다.

물질에는 전기전도현상의 차이에 따라 도체(conductor), 반도체(semi-conductor), 절연체(insulator)로 나눌 수 있다. 절연체는 '두 도체 사이의 전기적 흐름을 끊는다'라는 의미이며, 절연체에 전계를 인가할 때 발생하는 유전분극현상에 주목하여 '유전체(dielectric)'라고도 한다.

- 반도체의 전기전도현상의 주체는 전자와 정공이며, 진성반도체의 경우 전자의 수만큼 정공이 발생하므로 정공의 체적전하밀도와 이동도를 각각 ρ_h 및 μ_h라 하면 도전율은 $\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$로 주어진다. 진성반도체에 5가의 불순물을 첨가하면 n형 불순물 반도체가 되는데, 이 경우 전자가 다수 캐리어가 되어 전기전도를 주도하며, 3가의 불순물을 첨가하여 만든 p형 불순물 반도체는 정공이 전기전도의 주체가 된다.

반도체는 특히 광, 열, 전계, 자계, 압력 등의 외부 에너지원에 의해 매우 특이한 현상을 나타내어 현대 산업 분야에 많이 활용되는, 없어서는 안 되는 물질이다.

- 유전체에 대해 알기 위해서는 전계를 인가할 때 발생하는 유전분극현상을 자세히 이해해야 하며, 정확한 이해를 위해 유전율과 전기감수율 등의 물리량의 의미를 공부해야만 한다. 유전분극의 결과 분극벡터를 $\mathbf{P}$라 할 때, 전속밀도와 전계 사이에는 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$의 관계가 성립되며, 이는 자유공간에서의 두 물리량 사이의 관계($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$)와 다르다는 것에 유의해야 한다. 전기감수율은 $\chi_e = \dfrac{P}{\varepsilon_0 E}$의 개념으로 자유전하에 대한 분극전하, 즉 속박전

하의 비율을 나타낸다. 또한 비유전율 ε_R과의 사이에 $\varepsilon_R = 1 + \chi_e$의 관계가 성립하여 물질마다 고유한 값을 가진다.

분극(polarization)이란, 원자 내의 양(+)전하를 가지는 원자의 핵과 음(−)전하를 가지는 전자의 중심이 완전히 일치하지 않아 양과 음의 전하로 대치되는 현상을 말한다. 이는 전계의 인가에 의해 발생하며 분극이 발생하면 전기쌍극자가 형성된다.

- 도체-유전체 또는 유전체-유전체의 경계에서의 문제들은 실용적으로 매우 중요한 의미가 있으므로 경계조건의 결과들이 가지는 의미를 명확히 이해해야 한다. 경계조건은 적분형의 맥스웰 방정식으로부터 구할 수 있으며, 도체와 유전체 사이에는 $E_t = 0$와 $D_n = \varepsilon E_n = \rho_s$의 결과를 얻을 수 있기 때문에 전계는 항상 도체에 수직한 방향임을 알 수 있다. 또한 유전체-유전체의 경우 $D_{n1} = D_{n2}$ 또는 $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$ 의 경계조건으로부터 유전율이 다른 두 유전체가 경계를 이루고 있는 경우, 전압을 인가하면 유전율이 작은 유전체에 더 큰 전계가 형성됨을 알 수 있다.

- 정전용량은 유전체를 포함한 도체계에 축적되는 에너지와 관련된 매우 중요한 물리량으로, 전자기학에 등장하는 모든 도체계를 학습해야 한다. 정전용량에서는 전계가 형성되기 때문에 에너지가 축적되는 공간에서 정의할 수 있으며, $C = \dfrac{Q}{V}$로 정의된다. 특히, 정전용량은 유전체의 유전율 ε과 그 도체계의 형상에 관련된 상수 K의 곱에 의존하며, 인가해 준 전압의 크기와는 무관한 상수이다. 만약 전위차가 증가하면 전계 및 전속밀도도 증가하며, 가우스 법칙에 의해 비례적으로 전하량도 증가하므로 전하량과 전위차의 비로 정의되는 정전용량에는 아무런 변화가 없다.

- $\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$의 푸아송 방정식을 풀면 주어진 공간 내의 전위분포를 구할 수 있다. 특히 전하가 존재하지 않은 공간에서는 $\nabla^2 V = 0$이 되며, 이를 '라플라스 방정식'이라 한다. 쿨롱의 법칙과 가우스의 법칙으로부터 주어진 전하조건에 의해 한 점의 전계를 구할 수 있었듯이 라플라스 방정식을 이용하면 전위분포를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 전계를 구할 수 있다.

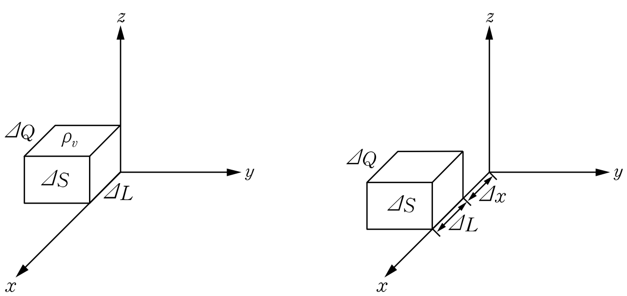
3.2 정상전류

Q 전도전류밀도와 대류전류밀도는 어떻게 다른가요?

A 전도전류나 대류전류 모두 하전입자가 움직여 형성되는 전류입니다. 그러나 전도전류밀도는 도선을 따라 흐르므로 $J=\sigma E$의 관계를 가집니다. 즉, 도선의 도전율이 전류를 결정합니다.
반면 절연 공간이라도 적절한 조건이 되어 전하가 발생하면 전류가 형성되는데, 이를 '대류전류밀도'라 합니다. 대류전류밀도는 $J=\rho_v v$로 표현되며, 전하밀도는 전류의 형성에 중요한 역할을 하게 됩니다.

3.2.1 전류와 전류밀도

지금까지는 전하가 한곳에 정지해 있는 경우에 대하여 설명하였다. 이 절에서는 자유공간을 떠나 물질로 들어가기 전에 전하의 이동, 즉 전류에 대하여 간단히 정리한다. 정상전류(steady electric current)는 전하가 이동하여 전류를 형성하는 것이지만 이동전하의 전하량은 시간적으로 변하지 않는 경우를 의미하는 것이므로, 모든 논의는 여전히 정전계에 한정된다.



(a) $t=0$ (b) $t=t$

[그림 3-1] 전하의 이동과 전류의 형성
Δt[sec] 동안 $\Delta Q=\rho_v \Delta S \Delta L$이 Δx만큼 이동하였으므로 $\mathbf{J}=\rho_v \mathbf{v}$의 전류밀도가 형성된다.

[그림 3-1]과 같이 $\triangle t$[sec] 동안에 $\triangle Q$가 어떤 단면 $\triangle S$를 통과하면 다음과 같은 전류 I가 형성된다.

$$I = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{dQ}{dt} \,[\mathrm{A}] \tag{3.1}$$

이러한 전류가 도체의 한 단면에 흐를 때, 그 단위면적당 흐르는 전류를 '전류밀도(current density)'라 하며 $\mathbf{J}\,[\mathrm{A/m^2}]$로 나타낸다. 따라서 전류밀도 $\mathbf{J}$가 어떤 단면 $\triangle S$를 흐를 때 $\triangle S$를 통과하는 전류 $\triangle I$는

$$\triangle I = J \triangle S$$

이며, 전체 면적을 흐르는 전류 I는

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.2}$$

로 나타낼 수 있다. 앞의 [그림 3-1 (b)]에서 임의의 시간 $\triangle t$ 사이에 x 방향으로 $\triangle x$만큼 이동하였다고 가정하면 $\triangle S$의 수직 단면을 통과하는 전하량 $\triangle Q$는

$$\triangle Q = \rho_v \triangle x \triangle S$$

가 된다. 따라서 이 단면을 통과하는 전류는

$$\triangle I = \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \rho_v \frac{\triangle x}{\triangle t} \triangle S$$

이 되며, 시간에 대하여 극한을 취하면 $\dfrac{\triangle x}{\triangle t}$는 x 방향의 속도를 나타내므로

$$\Delta I = \rho_v v_x \Delta S$$

결국 양변을 ΔS로 나누어 정리하면

$$J_x = \rho_v v_x$$

이다. 따라서 전류밀도는 다음의 관계를 얻는다.

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \tag{3.3}$$

이 식으로부터 체적전하밀도가 속도를 가지면 전류밀도가 형성된다는 것을 알 수 있다. 이는 전하의 움직임이 전류를 형성한다는 것을 의미하는 것으로, 이를 '대류전류밀도(convection current density)'라 한다. 대류전류밀도란 적절한 조건하에 도체 없이 자유공간 중에 형성되는 전류를 말한다.

전도전류밀도와 대류전류밀도의 차이점은?
전류밀도에는 전도전류밀도, 대류전류밀도, 변위전류밀도가 있다.
- 전도전류밀도는 도체에서의 하전입자(전자)의 이동에 의한 전류밀도를 말한다.
- 대류전류밀도는 자유공간에서의 전하 발생 및 이동에 의한 전류밀도를 말한다. 이는 자유공간과 같은 절연 공간에서도 전계가 매우 강하면 전리 및 음극에서의 전자방출 등의 현상에 의해 하전입자가 생길 수 있다.
- 변위전류밀도는 하전입자가 없는 절연공간에서 전속의 발생에 상응하는 전류밀도를 말한다. 이는 6장에서 자세히 설명할 것이다.

따라서 전도전류밀도 및 대류전류밀도는 하전입자의 운동에 의한 것이라 생각하면 된다.

이에 비해 도체와 반도체에서와 같이 하전입자(전자 또는 전자와 정공)가 인가해 준 전계에 의해 이동하여 흐르는 전류밀도를 '전도전류밀도(conduction current density)'라 한다. 즉, 전계는 단위 양전하에 미치는 힘이므로, 전계를 인가하면 전하의 부호에 따라 $\mathbf{F} = +e\mathbf{E}$ 또는 $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$의 힘을 받아 전자는 전계 방향으로, 정공은 전계와 반대 방향으로 움직인다. 이때의 이동속도를 드리프트 속도(drift velocity) $\mathbf{v}_d$라 하며, 이는 인가해 준 전계에 비례한다. 또한 그 비례상수를 '이동도(mobility)'라 한다. 이동도는 μ로 나타내며, 드리프트 속도는

$$\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E} \tag{3.4}$$

의 관계가 성립한다. 이 식에서 (−) 부호는 전자의 경우를 생각하여 취한 것이다. 결국 이동도는 $\mu = \dfrac{v}{E}$의 관계가 있어 단위 전계를 인가할 때의 속도의 개념으로 주어진 전계 조건하에서 이동의 정도를 나타내는 중요한 양이다. 이동도는 위 식으로부터 $[\mathrm{m^2/V \cdot sec}]$의 차원을 가진다.

이 식 (3.4)를 식 (3.3)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} = -\rho_v \mu_e \mathbf{E} \tag{3.5}$$

전류밀도와 전계 사이에는, 도전율(electrical conductivity)을 σ라 할 때, 옴의 법칙으로부터

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{3.6}$$

의 관계가 성립하므로, 도전율을 체적전하밀도와 이동도로 표시하면

$$\sigma = \rho_v \mu_e \tag{3.7}$$

의 관계가 성립한다. 한편, 도체 내부에서 전계에 의해 가속된 전자가 원자와 충돌하면서

이동할 때, 전자의 평균자유시간을 τ라 하면

$$m\frac{\mathbf{v}}{\tau} = -e\mathbf{E} \tag{3.8}$$

전자가 원자와 한 번 충돌한 후, 다음 충돌할 때까지의 평균이동거리를 평균자유행정(mean free path)이라 하고, 이때의 시간을 평균자유시간(mean free time)이라 한다. 원자와의 충돌 직전의 전자의 에너지가 전계로부터 얻은 힘과 이동거리의 곱으로 결정되므로, 평균자유행정과 시간은 전리 능력의 관점에서 방전 현상을 이해하는 데 매우 중요한 양이다.

의 관계가 성립하며, 이 식과 식 (3.6)으로부터 전류밀도는

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} \tag{3.9}$$

이 되어 도전율은 식 (3.7) 이외에 다음과 같이 주어지기도 한다.

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m} \tag{3.10}$$

금속의 종류에 따라 자유전자의 밀도와 평균자유시간이 다르므로, 금속마다 고유한 전기전도도를 가진다. 도전율의 단위는 지멘스/미터(siemens/meter, S/m)로 금(Au), 은(Ag), 동(Cu), 알루미늄(Al)의 순으로 높으며 약 $10^7 \sim 10^8\,\mathrm{S/m}$의 범위에 있다.

예제 3-1

대류전류밀도의 차원을 계산하여 전류밀도가 된다는 것을 입증하라.

풀이

$$J = \rho_v v : \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}\right]\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right] = \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2\mathrm{sec}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

로 전류밀도가 된다는 것을 알 수 있다.

coffee break

전자는 일반적으로 세 가지 종류의 속도를 가진다. 즉, 세 가지의 원인에 의해 움직인다.

❶ 드리프트 속도(drift velocity) v_d

전계에 의해 전자가 움직일 때의 속도를 말하며, 이는 물질의 전도성을 논하기 위해 필요한 물리량이다. 즉, $\mathrm{v}_d = -\mu_e \mathbf{E}$의 관계가 있으며, 드리프트 속도는 이동도 μ_e와 전계의 크기에 의해 결정된다.

❷ 열운동 속도(thermal velocity) v_T

전자가 위치하는 계의 절대온도에 비례한다. 즉, 절대온도를 K, 그리고 볼츠만 상수를 k라 하면

$$\frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{3}{2}kT$$

의 관계에 의해 전자의 속도가 결정되며, 이 속도를 '열운동 속도'라 한다. 전자의 열운동은 일반적으로 그 방향성이 매우 무질서한 특성을 가지고 있으므로, 어느 특정 방향으로만 이동하지 않는다. 따라서 전류는 형성되지 않으며, 상온에서 전자의 열운동 속도도 약 $10^5\,\mathrm{m/sec}$ 정도로 매우 큰 편이므로 전계를 인가하더라도 매우 빠른 시간 내에 반전계 방향으로 배향하지 않는다.

배향

전기쌍극자모멘트를 가지는 분자로 이루어진 계가 전기장 속에 놓일 때, 쌍극자의 방향이 전기장의 방향과 일치하는 것을 말한다.

❸ 확산속도(diffusion velocity) v_D

위치에 대한 전자의 밀도차가 발생하면 평형을 이루고자 하는 자연계의 섭리에 의해 전자가 이동하는데, 이때의 이동속도를 말한다. 이는 위치에 대한 전자의 밀도구배에 의존한다. 즉, 전자밀도를 n이라 하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$v_D \propto -\Delta n$$

3.2.2 전류의 연속방정식

전하는 이미 설명한 바와 같이 원자에서 핵으로부터 전자가 분리되면 전자와 양이온이 동시에 발생한다. 또한 이러한 전하들이 적절한 조건이 되면 서로 재결합(recombination)하여 소멸하기도 한다. 그러나 전하가 그 자체로서 창조되거나 부서져 없어지지는 않는다. 이를 '전하보존의 원리'라 한다. 즉, 전하가 보존되는 계에서 어떤 폐곡면을 통과하는 전류는 다음과 같다.

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

전하는 전리작용 등 여러 가지 기구(mechanism)에 의해 생성되지만, 전자가 원자에 부착(attachment)되거나 이온과의 재결합(recombination) 과정을 통해 소멸되기도 한다.

만약 양(+)전하가 이 표면을 통과하여 밖으로 나간다고 생각하면 전류가 밖으로 흐르는 만큼 폐곡면 내부에는 양전하가 일정한 시간적 비율로 감소하게 될 것이다. 즉, 음(−)전하의 시간적 증가가 일어나는 것이다. 따라서 전류는

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \tag{3.11}$$

의 관계가 성립하며, 이 식에서 (−)는 전류가 흐르는 방향에 따라 (+)가 될 수도 있을 것이다. 한편, 이 식의 면적분은 발산의 정리에 따라 체적 적분으로 바꿀 수 있으며, 전하 Q_i와 체적 전하밀도 ρ_v와의 관계를 고려하면

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{dQ_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho_v dv = \int -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

의 관계가 성립한다는 것을 알 수 있다. 따라서 체적 적분들로부터 피적분 함수가 서로 같아야 하므로

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{3.12}$$

가 성립된다는 것을 알 수 있다. 이 식을 '전류의 연속식(continuity equation)'이라 한다. 이 식은 미소체적소에서 흘러나오는 단위체적당의 전류는 바로 그 점에서의 체적전하밀도의 시간적 감소율과 같다는 것을 의미한다. 또한 우리가 공부하고 있는 정전계의 경우 전하의 이동은 존재하지만 이동하는 전하밀도의 양은 시간에 따라 일정한 경우에 해당하므로, 위의 전류의 연속식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{3.13}$$

한편, 전류의 연속식의 활용을 생각해보자. 어떤 매질의 도전율과 유전율을 각각 σ 및 ε이라 하면,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

이므로

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v$$

의 미분방정식을 얻는다. 이 식의 해는 $t=0$ 에서의 체적전하밀도를 ρ_0라 하면

$$\rho_v = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}\,[\mathrm{C/m^3}]$$

가 된다. 이는 어떤 시각에서의 전하밀도가 시간이 경과함에 따라 지수함수적으로 감쇄되고 있음을 의미하는 것으로, 이 식으로부터 그 감쇄의 정도는 그 매질의 도전율과 유전율에 의존하고 있음을 알 수 있다. 즉, 시간 $t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$에서 ρ_0의 체적전하밀도가 ρ_0의 e^{-1}배(36.8%)로 감소하고 있으며, 이를 완화시간(relaxation time) τ로 나타낸다. 즉,

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}\,[\mathrm{sec}]$$

이다. 예를 들어 도전율이 매우 높고, 유전율이 작은 양도체인 구리의 경우 완화시간은 $\tau = 1.53 \times 10^{-19}\,[\mathrm{sec}]$로, 물질 내부에 전하가 발생하면 매우 빠른 시간 내에 물질의 표면으로 이동하게 된다. 이와는 반대로 유전율이 매우 높고 도전성이 없는 절연체인 운모(마이카, mica)의 경우는 $\tau = 14.76\,[\mathrm{hour}]$로, 이는 전하의 이동에 너무 많은 시간이 소요된다는 것을 의미한다. 결국 전류의 연속식은 그 물질의 물성을 파악하는 데 중요하게 활용된다.

예제 3-2

전류밀도 $\mathbf{J} = 2y^2\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z\,[\mathrm{A/m^2}]$일 때, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$의 체적에서 발산하는 전 전류를 구하라.

풀이

$$I = \int \nabla \cdot \mathbf{J} dv = \int (4y+1)\,dxdydz = 8\,[\mathrm{A}]$$

이다. 즉, 이 체적 내에서 정전하의 감소율은 $-8\,[\mathrm{C/sec}]$이다.

3.3 도체와 옴의 법칙

Q 도체에서 전기저항의 물성적 의미는 무엇인가요?

A 도체 내의 자유전자가 전계로부터 힘을 받으면 등가속도 운동을 하고, 시간이 경과함에 따라 속도 또한 일정하게 증가하게 됩니다. 그러나 시간이 계속 증가한다고 해서 속도도 무한대로 증가하지는 않습니다. 그 이유는 전자속도의 증가를 억제하는 격자와 충돌하기 때문입니다. 일반적으로 전자는 도체 내에서 약 10^{13}회/sec 정도로 충돌을 일으켜 항상 일정한 속도를 유지하게 됩니다. 이러한 충돌현상을 '전기저항'이라 하며, 충돌 시 전자가 결정격자에게 전달하는 에너지가 줄열, 즉 저항에 의해 열량이 발생합니다. 따라서 도체에 전류가 흐르면 도체는 항상 발열하게 됩니다.

물질에는 주어진 전압 조건하에서 전기가 잘 통하는 정도의 차이에 따라 도체와 반도체, 그리고 절연체로 나눌 수 있다. 물론 전자기학에서 나오는 물질에는 자성체도 있지만, 이는 전기전도의 관점에 의한 분류는 아니다. 이에 대해서는 제5장에서 다룰 것이다.

전자를 많이 가지고 있는 금속 물질은 전기적으로는 도체이다. 전자는 일정량의 전하를 가지고 금속 물질 내부에서 움직이므로, 이러한 전자를 많이 보유한 금속 물질은 전기 전도성이 매우 뛰어나다. 즉, 물질의 체적저항률(volume resistivity)이 매우 낮아 도체의 경우 대략적인 체적저항률이 약 $10^{-8}\Omega \cdot \mathrm{cm}$ 이하이다. 그 이유는 금속도체의 경우 원자핵과 궤도전자들의 결합력이 약하여 전자는 특정 원자에 강하게 구속되지 않은 상태에서 물질 전체로 결합되는 이른바 금속결합(metallic bond)을 하고 있어 외부의 에너지 변화에 민감하게 응답할 수 있기 때문이다.

물질을 대표하는 물질상수로는 투자율 μ와 유전율 ε, 그리고 도전율 σ가 있다. 이를 '3대 물질상수'라 한다. 투자율은 자기장과 인덕턴스와 관련된 양으로 자성체를 특징적으로 표현하는 상수이며, 유전율은 유전체와 정전에너지를 대표적으로 설명하는 값이다. 도전율은 앞 절에서 설명한 바와 같이 저항률의 역수로, 도체의 전기전도성을 설명한다.

3대 물질상수란, 사람을 표현할 때, 그 사람의 인간미, 인상, 외모 등으로 표현하듯이 물질을 논할 때 특징적으로 표현하는 상수를 말한다. 즉, 물질 상수로 그 물질의 대략적 성질을 이해할 수 있다. 대표적인 물질상수로는 도전율, 유전율, 투자율 등을 들 수 있다.

- 투자율 μ : 자계와 자속밀도와의 관계, 자기에너지, 인덕턴스 등의 물리량을 표현하는 데 사용된다.
- 유전율 ε : 전계와 전속밀도와의 관계, 정전에너지, 정전용량 등을 표현하는 데 사용된다.
- 도전율 σ : 도체의 전기전도현상으로 설명할 수 있으며, 저항율의 역수이다.

이번에는 금속도체의 전기전도에 대하여 간단히 설명하기로 한다. 금속 도체에 전계를 가하면 전자가 전계와 반대 방향으로 이동한다. 전자에 작용하는 중력은, 전자의 질량이 매우 가볍기 때문에 무시할 수 있다. 따라서 운동방정식은

$$m\frac{dv}{dt} = QE = Q\frac{V}{d} \tag{3.14}$$

와 같다. 이 식으로부터 속도 v를 구하면

$$v = \frac{QV}{md}t \tag{3.15}$$

로 시간의 경과와 함께 지속적으로 속도가 증가하는 등가속도 운동을 한다는 것을 알 수 있다. 즉, 시간이 무한히 증가하면 전자의 속도도 무한대로 증가하여 전자의 운동에 의해 형성되는 전류도 무한대가 될 것이다. 그러나 실제 도체에 전압을 인가해보면 전류는 계속 증가하지 않고 항상 일정한 값을 나타낸다. 이는 전자의 속도가 증가하는 것을 방해하는 작용이 일어나고 있음을 의미한다. 더 정확히 말하면 전자와 결정격자와의 충돌이 전자의 이동속도를 일정하게 유지시키는 것이다. 이를 '전자의 산란작용'이라 하며, 일반적으로 금속 도체에는 약 10^{13}회/sec 정도의 충돌이 일어난다고 한다.

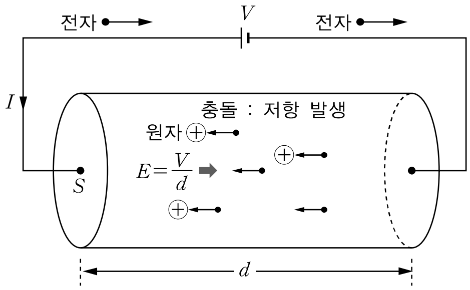
결정격자

원자 및 분자들의 3차원의 주기적 배열로 물질을 형성하는데, 이를 결정(crystalline)이라 한다. 이러한 결정을 공간 내의 점들이 규칙적으로 배열된 형태로 이상화한 것을 격자(lattice)라 한다. 즉, 결정격자와 전자와의 충돌이란 전자가 이동하는 동안 그 물질을 구성하는 원자와 충돌하는 것을 의미한다.

결국 금속의 저항은 전자의 산란작용에 의해 발생한다. 따라서 일정한 원자밀도의 금속 도체의 경우, 저항은 전자의 이동에 수직한 단면적 S가 크면 전자와 결정격자와의 충돌 확률은 작아지고, 전자의 이동경로, 즉 도체의 길이 d가 길면 커지게 되므로

$$R = \rho\frac{d}{S} \tag{3.16}$$

의 관계가 성립한다. 이 식에서 ρ는 저항률(resistivity)로서 $\Omega \cdot \mathrm{cm}$의 차원을 가진다. 금속 도체의 전기저항은 온도가 증가하면 감소하는데, 그 이유는 온도가 증가하면 결정격자의 열진동이 증가하여 전자와의 충돌 확률이 높기 때문이다.



[그림 3-2] 도체에서의 전자의 산란작용
전계에 대한 전자의 이동은 전류를 형성하고, 원자와 전자의 충돌은 전기저항을 유발한다.

이러한 저항에 대한 정의는 우리가 이미 배운 전자기학의 몇 가지 개념을 가지고 해석할 수도 있다. 즉, [그림 3-2]와 같은 단면적 S, 길이 d인 원통도체에서 전계 및 전류밀도가 공간적으로 균일하다고 하면 전류는

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

이 되고, 도체 양단의 전위차는

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{ba} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{ab} \tag{3.17}$$

이다. 즉, 전위와 전계는 개념적으로 $V = Ed$의 관계가 성립한다. 따라서 이들의 관계를 정리하면

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{d}$$

이 되며, 이를 V에 대하여 정리하면

$$V = \frac{d}{\sigma S} I = RI$$

이므로, 저항은

$$R = \frac{d}{\sigma S} = \rho \frac{d}{S} \tag{3.18}$$

의 관계를 얻을 수 있다. 한편, 도체 내의 전계가 불균일한 경우 저항은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \tag{3.19}$$

한편, 도선에 전류가 흐르면 도선의 저항에 의해 줄열(Joule's heat)로 전력을 소비하게 되므로, 전력 P는 다음 식과 같이 정의된다.

$$P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \tag{3.20}$$

줄열
전자가 이동하는 도중에 원자와 충돌하면 속도와 운동에너지가 감소하며, 이를 원자가 얻게 된다. 이때 원자는 에너지를 얻은 만큼 자신의 위치에서 진동하여 발열하게 되는데 이를 줄열(joule heat)이라 한다. 따라서 도선에 전류가 흐르면 반드시 줄열이 발생하게 된다.

전력밀도는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma |\mathbf{E}|^2 \tag{3.21}$$

전력을 구하기 위해 전력밀도의 체적적분을 변형하여 전계에 대해서는 선적분을 하고, 전류밀도에 대해서는 면적분을 하면, 전기회로에서 사용하는 전력을 구하는 식으로 나타낼 수 있다.

$$P = \int E d\mathbf{L} \int J dS = VI \tag{3.22}$$

$$P = I^2 R \tag{3.23}$$

예제 3-3

내·외 도체의 반지름이 각각 a 및 b인 동축케이블의 길이를 L이라 할 때, 내·외 도체 사이의 저항을 구하라.

풀이

내·외 도체 사이의 물질의 유전율 및 도전율을 ε 및 σ라 할 때, 전계 및 전위는

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho, \quad V_{ab} = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho} d\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} ln\frac{b}{a}$$

이며, 이를 이용하여 전류를 구하면

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \sigma \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho} \rho d\phi dz = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^L d\phi dz = \frac{\sigma\rho_L L}{\varepsilon}$$

이 된다. 따라서 저항은

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma L} ln \frac{b}{a}$$

이다. 저항의 역수를 컨덕턴스 G로 표현하면 다음과 같다.

$$G = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)}$$

[예제 3-3]의 결과는 뒤에서 전송선로를 공부할 때 필요한 파라미터 중의 하나이다.

예제 3-4

반지름이 2mm인 구리도선에 2A의 전류가 흐를 때 다음을 구하라. 단, 전자의 전하량은 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C이고, 단위체적당 8.5×10^{28} 개의 자유전자가 있다.

(a) 도선 양단의 저항이 10Ω이 되기 위한 길이는 얼마인가?
(b) 1시간 동안 도선의 단면을 통과하는 자유전자의 개수를 구하라.
(c) 자유전자의 전류밀도와 이동속도를 구하라.
(d) 도선 내부의 전계와 도선의 전기전도도를 구하라.
(e) 도선에서 소비되는 전력을 구하라.

풀이

(a) $R = \frac{d}{\sigma S}$, $d = R\sigma S = 10 \times 5.8 \times 10^7 \times \pi \times (2 \times 10^{-3})^2 = 7285\,[\mathrm{m}]$

(b) $I = \frac{Q}{t}$, $Q = Ne$

$$N = \frac{It}{e} = \frac{2 \times 3600}{1.602 \times 10^{-19}} = 4.5 \times 10^{22}\,[\text{개}]$$

(c) $J = \frac{I}{S} = \frac{2}{\pi \times (2 \times 10^{-3})^2} = 1.59 \times 10^5\,[\mathrm{A/m^2}]$

$$v = \frac{J}{\rho_v} = \frac{1.59 \times 10^5}{8.5 \times 10^{28} \times 1.602 \times 10^{-19}} = 1.17 \times 10^{-5}\,[\mathrm{m/s}]$$

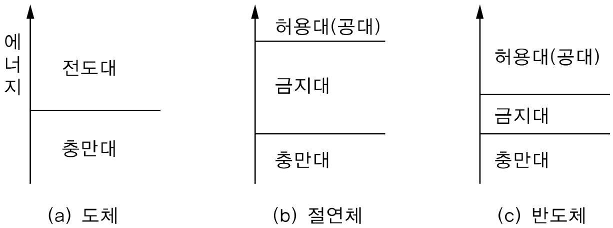
(d) $E = \frac{V}{d} = \frac{IR}{d} = \frac{2 \times 10}{7285} = 2.75 \times 10^{-3}\,[\mathrm{V/m}]$

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{1.59 \times 10^5}{2.75 \times 10^{-3}} = 5.8 \times 10^7\,[\mathrm{S/m}]$$

(e) $P = VI = I^2 R = 2^2 \times 10 = 40\,[\mathrm{W}]$

coffee break

대 이론(band theory)은 전기전도성의 관점에서 물질을 분류할 때 일반적으로 이용되는 이론이다. 자유공간에서와는 달리 물질 내의 전자는 에너지를 연속적으로 취할 수 없으며, 양자 상태에 따라 불연속적인, 즉 이산적(discrete)인 값만을 취할 수 있다. 즉, 물질 내의 전자에너지의 크기는 자신이 존재하는 궤도의 상태에 따라 다르며, 전자궤도의 상태가 불연속적이므로 전자의 에너지도 불연속적이다. 따라서 취할 수 있는 에너지의 크기가 양자화되어 있다고 생각하면 된다. 이를 '전자의 에너지 준위(energy level)'라 한다. 한편, 많은 수의 원자들이 서로 밀집하게 배열되어 있는 물질의 경우, 전자들은 상호 작용으로 인하여 넓은 에너지 폭을 가지는 에너지대(energy band)를 형성하게 된다. 각각의 에너지대는 간격이 매우 좁은 다수의 이산적 에너지 준위로 구성된다. 전자들은 일반적으로 가장 낮은 에너지 준위부터 한 개씩 채워지며, 이러한 전자의 에너지대 구조(band structure)에 따라 물질의 전기적 성질이 달라진다. 물질의 에너지대 구조는 전자가 취할 수 있는 에너지대와 그렇지 못한 에너지대가 있으며, 이를 각각 '허용대' 및 '금지대(forbidden band)'라 한다. 만약 그 물질의 원자 및 전자 구조상 허용대가 필요한 수의 전자로 완전히 채워져 있으면 '충만대(filled band)'라 하고 허용은 되지만 비어 있으면 '공대(empty band)'라 한다.



[그림 3-3] 절대 영도에서의 도체, 절연체, 반도체의 대 구조
도체의 경우 허용대의 일부분만 전자로 채워져 있고 나머지 부분은 비어 있으며, 절연체와 반도체는 동일한 대 구조를 가지지만 절연체가 반도체에 비해 금지대의 폭이 매우 크다.

금속의 에너지대의 구조는 충만대와 그 상부의 에너지대에 허용대가 있지만 완전히 차지 않은 구조로 되어 있으며, 이를 '전도대(conduction band)'라 한다. 즉, 전도대 내의 전자는 허용대의 일부분만 점유하고 있는 상태이므로, 그 이동에 금지대의 작용이 전혀 없는 상태이다. 따라서 전계를 가하면 에너지를 얻은 전자는 쉽게 더 큰 에너지 준위로 옮겨 갈 수 있다. 그러나 절연체와 반도체의 경우 전자가 이동하기 위해서는 금지대 폭에 해당하는 에너지를 외부에서 얻어야만 하며, 이는 반도체에 비해 절연체가 매우 크다. 원소 반도체인 Ge의 경우 금지대 폭은 약 $0.67\,eV$ 정도이지만 절연체인 KCl의 경우 무려 $10\,eV$ 정도로 알려져 있다. 절연체와 같이 전기가 잘 통하지 않은 물질의 금지대 폭이 크다는 사실은 궤도전자에 대한 원자핵의 구속력이 매우 강하고 외부의 에너지에 대하여 쉽게 전리되지 않기 때문에 물질 내부의 자유전자의 생성을 기대하기 어렵다고 이해하면 된다.

금지대 폭이란 공유결합을 하는 원소반도체에서 전자가 그 결합에서 이탈하여 물질 내를 운동하는 데 필요한 에너지라 생각하면 된다.

예제 3-5

옴의 법칙으로부터 $J=\sigma E$를 유도하라.

풀이

$$J=\frac{I}{S}=\frac{V/R}{S}=\frac{V}{RS}=\frac{V}{\rho\frac{d}{S}S}=\frac{1}{\rho}\frac{V}{d}=\sigma E$$

이다. 위 식에서 ρ는 저항율(resistivity)로 도전율 σ의 역수이며, d는 전류통로의 길이, 즉 도체의 길이, 그리고 S는 전류통로의 수직 단면적이다.

3.4 반도체

Q 반도체의 전기전도현상에 대해 설명해주세요.

A 도체의 경우 원자핵은 결정격자를 형성하여 움직일 수 없고, 전자만이 캐리어로 작용하게 됩니다. 그러나 반도체는 도체와 달리 전자와 홀이 전기전도를 하는 전도성 캐리어가 됩니다. 특히 불순물을 첨가하여 전자가 전기전도를 지배하는 n형 반도체와 홀이 전기전도의 주체가 되는 p형 반도체를 많이 사용하고 있습니다.

도체의 경우 전기를 통하게 하는 주체는 전자이다. 원자의 핵은 서로 정해진 위치에서 결합되어 움직일 수 없으며, 외부에서 에너지를 얻어도 그 자리에서 약한 진동을 할 뿐, 전기를 전도하지 못한다. 따라서 하전입자 또는 캐리어(carrier)는 전자였지만, Si나 Ge과 같은 원소 반도체에는 전자와 정공의 두 종류의 캐리어가 있다. Ge과 같은 원소 반도체는 서로 공유결합을 하고 있으며 이에 에너지를 인가할 경우, 전자가 공유결합에서 이탈하여 금지대 폭을 넘어 허용대로 이동한다. 따라서 허용대는 전도대가 되고, 이보다 하부의 에너지대인 가전자대에는 전자의 이동에 의해 정공(hole)이 발생한다.

이러한 전자와 정공의 발생을 가능하게 하는 에너지가 Si나 Ge의 경우 각각 금지대 폭인 $1.12\,e\mathrm{V}$와 $0.67\,e\mathrm{V}$ 정도이다. 따라서 정공은 전자가 빠져나간 빈자리에 불과하지만 전자와 같은 크기의 반대 부호를 가진 전하량과 유효질량, 그리고 이동도를 인정함으로써 반도체의 전기전도현상에 대한 설명이 가능하다. 전계를 인가하면 발생된 정공과 전자는 각각 전계 방향 및 전계와 반대 방향으로 이동하게 되며, 전자의 전하량이 음(−)인 점을 고려하면 전류의 방향은 서로 같은 방향이 되어 전기전도가 일어난다. 진성반도체(intrinsic semiconductor)의 경우 발생된 전자의 수만큼 정공이 발생하므로 정공의 체적전하밀도와 이동도를 각각 ρ_h 및 μ_h라 하면 도전율은 다음과 같다.

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{3.24}$$

도체의 경우 온도가 증가하면 전자의 산란작용이 증가하여 저항이 증가한다. 즉, 금속도체의

저항의 온도계수는 양(+)이다. 그러나 반도체는 온도가 증가하면 이동도는 감소하지만 공유 결합에서 이탈하는 전자의 개수가 증가하고 당연히 정공도 증가하게 되어 저항은 감소하는 성질을 가지고 있다. Si의 경우 온도가 $300\,\mathrm{K}$에서 $330\,\mathrm{K}$이 됨에 따라 도전율은 약 10배 정도 증가한다. 즉, 저항율이 $\frac{1}{10}$로 감소한다는 뜻이다. 절연체도 금지대 폭은 반도체에 비해 매우 크지만 저항의 온도계수는 반도체와 마찬가지로 음(−)이며, 이러한 경향은 그 물질의 대 구조에 의해 쉽게 설명된다.

한편, 이러한 원소 반도체에 As와 같은 5가의 불순물을 도핑(doping)하면, 불순물은 전도대 바로 아래에 불순물 준위를 형성하여 전도대에 전자를 공급하는 도너(donor)의 역할을 하게 된다. 즉, 진성반도체의 금지대 폭에 해당하는 에너지보다 작은 에너지를 얻어도 전도대에 전자를 집중적으로 공급하게 되어 전자의 수가 극단적으로 증가하며, 정공은 소수의 상태이다. 이를 'n형 반도체'라 한다. 이와는 반대로 In과 같은 3가의 불순물을 첨가하면 불순물은 가전자대로부터 전자를 받아들이는 억셉터(acceptor)의 역할을 하게 되어 불순물 준위에 전자를 준 가전자대는 많은 정공이 발생하게 되는 'p형 반도체'가 된다. 이러한 불순물 반도체의 도전율은 온도 및 불순물 농도에 따라 다르지만 진성반도체에 비해 10^5배 이상 증가하는 경우도 있다.

3.5 유전체

Q 자유공간에 비하여 유전율 ε의 유전체는 정전용량이 ε_R배라는 말은 무슨 의미인가요?

A 정전용량이 ε_R배가 된다는 것은 동일 전하에 대한 전위차가 $\frac{1}{\varepsilon_R}$배이며, 따라서 동일 전하에 대한 전계가 자유공간에 비하여 $\frac{1}{\varepsilon_R}$배가 된다는 뜻입니다. 또한 절연물은 간단히 전하의 발생을 억제하는 성질만 가진 것이 아닙니다. 주어진 에너지 조건하에서 여러 가지의 전기적 현상을 발생하게 되며, 특히 전계하에서의 유전 분극 현상의 관점에서 절연체를 유전체라고 합니다.

3.5.1 분극

전기가 통하지 않는 부도체는 일반적으로 도체와 도체 사이에 사용되어 전기적 흐름을 끊는다는 의미에서 '절연체(insulating material)'라 부르기도 한다. 또한 절연체에 전압을 인가하면 전계에 의해 절연체의 원자 또는 분자가 유전분극(polarization)현상을 일으키는데, 이러한 관점에서 절연체를 '유전체(dielectric)'라 하기도 한다.

유전체 또는 절연체에는 전압을 인가하여도 원자로부터 전자가 분리되는 전리 현상이 쉽게 일어나지 않는다. 다만 전자가 전계와 반대 방향으로 약간의 변위를 일으키며 궤도운동을 하게 된다. 이와 같이 전계에 의해 하전입자가 약간의 위치적 변화(변위 : displacement)를 일으키는 현상을 '분극'이라 한다.

원자가 분극을 하게 되면 같은 크기의 양(+)전하와 음(−)전하가 매우 가까운 거리에 위치하게 되는데, 이러한 전하를 '전기쌍극자(electric dipole)'라 한다. 즉, 유전체에 전압을 인가하면 매우 많은 전기쌍극자(다극자)가 발생하는 분극을 일으키게 되며, 결국 유전체의 여러 가지 성질은 이러한 분극현상에 기초하게 된다. 즉 유전체에서는 분극된 전하, 다시 말하여 속박전하(bounded charge)의 존재로 인해 자유공간에서의 $\mathrm{D} = \varepsilon_0 \mathrm{E}$와는 달리 전계와 전속밀도의 새로운 관계가 필요하다.

속박전하
평행평판 콘덴서와 같이 전극 사이에 유전체가 있는 경우, 전압을 인가하면 전극에는 $Q = CV$만큼의 전하가 축적되는 한편, 유전체 내부에는 분극이 발생한다. 이때, 전극에 축적되는 전하와 분극전하는 서로 반대 극성이 되어 쿨롱의 인력에 의해 서로를 속박하게 된다. 이를 '속박전하'라 하며, 속박전하는 분극되는 정도에 따라 다르다.

다극자(multipoles)
많은 수의 양과 음의 점전하가 대칭적으로 배열된 상태를 말한다.

지금 d 떨어진 $+Q$와 $-Q$의 쌍극자에서 $-Q$에서 $+Q$로 향하는 선분벡터를 d라 하면 쌍극자모멘트(dipole moment) p는

$$\mathrm{p} = Q\mathrm{d} \tag{3.25}$$

로 정의한다. 쌍극자모멘트의 단위는 $\mathrm{C \cdot m}$이다. 이러한 쌍극자가 단위체적당 n개 있다면 미소체적 Δv에는 $n\Delta v$개의 쌍극자가 있으므로, Δv 내의 쌍극자모멘트의 합 p_{total}은

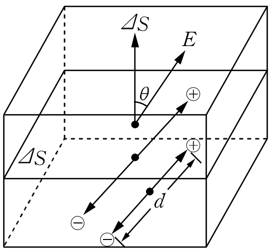
$$\mathrm{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathrm{p}_i$$

이다. 한편, 단위체적당의 쌍극자모멘트의 합을 분극벡터 P라 하면

$$\mathrm{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathrm{p}_i \tag{3.26}$$

이다. 이 분극벡터의 단위는 체적당의 분극이므로, 분명히 $\mathrm{coulomb/m^2}$이 된다.

이제 우리의 최대의 관심사인 **분극현상에 의한 전하와 전계와의 관계를 알아보자**. 즉, 유전분극을 하는 유전체에서 속박전하가 일으키는 전계에 대하여 알아보기로 하자.



[그림 3-4] 전계에 의한 쌍극자모멘트의 형성
전계를 인가하면 분극전하가 이동하여 쌍극자모멘트가 발생한다.

전계를 가하기 이전에는 분극하지 않아 쌍극자모멘트가 없으므로 $\mathrm{P} = 0$인 유전체에 [그림 3-4]와 같이 $\Delta \mathrm{S}$와 θ의 방향으로 전계 E를 인가한다. 이 전계에 의해 각 원자는 $\mathrm{p} = Q\mathrm{d}$의 쌍극자모멘트를 생성하며, 이 모멘트의 생성은 속박전하의 이동을 의미한다. 지금 그림에 표

시한 바와 같이 분극에 의해 ΔS를 통과하는 속박전하는 ΔS에 수직한 방향으로 $\frac{1}{2}d\cos\theta$ 만큼 이동하게 되며, 단위체적당 n 원자가 있음을 고려하면 $n\Delta v = nd\cos\theta\,\Delta S$개의 원자가 분극하여 양과 음의 전하가 각각 반대 방향으로 이동하게 된다. 즉, ΔS의 위쪽 방향으로 $nQ\frac{1}{2}d\cos\theta\,\Delta S$만큼 이동하고, 반대 방향으로 $-nQ\frac{1}{2}d\cos\theta\,\Delta S$만큼 이동하게 된다. 따라서 ΔS를 통과하는 총 속박전하량 ΔQ_b는

$$\Delta Q_b = nQ\mathbf{d} \cdot \Delta\mathbf{S}$$

가 된다. 이 식의 $nQ\mathbf{d}$는 단위체적당 쌍극자모멘트의 총합을 의미하므로, 분극벡터 $\mathbf{P}$가 된다. 즉,

$$\Delta Q_b = \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{S}$$

이다. 이제 이러한 개념을 미소체적소 Δv에서 물질 전체로 확장하여 생각해보면, 위 식만큼 임의의 폐곡면 바깥으로 나가므로 폐곡면 내의 속박전하의 순 증가량은

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.27}$$

로 주어진다. 결국 유전체에서의 분극현상으로 인하여 전하에는 속박전하와 자유전하가 있을 수 있으므로, 총 전하Q_T는

$$Q_T = Q_f + Q_b = Q + Q_b$$

로 표시될 수 있다. 자유전하 Q_f는 Q로 표시하였다. 이제 가우스의 법칙을 적용하면 임의의 유전체의 유전율을 ε이라 할 때, 유전체에서의 자유전하 Q는

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

이며, 여기서 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$이다. 한편 총 전하량 Q_T의 경우

$$Q_T = \oint \varepsilon_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.28}$$

이므로

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \tag{3.29}$$

이다. 따라서

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.30}$$

의 관계를 얻는다.

유전체 중에서 강유전성을 가지는 강유전체(ferroelectric material)는 강자성체에서와 같이 전계와 분극 사이에 비선형적인 관계 및 이력효과(hysteresis effect)를 나타낸다. 그러나 전계와 분극이 선형관계를 가지는 등방성 물질의 경우

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{3.31}$$

의 관계가 성립하며, χ_e는 전화율 또는 전기감수율(electric susceptibility)로써, 위 식으로부터 $\dfrac{P}{\varepsilon_0 E}$의 개념으로 자유전하에 대한 분극전하, 즉 속박전하의 비율을 나타낸다. 또한 위 식 (3.30)으로부터

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

이며 물질의 유전율 ε과 자유공간의 유전율 ε_0의 비, 즉

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{3.32}$$

를 비유전율(relative permittivity)이라 한다. ε_R은 유전체의 경우 일반적으로 1보다 크다. 위 두 식으로부터

$$\varepsilon_R = 1 + \chi_e \tag{3.33}$$

이다. 일반적인 범위의 온도와 주파수 영역에서는 비유전율이 물질마다 가지는 고유의 값이므로 전화율도 비유전율보다 1만큼 작은 값인 물질의 고유값으로 생각할 수 있다. 즉, 비유전율과 전화율은 그 물질의 유전적 성질을 결정하는 중요한 값이라 할 수 있다.

예제 3-6

유전체 및 절연체로 가장 많이 사용되고 있는 폴리에틸렌(polyethylene)의 비유전율은 2.26이다. 전화율 및 유전율을 구하라.

풀이

$$\chi_e = \varepsilon_R - 1 \quad \text{및} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_R$$

의 관계로부터 전화율은 1.16이며, 유전율은 약 20pF/m이다.

예제 3-7

비유전율 $\varepsilon_R = 100$인 유전체를 평행평판 전극 사이에 삽입하였다. 도체 표면의 전계가 10^3 V/m일 때, 표면전하밀도를 구하라.

풀이

전계의 세기는

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}$$

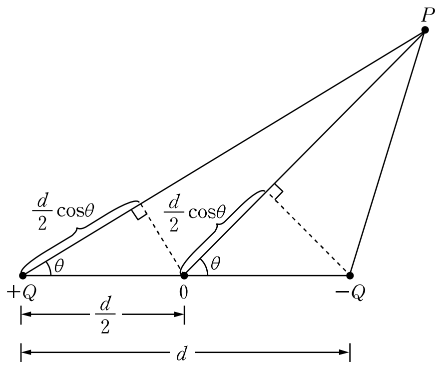
$$\therefore\ \rho_s = \varepsilon_0 \varepsilon_R E = 8.854 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^3 = 8.854 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$$

3.5.2 전기쌍극자

앞에서 설명한 바와 같이 매우 가까운 거리에 놓여 있는 $+Q$와 $-Q$의 두 전하를 '전기쌍극자'라 한다. 전기쌍극자에 의한 전계 및 전위는 크기가 같고 부호가 반대인 두 전하가 형성하는 전계의 합이므로, 떨어진 거리가 같은 모든 면에는 전계나 전위는 0이다. 즉, 전기쌍극자의 중심에는 $V=0$의 등전위면이 존재한다. 또한 $+Q$의 전하에 의한 전계 및 전위는 $-Q$의 전하에 의해 상쇄당하므로 쌍극자에 의한 전계 및 전위분포는 그렇게 크지 않다는 것을 짐작할 수 있다. 그러나 물질 내에는 많은 원자가 있고, 전도전자가 쉽게 형성되지 않는 유전체와 같은 물질의 경우 이 쌍극자에 의한 전계도 매우 유용할 때가 있다.

지금 [그림 3-5]와 같이 $+Q$와 $-Q$의 거리가 d이고, 두 전하 사이의 중심점에서부터 $r(r \gg d)$ 떨어진 점에서의 전위는

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-(d\cos\theta/2)} - \frac{1}{r+(d\cos\theta/2)}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2-(d^2\cos^2\theta/4)}
\end{aligned}
$$



[그림 3-5] 전기쌍극자에 의한 전계

전기쌍극자의 중앙에는 $V=0$의 등전위면이 형성되며, 이 밖의 영역에서는 전위 및 전계가 형성되지만 단일 점전하에 비해 매우 약하다.

이 된다. 이 식에서 $r \gg d$이므로 분모의 $\dfrac{d^2\cos^2\theta}{4}$는 매우 작은 값으로, r^2에 비해 무시하면

$$
V \doteq \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.34}
$$

의 결과를 얻는다. 전계도 구해보면

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi\right) \\
&= -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{a}_r - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{a}_\theta\right)
\end{aligned}
$$

가 된다. 정리하면

$$
\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta) \tag{3.35}
$$

를 얻는다. 이상으로 점전하의 경우 각각 거리의 1승과 2승에 역비례하여 감소하였지만 쌍극자에 의한 전위 및 전계는 거리의 2승과 3승에 역비례하는 결과를 얻어, 거리가 멀어짐에 따라 더욱 급격하게 약해짐을 알 수 있다.

한편 앞에서 정의한 쌍극자모멘트 $\mathbf{p}=Q\mathbf{d}$를 이용하면,

$$V=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.36}$$

가 되며, θ는 $\mathbf{d}$와 $\mathbf{r}$ 사이의 각이므로 다음과 같이 된다.

$$V=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.37}$$

예제 3-8

유전율 $\varepsilon=3[\mathrm{F/m}]$의 유전체 내의 한 점 $P(-3,\ -4,\ 0)$에서의 쌍극자모멘트가 $\mathbf{p}=-4\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z\ \mathrm{nC\cdot m}$이다. 원점에서의 전위를 구하라.

풀이

쌍극자에 의한 전위는 식 (3.37)로부터

$$\mathbf{r}=3\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y$$

이고, 단위벡터는

$$\mathbf{a}_r=0.6\mathbf{a}_x+0.8\mathbf{a}_y$$

이므로

$$V=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{(-4\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z)\cdot(0.6\mathbf{a}_x+0.8\mathbf{a}_y)}{4\pi\times3\times(\sqrt{3^2+4^2})^2}\times10^{-9}=1.7\times10^{-12}\,V$$

coffee break

물질을 구성하는 원자의 지름은 그 원자의 양자 상태에 따라 다르지만 대체적으로 약 1Å 정도이다. 원자핵은 α입자(He 원자의 양이온)의 산란 실험의 결과 약 10^{-15}m 정도로 밝혀졌다. 따라서 이러한 원자에 전계를 인가하여 전기적 힘에 의해 전자 및 원자핵이 약간의 위치적 이동을 하였다면 서로의 거리는 너무나 작은 값이며, 이를 전기쌍극자의 대표적인 예라 할 수 있을 것이다. 실제로 물질에 전계가 인가되면 각 원자들이 분극하여 쌍극자를 형성하게 되며, 이를 '다극자(multipole)'라 한다. 다극자에 의한 전위 및 전계는 떨어진 거리의 높은 차수에 비례하여 약해지게 될 것이다.

Section

3.6 경계조건

Q 유전체와 또 다른 유전체가 경계를 이루는 경우는 어떤가요?

A 전기기기의 소형화 및 대용량화의 관점에서 보면 절연재료에 부가되는 전기적인 스트레스가 매우 큽니다. 따라서 절연재료는 뛰어난 전기적인 절연성뿐만 아니라 우수한 기계적 강도도 필요합니다. 이 경우 전기적 특성이 우수한 유전체와 기계적인 특성이 우수한 유전체를 성층하여 사용하게 되므로, 두 유전체의 경계에서의 전계 등이 관심이 될 수 있습니다. 이 밖에 좀 더 안전한 절연설계를 위하여 고체절연물을 액체 절연물 속에 함침하여 사용하는 경우도 있습니다. 그런데 이 경우 액체절연물이 전극과 고체절연물 사이에 조금이라도 끼어들면 고체와 액체 절연물이 경계를 이루게 됩니다.
어느 경우이든 두 유전체의 유전율 차이에 의해 인가되는 전계가 다르므로, 매우 중요한 결과를 초래하게 됩니다.

3.6.1 도체와 자유공간의 경계조건

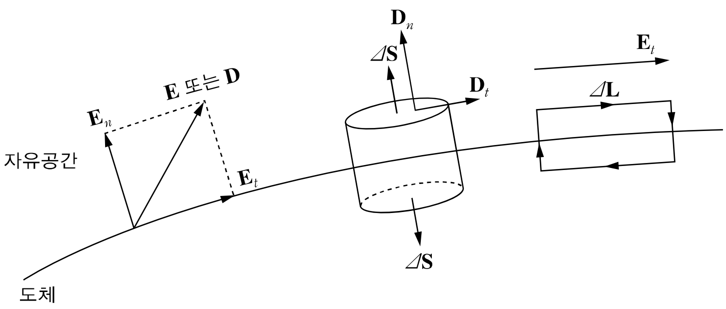
자유공간에 놓여 있는 도체 내에 어떠한 이유로 의해 동극성의 전하가 발생하면 쿨롱의 힘에 의해 서로 밀려나 도체 표면까지 이동하게 된다. 자유공간은 전기가 통하지 않는 절연공간이므로 도체 표면까지 이동해 온 전하는 자유공간으로는 더 이상 이동하지 못하고 도체와 자유공간의 경계면에 머물러 있게 된다. 즉, 도체 내부에는 전하가 0이 되며, 결국 전하는 도체의 표면에 표면전하밀도의 형태로 존재하게 된다. 따라서 도체 내부의 전계는 0이 되고, 전계는 도체와 자유공간의 경계에 형성될 것이다.

앞에서 도체에 표면전하밀도가 분포되어 있는 경우의 전계해석에 대해 배웠다. 맥스웰 방정식을 이용하지 않고, 그 결과를 예측해 보라.

경계조건은 이러한 도체와 절연체(자유공간) 경계에서의 전계 또는 전속밀도에 대한 정보를 얻는 것이 목적이며, 이는 맥스웰 방정식을 이용하여 간단히 해결할 수 있다.

[그림 3-6]과 같이 도체와 자유공간의 경계면에 임의의 방향으로의 전계와 전속밀도가 형성되어 있다고 가정해보자. 전계와 전속밀도는 경계면에 수직한 성분과 접한 성분으로 나눌

수 있다. 경계면에 수직한 법선 성분을 각각 E_n, D_n, 그리고 접선 성분을 E_t, D_t라 하자.



[그림 3-6] 도체와 자유공간의 경계조건
적분형 맥스웰 방정식으로 경계면에서의 전계 및 전속밀도의 성질을 알 수 있다.

우선 접선 성분에 대한 정보를 얻기 위하여 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$을 적용해보자. 선적분은 폐경로에 대한 적분이며, 따라서 경계면을 중심으로 그림과 같이 폐경로를 설정하여 적분하면 된다. 즉,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 = 0$$

이 되며, 도체 내에서는 전계 및 전속밀도가 없으므로

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_t \Delta L - E_{n2}\frac{1}{2}\Delta h + E_{n1}\frac{1}{2}\Delta h = 0$$

이 된다. 이 식의 E_{n1} 및 E_{n2}는 각각 폐경로의 경로 1과 2에서의 전계이며, 도체와 자유공간의 경계에서의 문제라는 것을 고려하여 사실상 $\Delta h = 0$이라는 것을 생각하면

$$E_t \Delta L = 0$$

이 되므로

$$E_t = 0 \tag{3.38}$$

이 된다. 즉, 이 선적분을 적용해 보면 전계의 법선 성분의 항은 모두 0이 되고, 결국 접선 성분에 대한 정보를 얻게 되며, 법선 성분에 대한 것은 가우스의 법칙

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

을 이용하여 구할 수 있다. 이 적분 역시 폐면적에 대한 적분이므로, 경계면을 중심으로 그림과 같은 원통을 가정하여 원통의 윗면과 아랫면, 측면에 대한 적분을 행하면 된다. 즉,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{윗면}} + \int_{\text{아랫면}} + \int_{\text{측면}} = Q$$

이 되지만, 도체 내부에 전속밀도가 없으며, 또한 경계에서의 문제임을 생각하여 아랫면과 측면에서의 적분을 0으로 처리하면 적분은 윗면에서만 행하면 된다. 결국

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S = Q = \rho_s \Delta S$$

로부터

$$D_n = \rho_s \tag{3.39}$$

의 관계를 얻을 수 있다. 이상의 경계조건을 정리하면, 정전계에서 전계의 접선 성분이 0이므로 전속밀도의 접선 성분 또한 0이 된다. 즉,

$$D_t = E_t = 0$$
$$D_n = \varepsilon_0 E_n = \rho_s$$

이다. 그리고 이 결과는 사실상 우리가 이미 알고 있는 결과이다. 전계의 접선 성분이 0이라는 것은 전계의 방향은 도체 표면에 반드시 수직하며, 이는 도체 표면이 등전위면(equipotential surface)이므로 도체 표면에서는 전위차가 없음을 의미한다. 따라서 도체와 자유공간의 경계면에서의 전계의 접선 성분은 0이 될 수밖에 없다.

예제 3-9

$V = 2(x+y)$ [V]일 때, 도체와 자유공간의 한 점 (1, 1, 4)에서의 표면전하밀도 ρ_s를 구하라.

풀이

$\mathbf{E} = -\nabla V = -2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$이므로 전속밀도는

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = -17.7\mathbf{a}_x - 17.7\mathbf{a}_y$$

가 된다. 전계와 전속밀도 모두 경계면에 수직한 성분만 존재하므로 표면전하밀도는

$$\rho_s = D_n = \sqrt{(-17.7)^2 + (-17.7)^2} = 25.03$$

이 된다.

3.6.2 도체와 유전체의 경계조건

도체와 유전체와의 경계조건도 도체와 자유공간의 경계조건에서와 같이 두 맥스웰 방정식의 적분형을 이용하여 구할 수 있다. 즉, 전계 및 전속밀도의 접선 성분과 법선 성분에 대한 정보를 얻기 위하여 각각 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$과 $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$을 이용하면

$$E_t = 0 \tag{3.40}$$

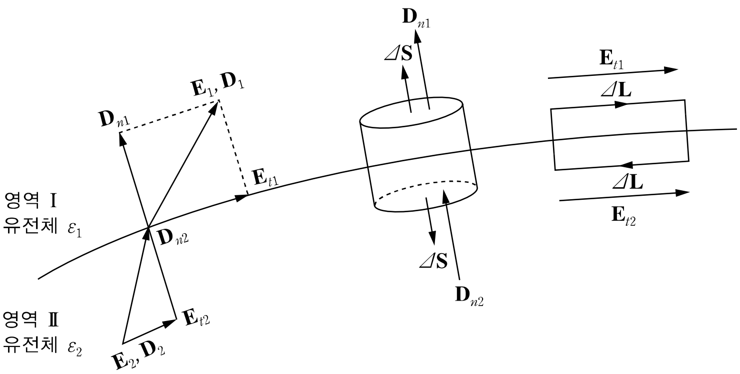
$$D_n = \varepsilon E_n = \rho_s \tag{3.41}$$

의 관계를 얻을 수 있다. 앞에서의 도체-자유공간의 경계조건에서의 ε_0를 ε으로 대체하면 이와 같은 조건을 얻을 수 있다. 또한 이 경우에도 도체-자유공간에서와 마찬가지로 도체 내부에 전계 및 전속밀도가 존재하지 못하며, 전계의 법선 성분은 0으로, 이는 전극(도체)에서 항상 수직한 방향으로 전계 및 전속밀도가 형성된다는 기본적 사실과 부합된다.

3.6.3 유전체와 유전체의 경계조건

유전체는 전기가 통하지 않는 절연체이므로, 절연파괴라는 특수한 상황을 제외하면 자유전하의 발생은 생각할 수 없다. 따라서 유전율이 각각 ε_1, ε_2인 두 개의 완전 유전체가 경계를 이루고 있다고 생각한다.

전계가 매우 강하다는 이유로 유전체 내부의 원자가 전리되어 전자 및 양이온이 발생하는 상황이 아니라면, 유전체 내부에는 전하가 없다고 생각할 수 있다. 또한 전계가 강하여 전리작용이 발생하면 유전체는 더 이상 절연체가 아니다.



[그림 3-7] 유전체와 유전체의 경계조건
완전 유전체 사이의 경계면에는 전하가 없으므로 $D_{n1} = D_{n2}$ 및 $E_{t1} = E_{t2}$을 얻을 수 있다.

우선 전계 및 전속밀도의 접선 성분을 알기 위하여

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

을 적용하면 [그림 3-7]로부터

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

이 된다. 두 번째와 네 번째 항은 전계와 적분경로가 서로 수직하여 0이 되므로, 경계면에 대하여 전계의 접선 성분을 각각 E_{t1} 및 E_{t2}라 하면, 위 식은

$$E_{t1}\Delta L - E_{t2}\Delta L = 0$$

이 되어 전계 및 전속밀도의 접선 성분에 대하여

$$E_{t1} = E_{t2} \tag{3.42}$$

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} \tag{3.43}$$

의 경계조건을 얻을 수 있다.

한편, 전계와 전속밀도의 경계면에 수직한 법선 성분을 영역 1과 2에서 각각 E_{n1} 및 E_{n2} 또는 D_{n1} 및 D_{n2}라 하면, 가우스의 법칙으로부터

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{윗면}} + \int_{\text{아랫면}} + \int_{\text{측면}} = Q$$

에서 측면은 생각할 필요가 없으므로

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = Q = \rho_s \Delta S$$

이다. 그러나 이미 언급한 바와 같이 완전 유전체이므로 경계면에 축적되는 전하가 없다. 따라서 위 식은

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = 0$$

이 되어

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{3.44}$$

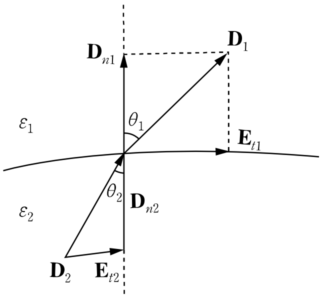
또는

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \tag{3.45}$$

의 경계조건을 얻는다. 이 결과는 매우 중요한 실용적 의미를 가진다. 즉, 유전율이 다른 두 유전체가 경계를 이루고 있는 경우, 전압을 인가하면 유전율이 작은 유전체에 더 큰 전계가 형성된다.

또한 이 경우 전극을 통하여 전압을 인가함으로써 전계가 형성되었으므로, 경계면은 전극인 도체와 유전체, 그리고 유전체와 유전체의 경계로 구성된다. 그런데 앞에서 논의한 바와 같이 도체와 유전체의 경우 전계는 반드시 도체에 수직하므로 유전체-유전체의 경계면에서도 전계는 사실상 경계면에 수직한 성분만이 존재한다고 할 수 있다.

경계조건을 활용하면 경계면에서 좀 더 많은 정보를 얻을 수 있다.



[그림 3-8] 전속밀도의 입사각에 대한 고찰
경계조건을 이용하면 두 유전체의 유전율의 차에 따라 입사각이 결정된다는 것을 알 수 있다.

[그림 3-8]과 같이 전속밀도 D_1, D_2가 경계면의 법선에 대하여 각각 θ_1, θ_2의 각을 이루고 있다면 경계조건에 의해 $D_{n1} = D_{n2}$이므로

$$D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 \tag{3.46}$$

이며, 또한 $E_{t1} = E_{t2}$의 조건에서

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$$

이므로

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{3.47}$$

가 된다. 이 두 식으로부터

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{3.48}$$

의 관계를 얻을 수 있으며, 만약 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$라면 $\theta_1 > \theta_2$가 된다. 또한 이러한 각의 관계로부터 영역 2의 전속밀도를 구할 수 있다. 우선

$$D_2 = \sqrt{D_{n2}^2 + D_{t2}^2} = \sqrt{(D_2 \sin\theta_2)^2 + (D_2 \cos\theta_2)^2}$$

이며, 경계조건으로부터 유도된 두 식

$$\varepsilon_2 D_1 \sin\theta_1 = \varepsilon_1 D_2 \sin\theta_2$$
$$D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2$$

을 이용하여 계산하면

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \tag{3.49}$$

또는 식 (3.50)이 된다.

$$E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1} \tag{3.50}$$

예제 3-10

$z < 0$ 영역에 $\varepsilon_{R1} = 2$, $z > 0$인 영역에는 $\varepsilon_{R2} = 4$인 유전체가 경계를 이루고 있다. $\mathbf{E}_1 = 30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 40\mathbf{a}_z\,[\mathrm{V/m}]$일 때 경계조건을 이용하여 $\mathbf{E}_2$를 구하라.

풀이

우선 경계면이 $z = 0$인 평면이므로, 영역 1에서의 전계의 법선 성분은

$$E_{n1} = E_{z1} = 40\,\mathrm{V/m}$$

이다. 또한, 두 유전체의 경계조건 $D_{n1} = D_{n2}$ 또는 $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$으로부터

$$E_{n2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{n1}=\frac{\varepsilon_{R1}}{\varepsilon_{R2}}E_{n1}=20\,[\mathrm{V/m}]\ \text{ 또는 }\ \mathbf{E}_{n2}=20\mathbf{a}_z$$

이다. 따라서 법선 성분을 제외한 부분이 영역 1에서의 접선 성분이 되며, 경계조건 $E_{t1}=E_{t2}$임을 생각하면

$$\mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_{n1}=30\mathbf{a}_x+50\mathbf{a}_y\,[\mathrm{V/m}]=\mathbf{E}_{t2}$$

이다. 따라서 영역 2의 전계는 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_2=30\mathbf{a}_x+50\mathbf{a}_y+20\mathbf{a}_z\,[\mathrm{V/m}]$$

예제 3-11

위 예제에서 영역 2에서의 분극벡터 $\mathbf{P}_2$를 구하라.

풀이

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{D}_2-\varepsilon_0\mathbf{E}_2=\mathbf{D}_2-\varepsilon_0\frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2}=\mathbf{D}_2\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{R2}}\right)=\frac{3}{4}\mathbf{D}_2$$

가 되며, 영역 2에서의 전속밀도를 구하면 경계조건에 의해

$$D_{n2}(=D_{z2})=D_{n1}=\varepsilon_1E_{n1}=\varepsilon_0\varepsilon_{R1}E_{n1}=0.7\,[\mathrm{nC/m^2}]$$
$$\mathbf{D}_{t2}=\varepsilon_2\mathbf{E}_{t2}=\varepsilon_2\mathbf{E}_{t1}=\varepsilon_2(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_{n1})=\varepsilon_0\varepsilon_{R2}(30\mathbf{a}_x+50\mathbf{a}_y)=1.1\mathbf{a}_x+1.77\mathbf{a}_y\,[\mathrm{nC/m^2}]$$
$$\therefore\ \mathbf{D}=1.1\mathbf{a}_x+1.77\mathbf{a}_y+0.7\mathbf{a}_z\,[\mathrm{nC/m^2}]$$

이다. 따라서 분극은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{P}_2=\frac{3}{4}\mathbf{D}_2=0.83\mathbf{a}_x+1.33\mathbf{a}_y+0.53\mathbf{a}_z$$

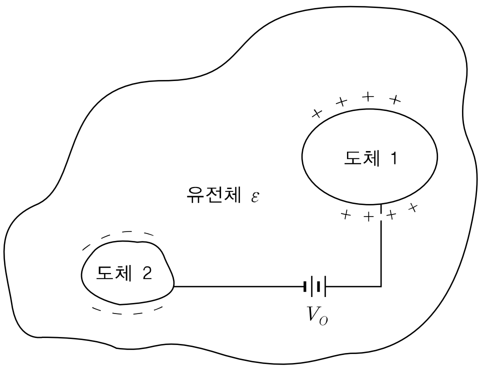
3.7 정전용량

Q 동축 커패시터에서 정전용량을 논할 수 있는 영역에 대해 설명해주세요.

A 정전에너지가 축적되는 대표적인 경우는 커패시터에 저장되는 에너지입니다. 정전에너지는 이미 공부하였듯이 전계가 없으면 에너지가 축적될 수 없으며, 정전용량은 그 공간에 축적할 수 있는 에너지를 결정합니다. 따라서 내부 도체의 내부나 외부 도체의 외부 영역에는 전계가 없기 때문에 정전용량을 구할 수 없습니다. 결국 동축케이블의 경우 정전용량은 내·외부 도체의 중간 영역에서 정의될 수 있으며, 의미를 가진다고 볼 수 있습니다.

[그림 3-9]와 같이 두 도체 사이에 유전율 ε의 균질한 매질이 있고, 두 도체에는 각각 Q와 $-Q$의 전하가 분포되어 있다고 하자. 또한 두 도체 사이에는 V_0의 전위차가 발생하였다면 두 도체 사이의 정전용량 또는 커패시턴스(capacitance) C는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{3.51}$$



[그림 3-9] 전위 V로 연결된 두 도체와 정전용량
두 도체는 유전율 ε의 유전체로 둘러싸여 있으며, 전하량과 전위차의 비가 정전용량이다.

이다. 어떤 도체계의 커패시턴스, 즉 정전용량은 저항 R, 인덕턴스 L과 함께 중요한 회로정

수 중 하나이지만, 물성적 관점에서 보면 단위전압을 인가하였을 때 축적되는 전하량이라 할 수 있다. 즉, 전하량을 전압으로 나누었으므로 1[V] 인가하였을 때 축적되는 전하량이 되는 것이다. 또한 정전용량은 도체계에 전압을 인가하면 전하가 축적되는데, 이때 축적되는 전하량은 인가한 전압에 비례하며, 정전용량은 그 비례상수라고 생각할 수 있다.

정전용량은 반드시 에너지가 축적되는 공간, 즉 전위의 차가 있고 따라서 전계가 발생되어 있는 공간에서 정의될 수 있다.

인덕턴스(Inductance)

주어진 전류와 이에 의해 발생하는 자속의 비, 즉 인덕턴스 L은 자속을 ϕ라 할 때 $L = \frac{\phi}{I}$로 주어진다.

회로정수(circuit constant)

회로 파라미터, 회로를 구성하는 요소에 결부된 물리량이나 속성의 값을 말한다.

이러한 정전용량은 두 도체 사이의 유전체의 유전율 ε과 그 도체계의 형상에 관련된 상수 K의 곱에 의존하며, 인가해 준 전압의 크기와는 무관한 상수이다. 만약 전위차가 증가하면 전계 및 전속밀도도 증가하며, 가우스 법칙에 의해 전하량도 비례적으로 증가하므로, 전하량과 전위차의 비로 정의되는 정전용량에는 아무런 변화가 없다. 이러한 개념하에 정전용량은 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉

$$C = \frac{\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \tag{3.52}$$

이며, 만약 평행평판 도체계의 전극의 간격이 d이고 면적이 S라면

$$C = \varepsilon K = \varepsilon \frac{S}{d} \tag{3.53}$$

로 주어진다. 전극 사이의 유전체로 유전율 ε_0의 자유공간을 생각하면 이때의 정전용량 C_0는 다음과 같으며, 이를 '기하용량(geometrical capacitance)'이라 한다.

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{3.54}$$

한편 정전용량을 에너지의 관점에서 보면 평행평판 도체계의 경우, 축적에너지 W는

$$W = \frac{1}{2} CV = \frac{1}{2} QV^2 \tag{3.55}$$

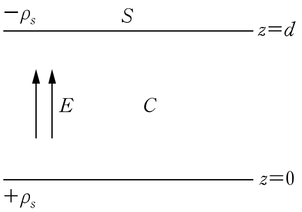
의 관계에서

$$C = \frac{2W}{V} \tag{3.56}$$

의 관계가 있다. 한편, 정전용량의 단위는 그 정의로부터 쿨롱/볼트(Coulomb/Volt, C/V)임을 알 수 있으며, 실용단위로 패럿(farad, F)을 사용한다. 즉, 1[F]는 1[C/V]이다.

다음으로 각종 도체계에 대한 정전용량을 구해보자.

우선 가장 많이 사용되고 있는 **평행평판 도체의 정전용량을 구해보자.** [그림 3-10]과 같이 무한히 넓고 전극의 간격이 d인 도체 사이에 유전율 ϵ의 유전체를 삽입하였다. 실제 전극의 면적은 S이지만 전극의 끝단부의 각종 효과를 무시하고, 전극의 간격에 비해 면적이 매우 넓기 때문에 사실상 전계나 전하분포는 전면적에 대하여 거의 균일하다고 볼 수 있다.



[그림 3-10] 평행평판 콘덴서의 정전용량
전극의 면적이 매우 넓지만 일정한 크기라는 것을 가정하면 정전용량을 구할 수 있다.

우선 전위 $V = V_0$를 인가하면 양 전극에는 각각 $+\rho_s$와 $-\rho_s$의 전하밀도가 생긴다. 이에 의한 전계는

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}\mathbf{a}_z$$

이다. 두 도체 사이의 전위를 표현해보면

$$V_0 = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_s}{\varepsilon} dz = \frac{\rho_s}{\varepsilon} d$$

이다. 전극판에 축적되는 전하량은

$$Q = \int \rho_s dS = \rho_s S$$

이므로 정전용량은

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \tag{3.57}$$

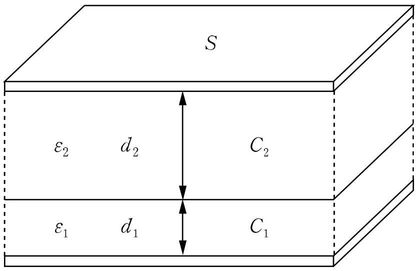
가 된다. 이 커패시터에 축적되는 총 에너지는

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^d \int_0^S \varepsilon \frac{\rho_s^2}{\varepsilon^2} dS\, dz = \frac{1}{2}\frac{\rho_s^2}{\varepsilon} Sd$$

또는 이 식을 정전용량 및 전위차로 분해해서 생각하면

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0$$

로 쓸 수도 있다.



[그림 3-11] 직렬 연결된 유전체의 정전용량
두 유전체가 직렬로 배치하고 있는 경우 경계조건을 활용하여 정전용량을 구할 수 있다.

[그림 3-11]과 같이 평행평판 콘덴서에 두께가 각각 d_1, d_2이며 유전율이 ε_1, ε_2 인 유전체가 직렬로 배치되어 있을 경우에는

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

이며, 두 유전체의 경계조건에서 $D_{n1} = D_{n2}$ 또는 $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$에서 전계의 접선 성분이 없으므로 $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$의 경계조건이 성립된다. 따라서 $E_2 = (\varepsilon_1/\varepsilon_2)E_1$을 이용하여 위 식을 정리하면

$$E_1 = \frac{V}{d_1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2) d_2}$$

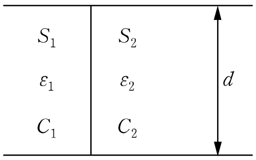
가 된다. 한편,

$$\rho_{S1} = D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V}{(d_1/\varepsilon_1) + (d_2/\varepsilon_2)} = D_2$$

이므로

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s S}{V} = \frac{1}{(d_1/\varepsilon_1 S) + (d_2/\varepsilon_2 S)} \tag{3.58}$$

가 된다.



[그림 3-12] 병렬 연결된 유전체의 정전용량
두 유전체가 병렬로 배치되어 있는 경우, 각 유전체가 점유하는 전극의 면적이 다르다는 것에 유의해야 한다.

교류회로 이론에서 정전용량 C를 직렬연결하면 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$로 주어지며, 병렬연결의 경우 $C = C_1 + C_2$임을 같이 생각해 보라.

또한 유전율이 ε_1, ε_2 인 유전체가 [그림 3-12]와 같이 병렬로 배치되어 있을 경우, 그 면적을 각각 S_1, S_2라 하면

$$D_1 = \frac{Q}{S_1} = \varepsilon_1 E_1$$

$$D_2 = \frac{Q}{S_2} = \varepsilon_2 E_2$$

이며, 정리하면

$$C_1 = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_1 E_1 S_1}{E_1 d} = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2 E_2 S_2}{E_2 d} = \frac{\varepsilon_2 S_2}{d}$$

이다. 따라서 정전용량은 다음과 같이 된다.

$$C = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} \tag{3.59}$$

다음으로 내·외 도체의 반지름이 각각 a 및 b이고, 길이가 L인 **동축케이블의 내·외 도체 사이의 정전용량을 구해보자**. 우선 전계 및 전속밀도는

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho, \text{ 또는 } D_\rho = \frac{a\rho_s}{\rho}$$

이며, 이를 이용하여 전위차를 구하면

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}d\rho = \frac{a\rho_s}{\varepsilon}ln\frac{b}{a}$$

이다. 따라서 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)} \tag{3.60}$$

전형적인 도체계 중 하나인 동심 구 도체의 경우를 생각해보자. 이때 내·외구의 반지름을 각각 a 및 b라 하자. 두 구 도체 사이에 유전율 ε의 유전체가 있다면 우선 $r = r$에서의 전계는

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$$

이므로 전위차는

$$V_{ab} = -\int_{r_b}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

가 된다. 따라서 정전용량은 식 (3.61)과 같다.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} \tag{3.61}$$

다음으로 **무한 길이의 전송선로와 같이 선전하밀도 ρ_L과 $-\rho_L$이 있는 도체계를 생각해보자**. 두 선도체의 반지름은 a이며 $d(d \gg a)$ 떨어져 있다. 임의의 위치 x에서 전계는 두 선전하밀도에 의한 전계의 합으로

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)\mathbf{a}_x$$

로 표현된다. 전위는 $x=d-a$에 대한 $x=a$의 전위가 두 도체계의 최대의 전위차이므로

$$V=-\int_{d-a}^{a}\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{d-x}\right)dx=\frac{\rho_L}{\pi\varepsilon}ln\frac{d-a}{a}$$

로 주어진다. 또한 이 식에서 $d \gg a$임을 고려하면

$$V \doteq \frac{\rho_L}{\pi\varepsilon}ln\frac{d}{a}$$

이다. 따라서 정전용량은 다음과 같다.

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\pi\varepsilon L}{\ln(d/a)} \tag{3.62}$$

3.8 푸아송 및 라플라스 방정식

Q 푸아송과 라플라스 방정식의 해를 구하면 무엇을 알 수 있나요?

A 방정식의 해는 상수가 될 수도 있지만 함수의 형태가 될 수도 있습니다. 푸아송 및 라플라스 방정식은 이차 미분방정식이므로, 그 해는 반드시 위치함수로 주어집니다. 즉, 이 방정식을 해결하고자 하는 목적은 주어진 공간 내에서 모든 위치에 대한 전위의 공간적 분포를 알고자 함에 있습니다.

지금까지 전위는 전하분포나 전계로부터 구할 수 있었다. 물론 전하분포 또는 전위로부터 전계를 구하는 것도 가능하다. 이러한 전위나 전계는 쿨롱의 법칙이나 가우스 법칙을 활용하여 얻을 수 있으며, 경계조건을 이용하여 이들에 대한 정보를 얻을 수도 있다.

이제 어떠한 조건(전하분포 또는 전계)하에서 어떤 점의 전위를 구하는 문제로부터 탈피하여 어떤 공간 전체에 대한 전위분포를 구해보자. 이를 위하여 푸아송(Poisson) 및 라플라스(Laplace) 방정식을 이용하기로 한다. 잘 알고 있겠지만 방정식은 풀어서 해를 구하는 데 그 의미가 있다고 할 수 있다. 물론 여기서 소개할 방정식의 해는 전위가 될 것이며, 매우 특수한 경우를 제외하면 전위라고 하는 이 해는 당연히 위치에 대한 함수이다. 따라서 임의의 도체계에서 전위의 공간적 분포는 이들 방정식을 풀어 구할 수 있다.

우선 방정식부터 만들어보면

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot (-\nabla V) = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \nabla V = \rho_v$$

이며, 따라서 위 식으로부터 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \tag{3.63}$$

델 연산자의 2중 연산 : ∇ · ∇ 을 의미한다.

이를 ‘푸아송 방정식’이라 한다. 이 식의 정확한 전개식을 구하기 위하여 ∇의 이중 연산을 우선 직각좌표계에서 표현해보면, 임의의 벡터 $\mathbf{D}$의 발산 및 스칼라양 V의 경도는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

따라서,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{3.64}$$

$\nabla \cdot \nabla$을 ∇^2으로 표현하기로 하면 직각좌표계에서 푸아송 방정식은

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \tag{3.65}$$

이다. 위 식에서 만약 체적전하밀도가 0, 즉 우리가 주목하고 있는 공간에 전하가 존재하지 않는다면

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3.66}$$

이 된다. 이를 ‘라플라스 방정식’이라 한다. 참고로 직각좌표계 및 원통좌표계와 구좌표계에서의 라플라스 연산은 다음과 같다.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \ \text{(직각좌표계)} \tag{3.67}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \ \text{(원통좌표계)} \tag{3.68}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \ \text{(구좌표계)} \tag{3.69}$$

+ **푸아송 방정식과 라플라스 방정식**

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = 0$$

푸아송 및 라플라스 방정식은 전위분포를 알고자 하는 공간에 전하가 있느냐, 없느냐에 따라 다르게 적용한다. 예를 들어 플라즈마나 pn 접합 반도체의 전기 2중층에서와 같이 많은 전하층이 존재하는 공간에서의 전위분포를 알고자 한다면 당연히 푸아송 방정식이 활용되어야 하며, 콘덴서와 같이 전극 사이에 전하가 존재하지 않는 절연층이 있고 이 절연층에서의 전위분포를 알고 싶다면 라플라스 방정식을 풀어야 한다.

지금까지 소개되어 왔던 동심 구 도체 및 동축케이블, 평행평판 콘덴서 등의 모든 도체계는 전극(도체)과 절연물, 그리고 전극으로 구성되어 있다. 따라서 전압을 인가하면 전하가 전극에 축적되며, 이 전하에 의해 전극 사이의 절연층에서 전계나 전위분포를 알 수 있다. 물론 이 경우에도 전극에 축적되는 전하량이 충분히 많을 경우, 즉 인가된 전압이 충분히 클 경우에는 절연파괴(electrical breakdown)가 발생하여 절연체는 절연 성능을 상실함과 동시에 전극 사이에 다량의 전하가 발생하게 된다. 그러나 이러한 도체계가 최소한 콘덴서로 사용될 수 있는 경우에는 절연체에서 전하가 발생하지 않는다. 따라서 이 경우에는 라플라스 방정식을 풀어야만 전위의 공간적인 분포를 알 수 있다. 이 절에서는 주로 라플라스 방정식의 해법 예를 중심으로 소개하기로 한다.

절연파괴(electrical breakdown)
전압에 의해 절연이 파괴되는 현상을 말한다. 즉, 어떤 값 이상의 고전압에서 갑자기 도전성이 증가하면 전기절연 성능을 잃고 전도체가 된다.

3.8.1 라플라스 방정식의 해법 예

$V(x)$의 경우

전위가 x만의 함수인 경우이다. 전형적인 예는 평행평판 콘덴서로, 라플라스 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

전위가 x만의 함수이므로, 편미분을 상미분으로 바꾸고 적분하면

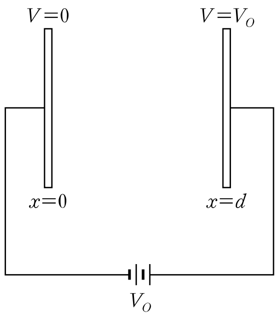
$$\frac{dV}{dx} = A$$

이며

$$V = Ax + B \tag{3.70}$$

를 얻는다. 위 식의 A와 B는 적분상수이며, 전위는 주어진 위치에서 반드시 하나의 해를 가지므로 주어진 도체계의 경계조건으로부터 A, B를 쉽게 구할 수 있다. 평행평판 도체계의 경우 [그림 3-13]과 같이 전극 간격을 d, 그리고 인가전압을 V_0라 하면 $x=0$에서 $V=0$, 그리고 $x=d$에서 $V=V_0$의 관계로부터 A, B를 구할 수 있다. 즉, $A=\frac{V_0}{d}$, $B=0$이 되어 다음과 같은 식이 된다.

$$V = \frac{V_0}{d}x \tag{3.71}$$



[그림 3-13] 라플라스 방정식의 적용 예[$V(x)$의 경우]
평행평판 콘덴서에서의 유전체 내 전계 및 전위는 x만의 함수이다.

이 결과를 고찰해보자. 만약 간격이 10 cm 인 전극에 100V 의 전압을 가하였다면, 라플라스 방정식으로부터 $V=10x$가 되어 위치 x의 변화에 따라 전위도 일정하게 변화함을 알 수 있다. 즉, 평행평판 콘덴서의 경우 $x=1\,\text{cm}$에서의 전위는 $V=10\text{V}$이며, 2 cm 에서의 전위는 20V 가 되어 위치 변화에 대한 전위의 변화율이 일정하다. 이는 전계가 '위치 함수'가 아니라 '평등전계'라는 뜻이며, 물론 이러한 결과는 무한평면전하에 의한 전계나 도체와 자유공간의 경계조건 등에서 이미 공부하였다.

한편 라플라스 방정식으로부터 구한 전위를 이용하면 그 밖의 관심 있는 모든 전기적 양을 구할 수 있다. 우선 $\mathbf{E} = -\nabla V$의 관계를 이용하여 전계 및 전속밀도를 구하면

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x \;\; \text{또는} \;\; \mathbf{D} = -\varepsilon\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

가 된다. 한편 $x=0$에서

$$D_n = -\varepsilon\frac{V_0}{d} = \rho_s$$

이므로

$$Q = \int \rho_s dS = -\varepsilon\frac{V_0 S}{d}$$

가 되고, 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$V(\rho)$의 경우

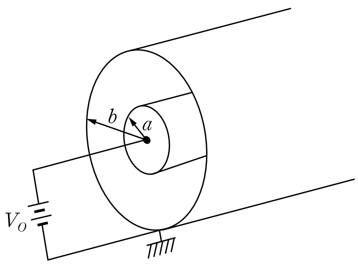
다음은 동축케이블의 경우이다. 이 경우 전계 및 전위는 ϕ 및 z에 무관하고 오직 ρ만의 함수가 된다. 라플라스 방정식

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

에서 두 번 적분하여

$$V = A\ln\rho + B \tag{3.72}$$

의 해를 얻는다. 즉 ρ가 일정한 면이 등전위면이 됨을 알 수 있다.



[그림 3-14] 라플라스 방정식의 적용 예[$V(\rho)$의 경우]
동축케이블에서의 전위분포는 원통좌표계에서의 라플라스 방정식을 풀어 해석할 수 있다.

다시 경계조건을 설정하면 [그림 3-14]와 같이 반지름 $\rho = a$인 내부 도체에 $V = V_0$의 전압을 인가하고 $\rho = b$의 외부 도체를 접지하여 $V = 0$이라 하면, 두 적분 상수

$$A = \frac{V_0}{\ln(a/b)}, \quad B = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} lnb$$

를 얻는다. 이를 위 식 (3.72)에 대입하여 정리하면

$$V = V_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \tag{3.73}$$

가 된다. 전계 및 전하량, 그리고 정전용량을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho = \frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln(b/a)}\mathbf{a}_\rho$$

$$D_n = \frac{\varepsilon V_0}{a\ln(b/a)} = \rho_s \quad (\rho = a)$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^L \rho_s dS = \frac{\varepsilon V_0 2\pi a L}{a\ln(b/a)}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

예제 3-12

내·외 반지름이 각각 $a = 1\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$인 동축케이블의 내부 도체의 전위를 100V, 그리고 외부 도체의 전위를 40V라 할 때 점 $P(3,\ 4,\ 3)$에서의 전위를 구하라.

풀이

라플라스 방정식에서 해는

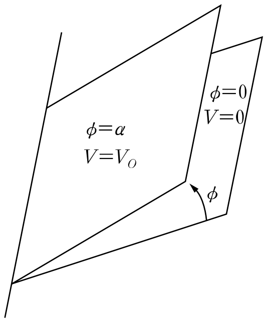
$$V = A\ln\rho + B$$

이며, 경계조건으로부터 $A = -86.56$, 그리고 $B = 100$이 되어 전위는 $V = -86.56\ln\rho + 100$이다. 따라서 점 P는 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 5$이므로 $V = -39.3\,[\mathrm{V}]$이다.

$V(\phi)$의 경우

이제 원통좌표계에서 전위 V가 ϕ만의 함수인 경우를 고찰해보자. 이러한 도체계는 우리 주위에서 쉽게 찾아볼 수 있는 형태는 아니지만 부채꼴의 모양을 하고 있는 바리콘과 같은 가변

콘덴서(variable condenser: varicon)의 경우에는 적용할 수 있다. 등전위면은 위의 두 경우와 마찬가지로 변수 ϕ가 일정한 면이 될 것이므로, [그림 3-15]와 같은 방사면이 된다.



[그림 3-15] 라플라스 방정식의 적용 예[$V(\phi)$의 경우]
두 도체는 절연되어 있으며, $\rho=0$에서 절연된 두 방사면 사이의 전위분포는 전위를 ϕ만의 함수로 하여 구할 수 있다.

따라서 경계조건으로는 $\phi=0$에서 $V=0$, 그리고 $\phi=\alpha$에서 $V=V_0$라 하고, 라플라스 방정식을 풀어보면

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

에서 $\rho\neq 0$인 모든 공간에서

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2}=0$$

이 된다. 적분하여 해를 구하면

$$V=A\phi+B \tag{3.74}$$

이다. 경계조건을 이용하여 완전한 해를 구하면

$$V=V_0\frac{\phi}{\alpha} \tag{3.75}$$

가 된다. $\mathbf{E}=-\nabla V$의 관계식을 이용하여 전계를 구하면

$$\mathbf{E}=-\frac{V_0}{\alpha\rho}\mathbf{a}_\phi$$

이며, 전속밀도 및 총 전하량은

$$\mathbf{D} = -\frac{\varepsilon V_0}{\alpha\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$D_n = \rho_s = \frac{\varepsilon V_0}{\alpha\rho}$$

$$Q = \int_{z=0}^{z=L}\int_{\rho=a}^{\rho=b}\rho_s d\rho dz = \frac{\varepsilon V_0 L}{\alpha} ln\frac{b}{a}$$

가 되어 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon L}{\alpha} ln\frac{b}{a}$$

$V(r)$의 경우

전위 V가 구좌표계의 r만의 함수인 경우로는 동심 구 도체계를 생각해볼 수 있다. 즉, 내·외 반지름이 각각 a 및 b인 구 도체를 유전율 ε의 유전체로 절연하고, 반지름 $r = b$인 외부 도체에 대하여 반지름 $r = a$인 내부 도체에 전위 V_0를 인가할 때, 내·외 도체 사이의 공간에서의 전위분포를 알고자 한다면, 라플라스 방정식에서

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

이므로, $r \neq 0$인 영역에서 위 식을 적분하여 해를 구하면

$$V = -\frac{1}{r}A + B \tag{3.76}$$

가 된다. 동심 구 도체계에서 $r = a$에서 $V = V_0$, 그리고 $r = b$에서 $V = 0$이므로

$$A = \frac{V_0}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}, \quad B = \frac{1}{b}\frac{V_0}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

의 적분상수값을 얻는다. 따라서 전위분포는

$$V = V_0 \frac{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} \tag{3.77}$$

이다. 전계 및 전속밀도, 그리고 정전용량 등도 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = V_0 \frac{1}{r^2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon V_0 \frac{1}{r^2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}\mathbf{a}_r$$

이며, 내부 도체 표면에서의 전속밀도 및 표면전하밀도는

$$D_n = \rho_s = \varepsilon V_0 \frac{1}{a^2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}$$

$$Q = \int \rho_s dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho_s r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi = V_0 \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

가 되어 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$$

예제 3-13

$r = 2\,\mathrm{m}$에서 $V = 50\mathrm{V}$이고, $r = 5\,\mathrm{m}$에서 $V = 20\mathrm{V}$인 동심 구 도체가 있다. 라플라스 방정식을 이용하여 점 $P(3,\ 4,\ 0)$에서 V를 구하라.

풀이

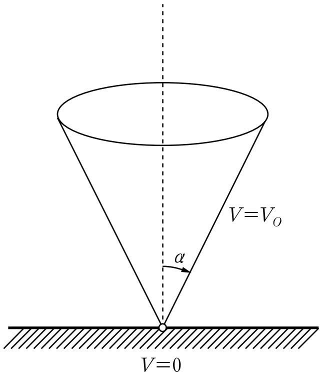
$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$에서 해를 구하면 $V = -\dfrac{1}{r}A + B$ 이다.

경계조건을 이용하면 $A = -100$, $B = 0$이므로 $V = \dfrac{100}{r}$이 된다.

따라서 점 $P(3,\ 4,\ 0)$까지의 거리 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$이므로, 점 P에서의 전위는 $V = 20\,[\mathrm{V}]$가 된다.

$V(\theta)$의 경우

[그림 3-16]과 같이 평면과 콘 모양의 도체가 서로 절연되어 $\theta=\alpha$에서 $V=V_0$, 그리고 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$에서 $V=0$이다.



[그림 3-16] 라플라스 방정식의 적용 예[$V(\theta)$의 경우]
전위가 θ만의 함수인 전형적인 예로 $r=0$인 점이 절연되어 있는 원추형의 도체를 생각할 수 있다.

이 경우 라플라스 방정식은

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)=0$$

에서 $r\neq 0$, $\theta\neq 0$, π인 곳에서 적분하여 전위에 대한 해를 구하면

$$V=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+B \tag{3.78}$$

가 된다. 경계조건을 이용하면

$$A=\frac{V_0}{\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)},\quad B=-V_0\frac{\ln\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)}{\ln\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

을 얻을 수 있으며, 다시 정리하면

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{3.79}$$

가 된다. 한편, 전계는

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left\{V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}\right\}\mathbf{a}_\theta = -V_0 \frac{1}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}\mathbf{a}_\theta$$

이다. 따라서 원추면상의 전속밀도 및 표면전하밀도는

$$D_n = \rho_s = -\frac{\varepsilon V_0}{r\sin\alpha\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}$$

가 되어 총 전하량 Q는

$$\begin{aligned} Q &= \frac{-\varepsilon V_0}{\sin\alpha\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{r=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r\sin\alpha\, dr d\phi}{r} \\ &= \frac{-2\pi\varepsilon V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} dr \end{aligned}$$

이 되지만 유한 크기의 원추를 생각하여 $0 < r < r_1$으로 한정하면, 근사적으로

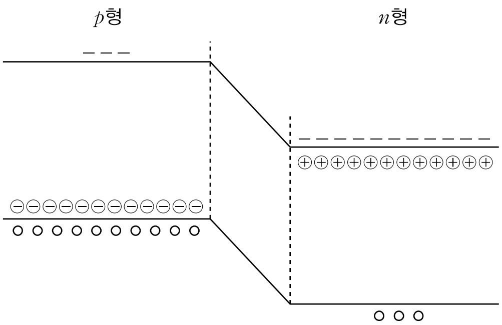
$$Q = \frac{-2\pi\varepsilon V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{r_1} dr = \frac{2\pi\varepsilon r_1 V_0}{\ln\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)}$$

이 된다. 따라서 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)}$$

3.8.2 푸아송 방정식의 해법 예

푸아송의 방정식에 대한 해법의 예로는 가장 전형적인 pn 접합 반도체의 공핍층 공간을 들 수 있다. [그림 3-17]과 같이 p형 반도체와 n형 반도체를 접합하면 p형의 다수 캐리어인 정공은 정공이 적은 n형으로, 그리고 n형의 다수 캐리어인 전자는 p형으로 밀도 차에 의한 확산(diffusion) 현상으로 이동한다. 이 과정 중에 접합부의 경계면에서 전자와 정공은 서로 재결합(recombination)하여 소멸되지만 그 결과 접합면의 p 영역에는 (+)전하를 가지는 정공이 접합과 함께 이동하였으므로, 공간적으로 (−)가 우세하며, n 영역에는 이와는 반대로 (+)가 우세하게 된다. 이러한 영역을 '공핍층(depletion layer)' 또는 '전기 2중층'이라 한다.



[그림 3-17] p형 반도체와 n형 반도체의 접합
접합의 결과 형성되는 전기 2중층에서의 전위분포는 푸아송의 방정식을 풀어 해결할 수 있으며, 이때 체적전하밀도는 두 반도체의 불순물 농도로 결정된다.

공핍층
pn 접합에 의해 이동한 전자나 정공이 재결합하여 전하가 존재하지 않는 경계면에서의 층을 말한다. 그러나 이 경우 도너나 억셉터 준위의 불순물이 공간적으로 각각 + 전기와 − 전기가 우세하여 마치 전하가 있는 것으로 작용되므로, 이를 '전기 이중층' 또는 '공간전하층(space charge layer)'이라 한다.

공핍층에서의 전위해석은 pn 접합된 반도체 소자의 동특성을 이해하는 데 매우 중요하며, 이를 구하는 데는 푸아송의 방정식이 이용된다. 즉, 우선 n형 반도체에서 단위체적당 불순물 농도를 N_d라 하고, 체적전하밀도를 eN_d라 하면 푸아송 방정식은

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} = -\frac{eN_d}{\varepsilon}$$

이 되며, 이 식을 적분하면

$$\frac{dV_n}{dx} = -\frac{eN_d}{\varepsilon}x + A$$

이 되고, 다시 적분하여

$$V_n = -\frac{eN_d}{\varepsilon}\frac{x^2}{2} + Ax + B$$

를 얻는다. 경계조건으로는 그림에서와 같이 $x = 0$에서 $V = 0$이고, $x = d$에서 전계가 없으므로 $\frac{dV}{dx} = 0$을 선택하여 적용하면 적분상수 A 및 B는

$$A = \frac{eN_d}{\varepsilon},\ B = 0$$

이다. 따라서 전위는

$$V_n = -\frac{eN_d}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2} - dx\right) \tag{3.80}$$

와 같이 주어진다. 만약 $x = d$에서의 전위 V_{nd}는

$$V_{nd} = -\frac{eN_d}{\varepsilon}\left(\frac{d^2}{2} - d^2\right) = \frac{eN_d d^2}{2\varepsilon} \tag{3.81}$$

가 된다. 또한 이 전위분포로부터 전계를 구하면

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_n &= -\nabla V = -\frac{d}{dx}\left\{-\frac{eN_d}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2} - dx\right)\right\}\mathbf{a}_x \\ &= \frac{eN_d}{\varepsilon}(x - d)\,\mathbf{a}_x \end{aligned} \tag{3.82}$$

를 얻을 수 있다. 같은 방법으로 p형 반도체에서도 불순물 농도를 N_a라 하면 푸아송의 방정식으로부터

$$\frac{d^2 V_p}{dx^2} = \frac{eN_a}{\varepsilon}$$

$x = 0$에서 $V = 0$이고 $x = -d$에서 $\frac{dV}{dx} = 0$의 경계조건을 이용하여 n형 반도체에서와 같은 방법으로 위 방정식을 풀면

$$V_p = \frac{eN_a}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2} + dx\right) \tag{3.83}$$

를 얻을 수 있다. 또한 전계도

$$\mathbf{E}_p = -\nabla V = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{eN_a}{\varepsilon}\left(\frac{x^2}{2}+dx\right)\right\}\mathbf{a}_x$$
$$= -\frac{eN_d}{\varepsilon}(x+d)\,\mathbf{a}_x \tag{3.84}$$

로 주어진다. 한편, $x=-d$에서의 전위 V_{pd}는

$$V_{pd} = \frac{eN_a}{\varepsilon}\left(\frac{d^2}{2}-d^2\right) = -\frac{eN_a d^2}{2\varepsilon} \tag{3.85}$$

이다. 따라서 공핍층의 폭 $-d \le x \le d$에서의 전위장벽 V_d는 n형과 p형의 불순물 농도를 $eN_a = eN_d = \rho_v$라 하면

$$V_d = V_{nd} - V_{pd} = \frac{eN_d d^2}{2\varepsilon} - \left(-\frac{eN_a d^2}{2\varepsilon}\right) = \frac{\rho_v d^2}{\varepsilon} \tag{3.86}$$

가 된다. 결국 접합 단면적을 S라 하면, n형 반도체 측의 (+)전하량은 $Q=\rho_v S d$이므로, 접합면의 정전용량은 다음과 같다.

$$C = \frac{Q}{V_d} = \rho_v S d\,\frac{\varepsilon}{\rho_v d^2} = \frac{\varepsilon S}{d} \tag{3.87}$$

Section

3.9 영상법

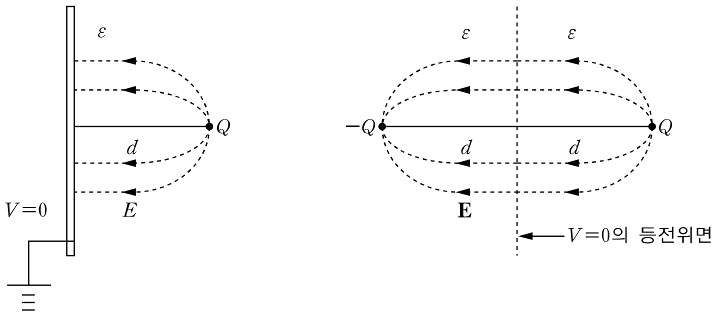
Q 영상법이란 무엇인가요?

A 전하 부근에 무한히 넓은 평면도체 또는 접지된 평면도체가 있는 경우, 이 전하에 의한 전계 또는 전위는 완전한 자유공간에서의 문제와는 다릅니다. 왜냐하면 도체 내부에는 자유전하가 많아서 도체 앞의 전하에 힘이 작용하기 때문입니다. 이 경우 영상전하를 가정하여 해석하는 것이 바로 영상법입니다. 특히 방전관 음극 도체에서 방출된 전자의 에너지 상태를 해석하는 데 매우 유용합니다.

지금까지 자유공간에서는 점전하 Q에 의한 전계 또는 두 전하 사이에 작용하는 힘을 쿨롱의 법칙에 의해 쉽게 구해 왔다. 그러나 만약 점전하 Q 부근에 접지된 도체판이 존재한다면 자유공간에서의 전계와는 다른 문제가 된다. 이 전하와 도체판 사이에도 힘이 작용하기 때문이다. 이는 전하 Q가 자유공간에서와 같이 자유롭지 못하며 접지된 도체판으로부터 속박당하고 있다는 의미로, 방전공간의 음극에서 방출된 전자의 에너지 상태를 이해하는 데 있어 매우 중요하다.

이제 도체판이 존재하는 경우, 전하가 가지는 전계를 알아보자. 우선 [그림 3-18]과 같이 전기쌍극자의 중간에 무한히 넓은 가상적인 평면을 생각해보면, 무한평면에서의 전위는 0이다. 즉, $+Q$와 $-Q$의 전기쌍극자의 중앙에는 전위가 0인 등전위면이 존재하고 있으며, 전계는 이 등전위면에 수직이다. 따라서 전기쌍극자에 의한 전계나 쌍극자의 전하 배치를 대신하여 접지된 무한히 넓은 도체판과 $+Q$로 바꾸어 놓아도 도체판이 등전위면이므로 도체판과 $+Q$ 사이의 전계는 동일하다. 결국 도체판 앞의 전하에 의한 전계 및 전위는 도체판을 제거하는 대신 도체판을 기준으로 $+Q$와 대칭된 곳에 $-Q$의 전하를 가정하고, 이 두 전하가 만드는 전계와 같음을 알 수 있다. 이때의 가상적인 전하를 '영상전하(image charge)' 또는 '경상전하'라 하며, 이러한 전계의 해석법을 '영상법(Image method)'이라 한다.

등전위면(equipotential surface)
전기장에서 전위가 같은 점을 연결하여 이루어진 곡면을 말한다. 이는 등고선과 비슷한데, 등고선 간격이 좁을수록 경사가 급한 것처럼, 등전위면 간격이 좁을수록 전기장이 세다.



[그림 3-18] 쌍극자에 의한 전계와 영상법의 개념도
전하 앞에 도체판이 존재하는 경우, 도체판을 제거하고 영상전하를 가정하여 전계를 구할 수 있다.

전기 영상법에 의한 전계해석의 한 예로 $x=0$, $y=3$에 선전하밀도 $\rho_L = 20\,\mathrm{nC/m}$의 무한 선전하가 놓여 있고, $y=0$의 도체 평면상에 있는 점 $P(2,\ 0,\ 4)$에서의 전계를 구해보자. 영상법을 적용하면 도체 평면을 제거하는 대신 $x=0$, $y=-3$에 $-20\,\mathrm{nC/m}$의 영상전하를 가정하여 두 선전하가 형성하는 전계를 구하면 된다. 우선 양과 음의 두 선전하로부터 점 P까지의 거리는 각각 $\mathbf{R}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y$ 및 $\mathbf{R}_2 = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$이며, 따라서 각 전하에 의한 전계 $\mathbf{E}_1$ 및 $\mathbf{E}_2$는 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{20\times 10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{13}}\frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{13}} = 55.2\mathbf{a}_x - 82.8\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-20\times 10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{13}}\frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{13}} = -55.2\mathbf{a}_x - 82.8\mathbf{a}_y$$

따라서 구하고자 하는 전계는 두 전계 성분의 합으로

$$\mathbf{E} = -165.6\mathbf{a}_y\,\mathrm{V/m}$$

가 된다. 이는 도체 평면이 $y=0$의 면에 있으므로, 당연히 이 면에 수직한 방향임을 알 수 있다.

coffee break

음극에서 방출되고, 음극 표면에서 x의 위치에 있는 $-e$[C]의 전자가 가지는 퍼텐셜 에너지에 대해 생각해보자. 음극에서 전자가 방출되면 그 전자는 당연히 금속으로부터 인력을 느낀다. 그 힘은 금속을 제거하고 $-x$의 위치에 $+e$[C]의 영상전하를 가정함으로써

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2} = -\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}$$

임을 알 수 있다. 따라서 퍼텐셜 에너지는 이 힘을 무한 원점으로부터 임의의 x까지 적분하며, 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$W = -\int_{\infty}^{x} F dx = -\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$$

예제 3-14

$y=1$, $z=2$인 점을 통과하며, x축에 평행한 선전하밀도 $\rho_L = 2\pi\varepsilon_0\,\mathrm{C/m}$의 무한 선전하가 있다. $x=0$인 평면에 도체가 있을 때 점 $P(6,\ -1,\ 3)$에서의 전계를 구하라.

풀이

영상전하로서 $y=-1$, $z=-2$인 곳에 $\rho_L = -2\pi\varepsilon_0\,\mathrm{C/m}$의 무한 선전하가 있다고 가정하고 평면 도체를 제거하면 우선 $\rho_L = 2\pi\varepsilon_0\,\mathrm{C/m}$의 전하에 의한 전계 $\mathbf{E}_+$와 $\rho_L = -2\pi\varepsilon_0\,\mathrm{C/m}$에 의한 $\mathbf{E}_-$는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho_+}\mathbf{a}_\rho,\quad \mathbf{E}_- = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho_-}\mathbf{a}_\rho$$

이 식에서

$$\rho_+ = -2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z,\quad \rho_- = 5\mathbf{a}_z$$

이므로,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -0.4\mathbf{a}_y$$

01. 전류밀도

전류밀도에는 전도전류밀도 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$와 대류전류밀도 $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$가 있으며, 전류가 형성되는 계의 특성을 반영한다. 도체에서의 전도전류밀도는 전계에 비례하여 증가하며, 그 비례상수를 '도전율'이라 한다. 대류전류밀도는 도체가 아닌 자유공간에서 전하가 움직일 때 형성되는 전류밀도이다.

02. 도체의 전기전도

도체의 전기전도는 전자의 이동에 의존하여 도전율은 $\sigma = -\rho_e \mu_e$로 주어지며, 도체 내부에서 전계와 반대 방향으로 운동하는 전자는 도체의 원자와 지속적으로 충돌함으로써 전기저항을 발생하게 된다. 도체의 전기저항은 전자가 이동하는 수직 단면적을 S, 도체의 길이를 d라 할 때, $R = \rho \dfrac{d}{S}$로 주어진다. 이때 ρ를 '도체의 체적 저항률'이라 한다. 한편, 반도체는 전자와 정공의 캐리어가 존재하므로 $\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$이다.

03. 유전체의 분극현상

유전체의 경우 전계를 인가하면 유전체의 원자는 분극현상을 발생하여 전극의 표면에 축적되는 전하 중 일부는 분극전하에 속박된다. 결국 유전체에서의 분극현상으로 인해 전하에는 속박전하와 자유전하가 발생할 수 있으며, 자유공간의 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$에 대하여 유전체에서는 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$의 관계가 성립한다.

04. 전기감수율과 비유전율

전화율 또는 전기감수율(electric susceptibility) χ_e는 $\dfrac{P}{\varepsilon_0 E}$의 개념으로, 자유전하에 대한 분극전하, 즉 속박전하의 비율을 나타낸다. 또한 물질의 유전율 ε과 자유공간의 유전율 ε_0의 비, 즉 $\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$를 '비유전율(relative permittivity)'이라 한다. 비유전율과 전기감수율 사이에는 $\varepsilon_R = 1 + \chi_e$의 관계가 있으며, 일반적인 범위의 온도와 주파수 영역에서는 두 비유전율과 전기감수율을 물질의 고유의 값으로 생각할 수 있다. 즉, 비유전율과 전화율은 그 물질의 유전적 성질을 결정하는 중요한 값이라 할 수 있다.

05. 전기쌍극자에 의한 전계 및 전위

같은 크기의, 그리고 부호가 다른 두 전하가 매우 가까이 있는 경우, 이를 '전기 쌍극자'라 한다. 전기쌍극자는 유전체에 전계를 인가하면 양(+)전하를 가지는 원자의 핵과 음(−)전하의 전자 사이에 위치적 변화가 발생한다. 단일 점전하의 경우 각각 거리의 1승과 2승에 역비례하여 감소하였지만 쌍극자에 의한 전위 및 전계는 거리의 2승과 3승에 역비례하는 결과를 얻기 때문에 거리가 멀어짐에 따라 더욱 급격하게 약해진다.

06. 두 물질의 경계조건

경계조건은 맥스웰 방정식의 적분형 $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$와 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$을 이용하여 구할 수 있으며, 주요 결과는 다음의 표와 같다.

	도체 – 자유공간	유전체 – 유전체
접선 성분	$D_t = E_t = 0$	$E_{t1} = E_{t2}$, $\dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$
법선 성분	$D_n = \varepsilon_0 E_n = \rho_s$	$D_{n1} = D_{n2}$, $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$

07. 정전용량

정전용량은 전계가 형성되고 따라서 에너지가 축적되는 공간에서 정의할 수 있으며, $C = \dfrac{Q}{V}$로 정의된다. 정전용량은 주어진 전압조건하에서 축적할 수 있는 전하량 또는 에너지에 관련된 물질 정수로, 유전율과 도체계의 기하학적인 디멘션(dimension)에 의존한다. 즉, 전극의 면적 S 및 전극간 거리 d인 평행평판 커패시터의 경우 정전용량은 $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$이다.

08. 라플라스와 푸아송의 방정식

라플라스 및 푸아송의 방정식은 전위의 공간적 분포를 알기 위해 적용된다. 우리가 알고자 하는 계에 전하가 존재하면 $\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$의 푸아송 방정식을, 그리고 전하가 존재하지 않는 절연체의 공간이라면 $\nabla^2 V = 0$의 라플라스 방정식을 풀어 해를 구하면 된다.

Chapter_03 연습문제

3.1 $\mathbf{J} = 0.5y^2\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z\,[\mathrm{A/m^2}]$ 일 때, $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$, $-3 \le z \le 3\,[\mathrm{m}]$의 체적에서 발산하는 전 전류를 구하라.

3.2 전류의 연속식을 도출하고 그 의미를 설명하라.

3.3 어떤 도체의 도전율 $\sigma = 3.2 \times 10^7\,\mathrm{S/m}$이고, 전자의 이동도 $\mu_e = 0.032\,\mathrm{m^2/V \cdot s}$이다. 전자의 드리프트 속도가 $v_d = 1.2 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$일 때, 물질 내의 전류밀도를 구하라.

3.4 도전율 $\sigma = 3.2 \times 10^7\,\mathrm{S/m}$의 도체의 반지름이 $1\,\mathrm{mm}$이고, 길이가 $2 \times 10^3\,\mathrm{m}$이다. 이 도체의 저항을 구하라.

3.5 순수한 Si 반도체의 전자 및 정공의 이동도는 상온에서 각각 $0.12\,\mathrm{m^2/V \cdot s}$ 및 $0.025\,\mathrm{m^2/V \cdot s}$이다. 전자와 정공의 전하밀도를 각각 $-2.9\,\mathrm{mC/m^3}$ 및 $-2.9\,\mathrm{mC/m^3}$라 할 때, 이 반도체의 도전율을 구하라.

3.6 비유전율 30의 어떤 유전체의 단위체적당 원자 수가 8.2×10^{28}개$/\mathrm{m^3}$이다. 각 원자가 가지는 쌍극자모멘트가 $5 \times 10^{-27}\,\mathrm{C \cdot m}$일 때, 이 유전체의 분극벡터와 전기감수율을 구하라.

3.7 어떤 유전체의 분극이 $150\,\mathrm{C/m^2}$이다. 유전율 $\varepsilon = 8.854 \times 10^{-11}\,\mathrm{F/m}$일 때, 전화율 및 전계의 세기를 구하라.

3.8 두 완전 유전체 경계면에서의 전계 $\mathbf{E}$ 및 전속밀도 $\mathbf{D}$에 관한 경계조건을 임의의 가우스 표면 및 폐경로를 취하여 구하라.

3.9 유전율 ε_1 및 ε_2인 두 유전체의 경계면이 있다. 경계면의 수직 방향에 대한 입사각과 굴절각이 각각 θ_1 및 θ_2라 할 때, 두 유전율의 비 $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$를 각으로 표현하라.

3.10 $z < 0$ 영역에는 $\varepsilon_{R1} = 2$, $z > 0$ 영역에는 $\varepsilon_{R2} = 4$인 유전체가 있다. $z < 0$ 영역에서의 전계 $\mathbf{E}_1 = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\,[\mathrm{V/m}]$일 때, $z > 0$ 영역에서의 전계 $\mathbf{E}_2$를 구하라.

3.11 문제 **3.10**의 조건에서 $\mathbf{P}_2$를 구하라.

3.12 전계가 $15\,[\mathrm{kV/m}]$, 전속밀도 $1.5\,[\mathrm{C/m^2}]$인 유전체의 분극 P를 구하라.

3.13 동심 구도체의 내·외 반지름을 각각 n배로 증가하면 정전용량은 몇 배가 되는가?

3.14 자유공간에 반지름 a의 도체구가 있다. $a \le r \le r_1$을 $\varepsilon = \varepsilon_1$의 유전체를 놓을 때, 이 도체계의 정전용량을 구하라.

3.15 정전용량 $1\,\mu\mathrm{F}$의 콘덴서에 $220\,V$의 전압을 인가하였다. 정전에너지를 구하라.

3.16 $\rho = 1\,\mathrm{m}$에서 $V = 100\,\mathrm{V}$, $\rho = 3\,\mathrm{m}$에서 $V = 20\,\mathrm{V}$인 동축케이블이 있다. 점 $P(1,\ 2,\ 3)$에서의 전계 $\mathbf{E}$를 라플라스 방정식을 이용하여 구하라.

3.17 $V = 5x^2yz + ky^3z$이다. 라플라스 방정식이 만족되도록 상수 k를 구하라.

3.18 자유공간에 $+3\mu\mathrm{C}$, $-3\mu\mathrm{C}$의 점전하가 각각 $(0,\ 0,\ 1\mathrm{m})$ 및 $(0,\ 0,\ -1\mathrm{m})$에 있다. 점 $P(1,\ 2,\ 1.5)$에서의 전계 $\mathbf{E}$를 구하라.

3.19 $x = 0$, $z = -3$인 점을 통과하며, y축에 평행한 선전하밀도 $\rho_L = 3\,\mathrm{nC/m}$의 무한 선전하가 있다. $z = 0$인 평면에 도체가 있을 때 점 $P(2,\ 5,\ 0)$에서의 전계를 구하라.