Chapter

02

1계 미분방정식

1st Order Differential Equations

학습목표

- 미분방정식과 미분방정식의 해에 대한 기본 개념을 이해한다.
- 1계 미분방정식의 여러 가지 형태를 살펴보고, 해를 구하는 과정을 이해한다.
- 변수분리형 미분방정식으로 해를 구할 수 있는 형태를 이해한다.
- 완전 미분방정식이 가능한 식의 형태를 충분히 이해하고, 해를 구하는 과정을 숙지한다.
- 미분방정식의 선형성에 대해 이해하고, 1계 선형 미분방정식의 해를 도출하는 방법을 이해한다.

자연계에서 벌어지는 물리적 현상은 미분방정식의 형태로 나타나는 것이 많다. 특히 물리적인 법칙을 응용하는 학문인 공학에서는 역학, 전자기학, 전기회로 등에 미분방정식이 쓰인다. 이는 곧 공학적인 문제를 해결하는 데 미분방정식이 널리 사용되고 있다는 의미다. 예를 들어, 시간의 함수로 정의되는 거리에 대해 생각할 때, 거리를 시간으로 미분한 도함수는 속도가 되고, 또 한 번 미분하면 가속도가 된다는 내용은 너무나 잘 알려진 사실이다. 이와 같이 임의의 함수를 미분한 도함수가 들어 있는 방정식이 바로 미분방정식이다. 결국 임의의 물리적 개념(예를 들어, 거리)이 그 도함수(예를 들어, 속도나 가속도)의 형태로 방정식에 포함되어 있다면, 물리적 현상의 거동을 이해하기 위해서는 그렇게 표현되어 있는 미분방정식을 해결해야만 한다.

이 장에서는 상미분방정식(Ordinary Differential Equations)의 가장 간단한 형태인 1계 미분방정식을 살펴보기로 한다. 여기서는 미분방정식과 미분방정식 해의 개념을 알고, 각각을 유도하는 과정, 즉 미분방정식의 기본이라고 할 수 있는 내용이 제일 먼저 소개된다. 어떤 분야든 마찬가지겠지만, 미분방정식에 대한 이해 또한 기본적인 개념을 이해하는 데서부터 시작된다는 것을 염두에 두어야 한다.

알아 두어야 할 개념과 공식

Chapter 02

1. 변수와 함수

$y = f(x)$라는 식이 있다고 하자. 이때 x와 y는 주어진 집합의 한 요소를 나타내며, 변수variable라고 한다. $f(x)$는 한 집합과 다른 집합의 요소를 관련짓는 역할을 하며, 함수function라고 한다. x는 독립변수, y는 종속변수라고 하는데, 이는 x가 변함에 따라 y가 변하기 때문이다.

2. 도함수의 표현

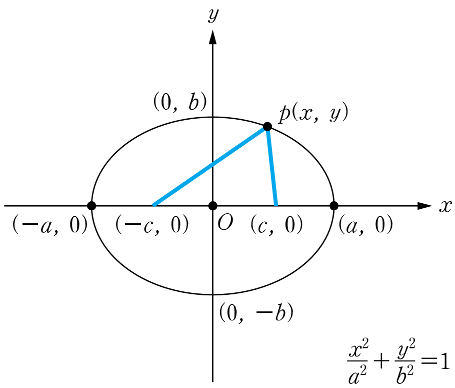
y의 도함수를 표현할 때 흔히 미분한다는 의미로 프라임prime, ' ' '을 사용하여 y'과 같이 표현하지만, 도함수의 차수가 늘어날수록 사용하기가 불편해진다. 그럴 경우 $y^{(2)}$와 같이 괄호 안에 숫자를 사용하거나, y^{IV}, y^{iv}과 같이 로마 숫자를 사용하여 나타내기도 한다.

3. 선형과 비선형

선형linear이란 1차를 의미한다. 즉 변수를 x라고 할 때 그 1차 함수는 직선이 된다. 따라서 미분방정식에서도 y의 1차 함수를 변수로 하는 방정식을 선형방정식이라고 한다. 비선형nonlinear이란 문자 그대로 선형이 아닌 것을 의미한다. 즉 1차가 아닌 어떤 차수의 함수라도 비선형 함수인 것이다. 예를 들어, x^2이나 $\sqrt{x}$ 등은 직선의 형태로 표현되지 않는 비선형 함수다.

4. 타원의 방정식(표준형)

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad (a, b > 0)$$



5. 기본 미분 공식

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(e^{ax})' = ae^{ax} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

6. 기본 적분 공식

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ (n \neq -1) \qquad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

2.1 미분방정식이란?

2.1.1 미분방정식의 정의와 분류

■ 미분방정식의 정의

우선 미분방정식이란 무엇인지에 대해 알아보자. 미분방정식은 하나 이상의 **도함수**derivative가 방정식에 포함되어 있는 경우에 사용되는 용어다. 다시 말하자면, 다음 식들처럼 임의의 함수를 한 번 이상 미분한 도함수가 하나 이상 포함되어 있는 방정식을 미분방정식이라고 한다.

$$y'(x) = y(x) \tag{2.1}$$

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x \tag{2.2}$$

$$i'''(t) + 13i(t) = 220\cos\omega t \tag{2.3}$$

■ 변수의 개수에 따른 분류

위 미분방정식의 형태를 살펴보면 괄호 안에 포함되어 있는 변수의 개수가 하나인 것을 알 수 있다. 이 점이 미분방정식을 분류하는 한 가지 방법이 된다. 위에 표현된 세 미분방정식과 같이 변수가 오직 하나인 미분방정식을 **상미분방정식** ordinary differential equation이라고 한다. 이 책에서 주로 다룰 미분방정식의 형태다.

괄호 속 변수의 개수가 둘 이상인 형태의 미분방정식은 **편미분방정식**partial differential equation이라고 한다. 편미분방정식은 변수의 수가 많은 만큼 상미분방정식에서 다룰 수 있는 것보다 복잡한 현상을 수식화한 미분방정식이라고 생각할 수 있다. 편미분방정식의 대표적인 예를 하나 들자면, 다음과 같은 형태를 가진 파동방정식을 들 수 있다. 이에 대한 자세한 내용은 13장에서 다루기로 한다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{: 2차원 파동방정식}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{: 3차원 파동방정식}$$

여기서 함수 u는 2차원 파동방정식에서는 $u(x, y)$와 같이 2개의 변수를 가지며, 3차원 파동방정식에서는 $u(x, y, z)$와 같이 3개의 변수를 가지는 함수로, 괄호를 생략하여 나타낸 것이다.

미분방정식은 편미분방정식의 예와 같이 괄호를 생략하여 사용하는 것이 일반적이다. 즉 상미분방정식의 예로 사용된 식 (2.1)~식 (2.3)을 아래와 같이 표현할 수도 있다는 것이다.

$$y' = y \tag{2.4}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \tag{2.5}$$

$$i''' + 13i = 220\cos\omega t \tag{2.6}$$

각 미분방정식에서 도함수를 살펴보면, 식 (2.4)는 1번 미분, 식 (2.5)는 2번 미분, 식 (2.6)에서는 3번 미분된 도함수가 가장 많이 미분된 도함수 항이다. 미분방정식은 가장 많이 미분된 도함수 항의 미분 횟수, 즉 도함수의 최대 미분 횟수에 '계order'라는 용어를 붙여 분류한다. 그러한 분류법에 따르면, 식 (2.4)는 1계 미분방정식, 식 (2.5)는 2계 미분방정식, 식 (2.6)은 3계 미분방정식이 된다. 즉 미분방정식의 계수는 미분방정식 내의 최대 미분 횟수에 의해 결정된다.

▪ 도함수의 미분 횟수에 따른 분류

다음으로는 미분방정식의 선형성에 대해 알아보자. 일반적으로 선형 미분방정식의 형태는 다음 식과 같다.

▪ 선형성에 따른 분류

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{2.7}$$

이 식에서 도함수를 살펴보면, 미분 횟수만 다를 뿐 미분된 변수는 항상 y에 대해 1차 함수인 y로만 이루어져 있다는 사실을 알 수 있다. 이와 같이 종속변수인 y가 1차로만 나타나 있는 미분방정식을 **선형**linear 미분방정식이라고 하고, 그렇지 않은 경우는 **비선형**nonlinear 미분방정식이라고 한다.

예제 2-1 미분방정식의 분류

다음 미분방정식의 계수와 선형성에 대해 설명하라.

(a) $x^2y'' + xy' = y$

(b) $x^{1/2}y''' + y^{1/2}y' = 0$

(c) $x^2y'' + 2e^{2x}y' + (\sin x)y = \sin 2x\cos x$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(e) $y'''y'' + (\log x)y' + 3x^3y = x^2y^2$

key point

계수 : 미분방정식에서 보이는 최대 미분 횟수 또는 미분방정식에서 도함수로 사용되는 변수의 차수

풀이

(a) 방정식에 나타나 있는 도함수의 최대 미분 횟수는 y'' 항의 2이고, 종속변수 y에 관한 항인 y, y', y항 어디에도 1차 이외의 차수는 없다. 따라서 2계 선형 미분방정식이다.

(b) 도함수의 최대 미분 횟수는 y''' 항의 3이고, $y^{1/2}y'$ 항에 종속변수인 y의 $\frac{1}{2}$차식이 보인다. 따라서 3계 비선형 미분방정식이다.

(c) 도함수의 최대 미분 횟수는 y'' 항의 2이고, 종속변수 y에 관한 항 어디에도 1차 이외의 차수는 없다. 따라서 2계 선형 미분방정식이다.

(d) 앞의 항은 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''$ 이고, 뒤의 항 괄호 속 도함수는 $\dfrac{dy}{dx} = y'$ 이므로 도함수의 최대 미분 횟수는 2다. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = (y')^2$항은 종속변수 y의 도함수의 제곱, 즉 도함수의 2차이므로 1차로만 나타나야 하는 선형이 아니다. 따라서 이 식은 2계 비선형 미분방정식이다.

(e) 도함수의 최대 미분 횟수는 맨 처음 항 $y''' y''$ 항의 3이고, 오른쪽 항 x^2y^2에 y의 2차 함수가 포함되어 있다. 그러므로 3계 비선형 미분방정식이다.

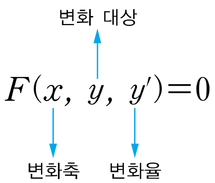
2.1.2 미분방정식에서 해의 개념

미분방정식의 해에 대해 논의하기 위해 우선 1계 선형 미분방정식을 대상으로 생각해보자. 일반적으로 1계 미분방정식은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \tag{2.8}$$

■ 미분방정식에서 변수와 도함수의 역할

위와 같은 미분방정식에서 각 변수와 도함수의 역할을 다음과 같이 표현할 수 있다.



즉 미분방정식이란 'x 값에 따라 y' 비율로 y 값이 변하는 시스템'이라고 할 수 있다. 그리고 식 (2.8)을 다음과 같이 표현하기도 한다.

$$y' = F(x,\ y) \tag{2.9}$$

■ 미분방정식의 표현 속에 나타나는 미분방정식의 해

이 식도 도함수를 기준으로 표현했을 뿐 의미는 식 (2.8)과 동일하다. 이와 같이 미분방정식을 표현하는 식 속에는 미분방정식의 **해**solution도 들어 있다. 변화하는 대상이기도 하면서, 미분방정식을 하나의 시스템으로 볼 때 그 출력을 나타내는 y가 바로 미분방정식의 해인 것이다.

미분방정식의 해는 대수방정식의 근과 달리 하나의 점이 아니라 궤적을 이루는 함수의 형태로 구해진다. 미분방정식의 해가

■ 미분방정식 해의 형태

$$y = f(x) \tag{2.10}$$

일 때, 함수 $f(x)$가 나타내는 궤적을 **해곡선**[solution curve]이라고 한다.

여기서 가장 간단한 형태의 미분방정식의 해를 구해보자. 미분방정식을 어떻게 푸는지 모른다고 걱정할 필요는 없다. 미분방정식의 해를 구하는 가장 간단한 방법은 적분하는 것이기 때문이다.

예제 2-2 간단한 미분방정식 풀이법(적분법)

다음 미분방정식의 해를 구하라.

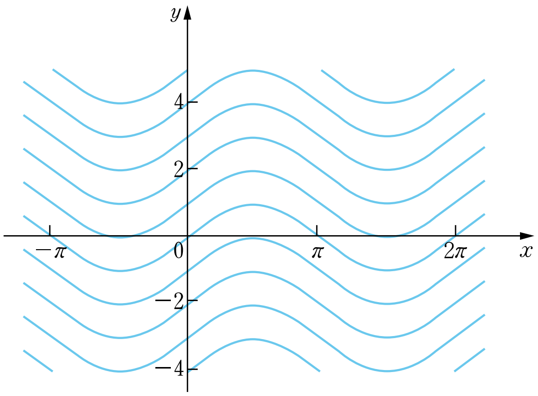
$$y' = \cos x$$

key point
가장 간단한 미분방정식의 풀이법은 적분하는 것이다.

풀이

미분방정식 $y' = dy/dx = \cos x$의 형태이므로 양변을 적분하면 방정식의 해인 y를 구할 수 있다.
즉 $y = \int \cos x dx = \sin x + c$다($c$는 적분상수).

[예제 2-2]는 미분방정식에서 해의 종류를 설명하기 위한 것이다. 해는 결국 $y = \sin x + c$의 형태로 얻어졌는데, 여기서 적분상수 c의 값은 알지 못한다. 이때의 해곡선을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



[그림 2-1] [예제 2-2]의 해 $y = \sin x + c$

[그림 2-1]을 미분방정식 $y' = \cos x$ 의 **해의 모임**family of solution이라고 한다. $y = \sin x + c$의 그래프이지만 c의 값이 정해진 상태가 아니기 때문에, 어떤 c에 대해서도 만족하는 해의 형태다. 예를 들어, c는 1, 2, 1000, 3.141597 등 어떤 값이라도 상관없다.

▪ 일반해의 정의

[그림 2-1]에서는 모든 값을 표현할 수 없으므로 c 값이 정수인 경우에 대해서만 도시했다. 이렇게 c와 같이 어떤 값이 되어도 상관없는 임의의 상수를 포함한 해를 미분방정식의 **일반해**general solution라고 한다. [예제 2-2]의 응용 문제를 하나 풀어보자.

예제 2-3 간단한 미분방정식에 조건이 달린 경우

다음 조건을 가진 미분방정식의 해를 구하라.

$$y' = \cos x,\quad y(0) = 0$$

key point
조건은 임의의 상수를 구하는 데 사용된다.

풀이

[예제 2-2]와 동일한 미분방정식에 $y(0) = 0$이라는 조건만 붙어 있으므로 앞에서 구한 해를 그대로 사용하자. 즉 $y = \sin x + c$라는 해에 조건을 대입하면

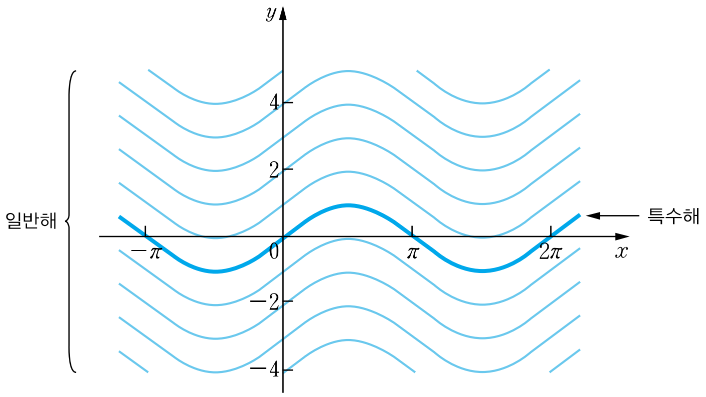
$$y(0) = \sin 0 + c = 0 + c = 0$$

이 된다. 이때 조건이 없었던 방정식에서는 값이 정해지지 않았던 상수 c가 0이 된다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 조건이 있으면 미분방정식의 해가 $y = \sin x$로 정해지므로, 조건이 없는 경우보다 명확해지는 것을 알 수 있다.

▪ 특수해의 정의

[예제 2-2]에서 구한 미분방정식의 해는 적분상수 c를 포함하고 있으므로 무한한 해를 가진 형태였고, 그러한 해를 일반해라고 하였다. 반면, [예제 2-3]과 같이 조건을 가진 미분방정식의 해는 하나의 곡선으로 정해지는데, 이와 같이 임의의 상수가 포함되지 않은 구체적인 해를 **특수해**particular solution라고 한다.

[그림 2-2]는 [예제 2-2]와 [예제 2-3]의 해인 일반해와 특수해를 나타낸 것이다.



[그림 2-2] **미분방정식의 일반해와 특수해**

1계 미분방정식에 조건이 붙지 않은 문제의 해는 일반해로 구해지고, 조건이 붙은 문제의 해는 특수해로 구해진다는 사실을 알았다.

예제에서 언급된 조건을 **초기조건**initial condition이라고 하며, $y(x_0)=y_0$의 형태로 주어진다. 이와 같이 초기조건이 주어진 미분방정식의 해를 구하는 문제를 **초깃값 문제**initial value problem라고 한다.

■ 초기조건 및 초깃값 문제

예제 2-4 초깃값 문제

다음 초깃값을 가진 미분방정식의 해를 구하라.

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-2x}, \quad y(0) = 3.5$$

key point

초깃값은 일반해에서 특수해를 구할 때 사용되는 조건이다.

풀이

미분방정식 $y' = e^{-2x}$의 양변을 적분하면 방정식의 일반해를 구할 수 있다.

$$y = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

여기에 초깃값을 대입하면 다음과 같다.

$$y(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + c = -\frac{1}{2} + c = 3.5, \quad c = 4$$

그러므로 다음과 같은 특수해를 얻을 수 있다.

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + 4$$

예제 2-5 응용 **뉴턴의 제2법칙 응용 문제**

아래 뉴턴의 제2법칙을 이용하여 정지해 있는 10kg의 물체를 5N의 힘으로 계속 미는 경우, 10초 후의 속도를 계산하라.

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}$$

key point
뉴턴의 제2법칙(가속도의 법칙)은 $F=ma$다. F는 힘, m은 질량, a는 가속도다. 속도를 시간으로 미분하면 가속도가 된다.

풀이

가속도는 $a=\frac{dv}{dt}=v'=\frac{F}{m}$와 같이 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있다. 양변을 적분한 후 $m=10$, $F=5$를 대입하여 다음과 같이 속도를 구할 수 있다.

$$v=\int\frac{dv}{dt}dt=\int\frac{F}{m}dt=\frac{F}{m}t+c=\frac{1}{2}t+c$$

위 식은 속도에 대한 미분방정식의 일반해가 된다. 처음 시간인 $t=0$에서 정지된 상태는 속도 $v=0$을 의미한다. 따라서 이것을 초깃값으로 활용하면 초기조건은 $v(0)=0$이 된다.

초기조건을 대입하면 $v(0)=\left(\frac{1}{2}\times 0\right)+c=0$이므로 $c=0$임을 알 수 있고, 특수해는 $v(t)=\frac{1}{2}t$가 된다.

따라서 10초 후의 속도는 $v(10)=\frac{1}{2}\times 10=5$(m/s)다.

Check it up!

✔ **양함수 형태(implicit form)와 음함수 형태(explicit form)**

미분방정식을 다음과 같은 형태로 표현한 것을 기억할 것이다.

$$F(x,\ y,\ y')=0 \qquad \text{혹은} \qquad y'=F(x,\ y)$$

여기서 $F(x,\ y,\ y')=0$에는 변수와 도함수가 섞여 있고, $y'=F(x,\ y)$는 도함수와 변수로 나타낸 함수 부분이 구분되어 있다. $y'=F(x,\ y)$와 같이 변수와 도함수가 분리되어 있는 형을 양함수 형태라고 하고, $F(x,\ y,\ y')=0$과 같이 변수와 도함수가 분리되어 있지 않은 형을 음함수 형태라고 한다.

예를 들어, $x^2yy'+2y^3=0$은 변수와 도함수가 분리되어 있지 않은 $F(x,\ y,\ y')=0$의 형이므로 음함수 형태이고, $y'=2x^2y^3$은 변수와 도함수가 분리되어 있는 $y'=F(x,\ y)$의 형이므로 양함수 형태다.

미분방정식의 해 역시 다음과 같은 형으로 나타낼 수 있다.

$$f(x,\ y)=c \qquad \text{혹은} \qquad y=f(x)$$

이때 $x^2+y^2=1$과 같이 해와 변수가 같은 항에 섞여서 나타나는 $f(x,\ y)=c$와 같은 형태의 해를 음함수해라고 하고, $y=x^2$과 같이 해가 독립변수의 함수로 나타나 있는 $y=f(x)$와 같은 형태의 해를 양함수해라고 한다.

2.2 변수분리형 미분방정식

앞 절에서 이야기한 바와 같이 미분방정식의 형태를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y' = F(x,\ y) \tag{2.11}$$

■ 1계 미분방정식의 형태

위 식에서 보듯 미분방정식은 독립변수 x와 종속변수 y, 전체적으로 두 개의 변수를 가진 미분방정식이다. 그러므로 미분방정식을 풀 때 각각의 변수를 분리할 수 있는지를 먼저 관찰할 필요가 있다. 만약 위 식을 대수적으로 처리하여 변수분리가 가능하다면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)H(y)$$

이 식을 각 변수에 따라 다음과 같이 양변으로 분리할 수 있다.

$$\frac{1}{H(y)}dy = g(x)dx$$

여기서 $\dfrac{1}{H(y)}$를 $h(y)$로 두면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h(y)dy = g(x)dx$$

이 식은 양변으로 완전히 변수가 분리된 형태다. 양변을 적분하면

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{2.12}$$

와 같이 두 개의 변수인 x와 y로 이루어진 함수, 즉 미분방정식의 일반해를 구할 수 있게 된다. 이와 같이 변수를 분리하여 해를 얻을 수 있는 형태의 미분방정식을 **변수분리형 미분방정식**separable differential equation이라고 한다.

■ 변수분리형 미분방정식의 정의

예제 2-6 변수분리형 미분방정식

다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $y' = 2y$ (b) $4yy' + x = 0$ (c) $y' - 1 = y^2$

key point

도함수를 독립변수 x가 나타나는 형태로 고치자.

풀이

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$의 형태에서 변수를 분리하면, $\dfrac{1}{y}dy = 2dx$다.

양변을 적분하면 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2dx$$

$$\ln|y| = 2x + c^*$$

$$y = e^{2x + c^*} = e^{2x}e^{c^*} = ce^{2x} \quad \cdots ①$$

① e^{c^*}항도 모르는 상수이므로 단순히 c라고 두어도 상관없다.

(b) $4y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$의 형태로 바꾸고 변수를 분리하면, $4ydy = -xdx$가 된다. 양변을 적분하면

$$\int 4ydy = -\int xdx$$

$$\frac{4}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c^*$$

와 같이 된다. 여기에 2를 곱하여 정리하면

$$4y^2 + x^2 = 2c^*$$

가 되며, 각 변을 4로 나누면

$$y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{c^*}{2} = c \quad \cdots ②$$

② 타원의 방정식은 기본적으로 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$과 같이 나타나므로 이 해가 나타내는 궤적인 해곡선은 타원 형태라고 할 수 있다.

와 같이 타원 형태의 궤적이 해곡선이 되는 해를 구할 수 있다.

(c) $y' = 1 + y^2$으로 바꾸고 변수를 분리하면, $\dfrac{1}{1+y^2}dy = dx$다.

양변을 적분하면

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int dx$$

$$\tan^{-1}y = x + c$$

와 같이 되며, 이를 정리하면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$\therefore\ y = \tan(x + c)$$

예제 2-7 응용 방사능 물질의 붕괴에 대한 미분방정식

방사능 물질은 현재 존재하는 양에 비례하는 비율로 붕괴한다. 그렇다면 현재 방사능 물질이 2g 남아 있다고 가정할 때, 시간이 경과함에 따라 방사능 물질이 얼마나 남아 있을지에 대한 미분방정식을 세우고, 그 해를 구하라.

key point
'현존량에 비례하는 비율'이라는 말의 의미에 중점을 두자.

풀이

시각 t에서의 방사능 물질의 양을 $y(t)$라고 하고, 현존량에 비례하는 비율로 붕괴한다는 이론에 따라 비례상수를 a라고 정하면, 다음과 같은 미분방정식을 세울 수 있다.

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t)$$

즉 왼쪽 항은 방사능 물질의 변화(붕괴율)를 의미하고, 오른쪽 항은 현재 양 y에 비례상수 a를 곱하여 현재 양에 비례함을 뜻한다. 따라서 변화율이 현재 양에 비례한다는 물리적 현상을 반영한 미분방정식을 만들 수 있다.

위 식에서 변수를 분리하면 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있고

$$\frac{dy}{y} = adt$$

양변을 적분하면

$$\int \frac{1}{y} dy = \int adt$$
$$\ln|y| = at + c^*$$
$$y = e^{at+c^*} = e^{at}e^{c^*} = ce^{at}$$

과 같이 일반해를 구할 수 있다.

그리고 문제에서 주어진 현재 존재하는 방사능 물질의 양이 2g이라는 상황은, $t=0$인 시각에 방사능 물질이 2g이 남아있는 것으로 생각하여, 다음과 같이 초깃값으로 활용할 수 있다.

$$y(0) = 2$$

위의 초깃값을 대입하여 다음과 같이 특수해를 구할 수 있다.

$$y(0) = ce^0 = c = 2$$
$$\therefore\ y(t) = 2e^{at}$$

미분방정식 중에서 단번에 변수가 분리되는 변수분리형 방정식은 아니지만, 변환을 통해 변수분리형 미분방정식 형태로 고쳐서 변수분리형과 동일한 풀이법을 적용할 수 있는 방정식이 있다. 바로 확장된 형태의 변수분리형 미분방정식이다. 여기서 그러한 미분방정식에 대해 논의해보자.

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.13}$$

■ 확장된 변수분리형 미분방정식 형태

위 식은 **확장된 변수분리형 미분방정식**의 기본 형태다. 여기서 $\frac{y}{x} = u$로 변수를 변환하면, 다음과 같은 과정을 거쳐서 변수분리형 미분방정식의 형태로 만들 수 있다.

$$\frac{y}{x} = u, \text{ 즉 } y = ux$$

양변을 x로 미분하면 다음과 같다.

$$y' = (ux)' = u'x + u = \frac{du}{dx}x + u = g(u)$$

변수를 분리하여 적분하면 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\int \frac{1}{g(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx \tag{2.14}$$

이처럼 식 (2.13)과 같은 형태의 미분방정식을 변환 과정을 거쳐 식 (2.14)와 같은 변수분리형으로 만들 수 있다. 또한 식 (2.14)를 계산한 후 변환된 변수(u)를 제자리(x, y)로 돌려놓으면 변수 x와 y로 표현되는 함수인 미분방정식의 해를 얻을 수 있다.

예제 2-8 확장된 변수분리형 미분방정식

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$(y' - 1)x = y$$

key point

$\frac{y}{x} = u$로 치환 가능한 형태로 고치자.

풀이

원 식을 다음과 같이 바꾼 다음

$$xy' = x + y \rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x}$$

$\frac{y}{x} = u$라고 두면, $y = ux$다. 따라서 $y' = u'x + u$를 원 식에 대입하면

$$y' = x\frac{du}{dx} + u = 1 + u$$

$$x\frac{du}{dx}=1$$

$$du=\frac{1}{x}dx$$

가 되며, 위 식을 적분하면 다음과 같다.

$$\int du=\int\frac{1}{x}dx+c$$

$$u=\ln|x|+c$$

변환 변수를 되돌리면 $\frac{y}{x}=\ln|x|+c$가 된다. 그러므로 $y=x(\ln|x|+c)$가 된다.

2.3 완전 미분방정식

완전 미분방정식의 개념을 알기 위해서는 먼저 미적분학의 **전미분**total differential 개념부터 이해해야 한다. 함수 $u(x, y)$의 전미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.15}$$

▪ 전미분의 형태

여기서 함수 $u(x, y)=c=$상수라면, 위 식은 $du=0$의 형태가 된다. 이때 $du=0$은 $u'=0$이므로 미분방정식의 형태다. 그 해를 구하는 것은 간단하다. 양변을 적분하면 $u=c$이고, 바로 미분방정식의 해가 되는 것이다. 이런 전제를 바탕으로 식 (2.15)를 미분방정식으로 만드는 것이 완전 미분방정식의 기본 개념이다.

지금부터 그 과정을 찬찬히 살펴보자. 위에서 이야기한 것처럼 $du=0$이라고 가정하면, 식 (2.15)는

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0 \tag{2.16}$$

이 되고, 이를 도함수 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.17}$$

여기서 $\frac{\partial u}{\partial x}$와 $\frac{\partial u}{\partial y}$는 $u(x, y)$를 각각의 변수로 편미분한 형태이므로 x와 y를 변수로 하는 임의의 함수임에 틀림없다. 그러므로 앞에서 미분방정식의 형태로 정의한 $y' = F(x, y)$와 동일한 형태가 되어 식 (2.17)이 미분방정식이라는 사실을 알 수 있다.

이와 같이 $du = 0$이라는 전제가 전미분식으로부터 완전 미분방정식을 세우는 역할을 한다.

그러면 다음과 같은 미분방정식을 한번 생각해보자.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.18}$$

■ 완전 미분방정식의 정의

위 식이 전미분을 만족하는 형태라면 미분 형태가 **완전하다**exact라고 말하고, 완전한 미분 형태가 전제된 미분방정식을 **완전 미분방정식**exact differential equation이라고 한다.

식 (2.16)과 식 (2.18)을 비교해보면 완전 미분방정식이 될 수 있는 조건을 알 수 있다. 두 식이 동일한 식이 되기 위해서는

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \tag{2.19}$$

가 성립해야 하기 때문이다. 위 두 식을 현재 편미분한 변수가 아닌 나머지 변수로 각각 한 번 더 편미분하면, 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.20}$$

연속성을 가정하면 위의 두 식은 서로 같다고 할 수 있다. 그러므로 다음 식이 바로 완전 미분방정식의 필요충분조건이 된다.

■ 완전 미분방정식의 필요충분조건

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.21}$$

임의의 미분방정식에서 식 (2.21)과 같은 완전 미분방정식의 필요충분조건을 만족하는 식이 성립한다면, 완전 미분방정식으로 해를 찾아낼 조건이 갖추어진 것이다. 완전 미분방정식의 해는 위 과정에서 출발점이었던 함수 $u(x, y)$이기에 찾기 어렵지 않다. 함수 $u(x, y)$가 '완전한' 형태로 미분되는 과정에서 탄생한 방정식이 완전 미분방정식이기 때문이다.

해가 되는 $u(x, y)$는 앞의 식 (2.19)를 이용하여 계산할 수 있는데, 두 식 중 어떤 식을 사용해도 무관하다. 어떤 변수로 미분되어 있는지에 따라 그 변수로 적분하면 $u(x, y)$를 얻을 수 있기 때문이다. 먼저 x로 편미분되어 있는 식 $\frac{\partial u}{\partial x}=M$에 대해 생각해보자. 이 식을 x에 대해 적분하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$u(x, y)=\int M dx+m(y) \tag{2.22}$$

■ 완전 미분방정식의 해

여기서 $m(y)$는 적분상수다. 원 식인 $\frac{\partial u}{\partial x}=M$은 u를 x로 편미분한 식이었기 때문에 y는 상수로 취급될 수밖에 없다. 따라서 x로 적분하면 상수로 취급하여 사라졌던 y가 다시 적분상수로 나타나는 것이다.

식 $\frac{\partial u}{\partial y}=N$으로부터도 동일한 방식으로 다음과 같이 완전 미분방정식의 해인 $u(x, y)$를 얻을 수 있다.

$$u(x, y)=\int N dx+n(x) \tag{2.23}$$

이때 $n(x)$ 역시 적분상수로 되살아난 x의 함수다.

그러면 완전 미분방정식의 해법에 대해 정리해보자. 가장 먼저 해야 할 일은 해당 미분방정식이 완전 미분방정식인지 아닌지 알아보는 것이다. 이때 사용되는 조건이 식 (2.21)이다. 식 (2.21)을 만족하면 완전 미분방정식이라는 사실이 확인된 것이고, 다음에는 식 (2.22)나 식 (2.23)을 사용하여 함수 u를 구한다. 함수 u를 구하는 것은 애초에 완전 미분방정식을 거론하게 된 미분방정식 $du=0$의 해를 얻기 위한 것이고, 그 해가 곧 완전 미분방정식의 해이기 때문이다. 즉 $u(x, y)=c$가 바로 주어진 완전 미분방정식의 해가 된다.

예제 2-9 완전 미분방정식 구하기

다음에 주어진 $u(x, y)$를 이용하여 완전 미분방정식을 완성하라.

(a) $u(x, y)=x^2+y^2$　　　(b) $u(x, y)=\frac{y}{x}$

key point

완전 미분형

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

풀이

(a) $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$= \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}dy = 0$$

$\therefore\ 2xdx + 2ydy = 0 \ \rightarrow\ xdx + ydy = 0$ 또는 $y' = -\dfrac{x}{y}$

(b) $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = \dfrac{\partial(y/x)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial(y/x)}{\partial y}dy = 0$

$\therefore\ -\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy = 0$ 또는 $y' = \dfrac{y}{x}$

예제 2-10 완전 미분방정식의 조건

다음 미분방정식이 완전 미분방정식임을 보여라.

(a) $xdx + ydy = 0$ (b) $\dfrac{ydx}{x^2} = \dfrac{dy}{x}$

key point

완전 미분방정식이 되기 위한 필요충분조건 : $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

풀이

(a) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 식과 비교하면

$M(x, y) = x$, $N(x, y) = y$가 되고, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$이다.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$이 성립하므로 완전 미분방정식이다.

(b) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 형태로 정리하면 $-\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy = 0$이므로, 다음과 같다.

$$M(x, y) = -\frac{y}{x^2}, \quad N(x, y) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$이 성립하므로 완전 미분방정식이다.

예제 2-11 완전 미분방정식의 풀이

다음 완전 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $xdx + ydy = 0$ (b) $-\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy = 0$

key point

$u(x, y) = \displaystyle\int Mdx + m(y)$

풀이

(a) [예제 2-8]의 (a)에서 완전 미분방정식의 조건을 만족했으므로 이 식은 완전 미분방정식이다. 그러므로

$u(x,\ y) = \int M dx + m(y)$를 이용하여 해를 구하면 된다.

$M(x,\ y) = x$이므로

$$u = \int x dx + m(y) = \frac{1}{2}x^2 + m(y)$$

가 된다. 위 식을 식 (2.19)의 $\frac{\partial u}{\partial y} = N$에 대입하면 $N(x,\ y) = y$이므로

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}x^2 + m(y)\right] = m'(y) = N = y$$

$$m(y) = \int m'(y) dy = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{2}x^2 + m(y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

과 같다. $u(x,\ y) = c$가 해이므로, $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c_1 = c$가 된다.

임의의 상수 c_1과 c를 모아서 정리하면, 해는 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c - c_1 = c_2$ 의 형태가 되는데, 양변을 $\frac{1}{2}$로 나누면 $x^2 + y^2 = c^*$도 해가 된다.

(b) [예제 2-8]의 (b)에서 완전 미분방정식의 조건을 만족했으므로, 이 식은 완전 미분방정식의 형태다.

$u(x,\ y) = \int M dx + m(y)$를 이용하면 $M(x,\ y) = -\frac{y}{x^2}$이므로

$$u = \int \left(-\frac{y}{x^2}\right) dx + m(y) = \frac{y}{x} + m(y)$$

가 된다. 위에서 구한 u를 $\frac{\partial u}{\partial y} = N$에 대입하면

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x} + m(y)\right] = \frac{1}{x} + m'(y) = N = \frac{1}{x}$$

이므로 $m'(y) = 0$이다.

$$m(y) = \int m'(y) dy = \int 0 dy = c_1$$

$$\therefore\ u = \frac{y}{x} + m(y) = \frac{y}{x} + c_1$$

$u(x,\ y) = c$가 되어야 하므로, $\frac{y}{x} + c_1 = c$가 된다. 따라서 $\frac{y}{x} = c - c_1 = c^*$이 해가 된다.

2.4 선형 미분방정식

2.4.1 1계 선형 미분방정식

1 식 (2.7) 참조

2.1절에서 선형 미분방정식의 일반적인 형태를 다음 식과 같이 나타냈다.[1]

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r^*(x) \qquad (2.24)$$

1계 선형 미분방정식1st order linear ordinary differential equation을 알아보기 위해 위 식에 $n=1$을 대입해보자.

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = r^*(x)$$

위 식을 $a_1(x)$로 나누어 다음과 같이 보기 편한 형태로 바꿔보자.

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{r^*(x)}{a_1(x)}$$

■ 1계 선형 미분방정식의 표준형

위 식에서 $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)} = p(x)$, $\dfrac{r^*(x)}{a_1(x)} = r(x)$로 두면, 다음과 같은 1계 선형 미분방정식의 표준형standard form을 얻는다.

$$\boxed{y' + p(x)y = r(x)} \qquad (2.25)$$

식 (2.25)는 자연적인 또는 공학적인 시스템을 미분방정식으로 표현한 것이다. 이 식에서 $r(x)$는 시스템의 입력을 나타내며, 시스템의 출력을 나타내는 함수가 바로 미분방정식의 해인 $y(x)$라는 사실을 기억해두자.

지금부터 식 (2.25)와 같이 표현되는 1계 선형 미분방정식의 일반해를 유도해보자. 식 (2.25)를 미분형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\{p(x)y - r(x)\}dx + dy = 0$$

■ 적분인자

이와 같은 형태는 앞의 완전 미분방정식에서 많이 보던 것이다. 위 식은 현재로는 완전 미분방정식의 형태로 볼 수 없으나, 임의의 함수를 곱하여 완전 미분방정식의 형태로 변환할 수 있다. 이때 완전미분이 아닌 형태의 방정식을 완전 미분 형태로 변환할 수 있게 곱하는 임의의 함수를 **적분인자**integrating factor라고 한다.

그러면 위 식을 완전 미분형으로 바꿀 수 있는 적분인자를 x만의 함수인 $\mu(x)$

라고 가정하고 각 항에 곱하면

$$\mu(x)\{p(x)y-r(x)\}dx+\mu(x)dy=0$$

이 되고, 완전 미분방정식의 필요충분조건인 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$을 활용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(py-r)=\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}$$
$$\mu p=\frac{d\mu}{dx}$$

위 식을 변수분리한 후 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d\mu}{\mu}=pdx\ ,\ \ \ln|\mu|=\int pdx$$

그러므로 적분인자는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=\exp\Big[\int p(x)dx\Big] \tag{2.26}$$

이제 본격적으로 1계 선형 미분방정식의 해인 $y(x)$를 구하기 위한 단계로 들어가보자. 위에서 구한 적분인자를 1계 선형 미분방정식의 표준형인 식 (2.25)의 양변에 곱하면

$$e^{\int pdx}(y'+py)=e^{\int pdx}r$$

이 된다. $\int p(x)dx=h(x)$로 두면 $p(x)=h'(x)$가 되고

$$e^{\int pdx}=e^h,\ \ (e^h)'=h'e^h=pe^h$$

이 성립한다. 그러므로 위 식을 토대로 다음과 같이 식을 전개하면 미분방정식의 해인 y를 쉽게 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}(ye^h)'=\frac{d}{dx}(ye^h)&=y'e^h+y(e^h)'\\&=y'e^h+y(pe^h)=e^h(y'+py)\\&=e^hr\end{aligned}$$

위 식의 맨 첫 항과 마지막 항을 양변으로 하여 적분하면

■ 1계 선형 미분방정식의 해

$$ye^h = \int e^h r dx + c$$

가 되고, 위 식에서 다음과 같이 $y(x)$를 구할 수 있다.

$$y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} r(x) dx + c\right], \quad h(x) = \int p(x) dx \qquad (2.27)$$

이 식이 1계 선형 미분방정식인 식 (2.25)의 해다.

이와 같이 조금 복잡한 과정을 거쳐서 1계 선형 미분방정식의 해를 식 (2.27)과 같이 유도해보았다. 일반적으로 1계 선형 미분방정식의 해를 구할 때에는 매번 위의 과정을 그대로 따라서 해를 구하지 말고, 선형 미분방정식의 표준형인 식 (2.25)와 그 일반해가 되는 식 (2.27)을 활용하는 것이 좋다. 아울러 적분상수 c는 일반해에서는 미지수로 남게 되지만, 초기조건이 주어지는 초깃값 문제에서는 구체적인 값이 정해진다는 사실을 다시 한 번 강조한다.

예제 2-12 1계 선형 미분방정식

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$xy' + y + 1 = 0$$

key point
1계 선형 미분방정식의 표준형
$y' + p(x)y = r(x)$

풀이

먼저 원 식을 표준형으로 고치면 다음과 같다.

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}$$

1계 선형 미분방정식의 표준형과 계수를 비교하면

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad r(x) = -\frac{1}{x}$$

$$h(x) = \int p(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad ①$$

$$\therefore\ e^{h(x)} = e^{\ln|x|} = x$$

① $h(x) = \int p(x) dx$로 둔다.

와 같으므로, 식 (2.27)로부터 다음과 같은 일반해를 얻을 수 있다.

$$y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} r(x) dx + c\right]$$
$$= \frac{1}{x}\left[\int x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx + c\right]$$

$$= -1 + \frac{c}{x}$$

예제 2-13 1계 선형 미분방정식(초깃값 문제)

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y' + y = e^x, \quad y(0) = 1$$

key point
초깃값은 일반해를 구한 다음에 적용한다.

풀이

1계 선형 미분방정식의 표준형과 비교하면

$$p(x) = 1, \quad r(x) = e^x, \quad h(x) = \int p(x)dx = \int (1)dx = x$$

$$\therefore \; e^{h(x)} = e^x$$

과 같으므로, 식 (2.27)로부터 다음과 같은 일반해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} r(x)dx + c\right] \\ &= e^{-x}\left[\int e^x e^x dx + c\right] = e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + c\right] \\ &= \frac{1}{2}e^x + ce^{-x} \end{aligned}$$

여기에 초기조건을 대입하면

$$y(0) = \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = \frac{1}{2}$$

이 되고, 다음과 같은 특수해를 얻을 수 있다.

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

2.4.2 베르누이 방정식

1계 선형 미분방정식의 일반적인 해법은 바로 앞에서 알아보았다. 그런데 만약 선형이 아닌 경우라면 어떤 방법으로 해를 구해야 할까? 실제로 많은 응용 예들은 비선형인 경우가 많다. 그런 경우에는 비선형을 선형인 형태로 변환하여 풀

이하는 것이 유용한 방법인데, 그 예가 바로 여기서 학습할 **베르누이**Bernoulli **방정식**이다.

베르누이 방정식은 비선형인 미분방정식을 선형으로 변환할 수 있는 미분방정식의 모델로, 다음과 같은 표준형으로 기억해두는 것이 좋다.

■ 베르누이 방정식의 표준형

$$y' + p(x)y = r(x)y^n, \quad (n\text{은 임의의 실수}) \tag{2.28}$$

방정식을 잘 살펴보면 알 수 있겠지만, 베르누이 방정식과 일반 선형 미분방정식과의 차이점은 $r(x)$에 곱한 y^n에 있다. 만약 $n=0,\,1$인 경우라면 다음과 같이 일반 선형 미분방정식의 형태와 전혀 차이가 없다.

$$\begin{aligned} &n=0 \qquad y' + p(x)y = r(x) \\ &n=1 \qquad y' + p(x)y = r(x)y \;\rightarrow\; y' + \{p(x) - r(x)\} = 0 \end{aligned}$$

하지만 그 외의 경우에는 비선형 미분방정식이 되기 때문에, 앞에서 언급한 1계 선형 미분방정식의 해를 구하는 방법은 사용할 수 없다. 그러므로 여기서는 베르누이 방정식이 비선형인 경우에 치환을 통해 선형 미분방정식의 형태로 변환하는 방법에 대해 알아본다. 선형 미분방정식으로 변환한 후에는 1계 선형 미분방정식에서 해를 구하는 과정과 동일하게 식 (2.27)로 해를 구할 수 있고, 치환한 변수를 원래대로 되돌리는 수식 처리만 하면 원 방정식에서 구하려던 해를 구할 수 있다.

우선 비선형 베르누이 방정식을 선형으로 바꾸는 방법에 대해 알아보자. 식 (2.28)이 비선형일 경우에는 다음과 같이 치환하여 식을 전개한다.

■ 베르누이 방정식의 치환

$$u(x) = \{y(x)\}^{1-n} \tag{2.29}$$

위 식을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u' &= (1-n)y^{-n}y' = (1-n)y^{-n}(ry^n - py) \\ &= (1-n)(r - py^{1-n}) = (1-n)(r - pu) \end{aligned}$$

이 식을 u에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$u' + (1-n)pu = (1-n)r \tag{2.30}$$

식 (2.30)은 변수만 다르게 사용했을 뿐, 1계 선형 미분방정식인 식 (2.25)와 동일한 형태의 식이다. 즉 치환한 변수인 u에 대해서는 선형 미분방정식의 형

태를 띠고 있다는 이야기다. 따라서 식 (2.30)은 1계 선형 미분방정식의 해를 구하는 것과 같은 식으로 해를 구할 수 있다.

이처럼 원래 비선형이었던 미분방정식도 적절한 치환을 통해 선형 미분방정식의 형태로 변환할 수 있다면 해를 쉽게 구할 수 있으며, 그 유용한 예가 바로 이 절에서 설명한 베르누이 방정식이다.

예제 2-14 베르누이 방정식

다음 베르누이 방정식의 해를 구하라.

$$y' + y = y^2$$

> **key point**
> 베르누이 방정식의 표준형
> $y' + p(x)y = r(x)y^n$

풀이

먼저 베르누이 방정식의 모델인 식 (2.28)과 비교하면

$$n = 2,\ \ p(x) = 1,\ \ r(x) = 1$$

인 경우이고, 다음과 같이 치환할 식을 설정한다.

$$u = y^{1-n} = y^{-1}$$

위 식을 미분하면

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(y^2 - y) = -1 + y^{-1}$$

이 되고, 위 식을 변수 u에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$u' - u = -1$$

위 식을 1계 선형 미분방정식의 형태로 풀면

$$u = e^{x}\left[\int e^{-x}(-1)dx + c\right] = 1 + ce^{x}$$

이 되며, 치환한 변수 u를 원변수 y로 되돌리면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$u = y^{-1}$$

$$\therefore\ y = u^{-1} = \frac{1}{1 + ce^{x}}$$

예제 2-15 응용 **로지스틱(logistic) 방정식**

벨기에의 통계학자 페르헐스트(Verhulst)는 인구 증가에 대한 모델로 다음과 같은 식(로지스틱 방정식)을 소개하였다. 이 방정식의 해를 구하라.

$$y' - Ay = -By^2$$

> **key point**
> **로지스틱 방정식** : 인구의 증가속도를 미분방정식으로 나타내어 인구성장의 법칙을 정식화한 것

풀이

식 (2.28)과 비교하면

$$n = 2,\ \ p(x) = -A,\ \ r(x) = -B$$

인 경우이고, 다음과 같이 치환할 식을 설정한다.

$$u = y^{1-n} = y^{-1}$$

위 식을 미분하면

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(Ay - By^2) = -Ay^{-1} + B$$

가 되며, 위 식을 변수 u에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$u' + Au = B$$

위 식을 1계 선형 미분방정식의 형태로 풀면

$$u = e^{-Ax}\left[\int e^{Ax}Bdx + c\right] = \frac{B}{A} + ce^{x}$$

이 되며, 치환한 변수 u를 원변수 y로 되돌리면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$y = u^{-1} = \frac{1}{\dfrac{B}{A} + ce^{-Ax}}$$

이 해는 인구성장에 대한 로지스틱 법칙을 나타내는 식이다.

여기까지 미분방정식 풀이에서 가장 기본이 되는 1계 선형 미분방정식에 대해 알아보았다. 앞에서 설명한 변수분리형이나 완전 미분형 미분방정식은 식의 구조적 이해에 따른 풀이였지만, 선형 미분방정식의 표준형은 해를 그 식에서 직접 구할 수 있는 형태라고 할 수 있다. 이러한 방식의 미분방정식 풀이에 대한 내용은 다음 장인 3장에서도 확장되어 나타날 것이다. 그러므로 이 장에서 학습한 선형 미분방정식의 기본 개념과 구조에 대해 확실히 이해해두기 바란다.

Chapter 02 핵심요약

■ 미분방정식이란?

- 변수의 개수에 따라 상미분방정식, 편미분방정식으로 분류된다.
- 1계 미분방정식은 $F(x,\ y,\ y')=0$ 혹은 $y'=F(x,\ y)$의 형으로 표현한다.
- 미분방정식의 해는 함수의 형태로 나타나며, $f(x,\ y)=c$ 혹은 $y=f(x)$ 형으로 표현한다.

■ 변수분리형 미분방정식

미분방정식 $y'=F(x,\ y)$를 독립변수 x와 해이자 종속변수인 y에 대해 $h(y)dy=g(x)dx$와 같이 양변으로 분리한 다음, 적분하여 해를 구하는 형태의 미분방정식을 말한다.

■ 완전 미분방정식

미분방정식 $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0$이 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$와 같은 전미분인 경우, $u(x,\ y)=\displaystyle\int Mdx+m(y)$ 혹은 $u(x,\ y)=\displaystyle\int Ndx+n(x)$와 같은 해를 구할 수 있는 형태의 미분방정식을 완전 미분방정식이라 한다. 단, 완전 미분방정식이 될 수 있는 조건은 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$이다.

■ 선형 미분방정식

- 1계 선형 미분방정식의 표준형 : $y'+p(x)y=r(x)$
- 1계 선형 미분방정식의 해 : $y(x)=e^{-h(x)}\left[\displaystyle\int e^{h(x)}r(x)dx+c\right],\ h(x)=\displaystyle\int p(x)dx$

■ 베르누이 방정식

- 베르누이 방정식의 표준형 : $y'+p(x)y=r(x)y^n$, (n은 임의의 실수)
- 베르누이 방정식의 치환식 : $u(x)=\{y(x)\}^{1-n}$

Chapter 02 연습문제

※ 다음 미분방정식의 계수와 선형성에 대해 설명하라.

2.1 $a^2y''' + by = y'$

2.2 $t^{1/2}y + t^2y' + t^3y'' = 0$

2.3 $x^2y' + 2e^{2x}y + y^2y'' = e^{2x}\sin 2x \cos x$

2.4 $\dfrac{d^2(y^2)}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 0$

※ 다음 미분방정식의 해를 구하라.

2.5 $y' = \sin x, \qquad y(0) = 1$

2.6 $\dfrac{di}{dt} = e^{-2t}, \qquad i(0) = 0$

2.7 $y' = x\sin x, \qquad y(0) = \pi$

※ 다음 미분방정식의 해를 구하라.

2.8 $y' - y = 0$

2.9 $9yy' = -4x$

2.10 $ydx - xdy = 0$

2.11 $xy' = ny, \qquad y(1) = n$

2.12 $yy' + 2x = 0, \qquad y(0) = 2$

2.13 $Ai'(t) + Bi(t) = 0, \qquad I(0) = C$

2.14 $yy' = \sin^2 x, \qquad y(0) = \sqrt{3}$

2.15 응용 3000년 정도 된 것으로 추정되는 화석화된 나무가 있다. 방사성 동위원소인 ${}_6C^{14}$의 반감기를 5730년이라고 할 때, 화석화된 나무에 남아 있는 ${}_6C^{14}$의 양은 처음에 존재했던 양의 몇 퍼센트 정도일까?

※ 다음 완전 미분방정식의 해를 구하라.

2.16 $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0$

2.17 $2xy dx + x^2 dy = 0$

2.18 $(2xy + 1)dx + (x^2 - 6y)dy = 0$

2.19 $(xdy - ydx)/x^2 = 0, \quad y(1) = 1$

2.20 $\{(x+1)e^x - e^y\}dx - xe^y dy = 0, \quad y(1) = 0$

2.21 $3x^2(y-1)^2 dx + 2x^3(y-1)dy = 0, \quad y(-2) = 2.5$

※ 다음 1계 미분방정식의 해를 구하라.

2.22 $y' - y = e^{2x}$

2.23 $y' + y = e^{2x}$

2.24 $y' + 3y = -2$

2.25 $y' + 2y = e^x(3\sin 2x + 2\cos 2x)$

2.26 $xy' + y = 2x, \quad y(1) = 2$

2.27 $y' + y\tan x = 2x\cos x, \quad y(0) = -1$

※ 다음 베르누이 방정식의 해를 구하라.

2.28 $y' + xy = \dfrac{x}{y}$

2.29 $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$

2.30 $3y' + y = (1-2x)y^4$을 풀어서 y^3의 값을 구하라.

2.31 응용 저항과 콘덴서로 이루어진 전기회로의 식은 $R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = E(t)$와 같이 나타난다.

(a) $Q(0) = Q_0$이고, $E(t) = 0$를 사용하는 경우의 해를 구하라.

(b) 축전기가 초기 충전값의 99%를 잃게 되기까지의 시간을 구하라.

2.32 응용 저항과 코일로 이루어진 전기회로의 식은 $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E(t)$와 같이 나타난다. 여기서, $E(t)$는 전원을 나타내는 함수다.

(a) 전원이 일정한 값을 갖는 직류전원 $E(t) = E_0$인 경우, 전기회로에 흐르는 전류 $I(t)$를 구하라.

(b) 시간에 따라 전원 값이 변하는 교류전원 $E(t) = E_0 \sin\omega t$인 경우, 전기회로에 흐르는 전류 $I(t)$를 구하라.

2.33 응용 저항과 콘덴서로 이루어진 전기회로의 식은 $R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I = \dfrac{dE}{dt}$와 같이 나타난다. 여기서, $E(t)$는 전원을 나타내는 함수다.

(a) 전원이 일정한 값을 갖는 직류전원 $E(t) = E_0$인 경우, 전기회로에 흐르는 전류 $I(t)$를 구하라.

(b) 시간에 따라 전원 값이 변하는 교류전원 $E(t) = E_0 \sin\omega t$인 경우, 전기회로에 흐르는 전류 $I(t)$를 구하라.