

01

확률 및 랜덤 과정의 개요

Introduction to Probability and Random Process

이 장의 학습 내용

확률 이론 및 랜덤 과정의 필요성 _1.1

집합 이론 _1.2

신호 및 시스템 _1.3

연습문제

학습목표

- 공학 분야에서 확률 이론과 랜덤 과정의 필요성에 대해 이해한다.
- 양상불과 랜덤 과정에 대한 개념을 기본적인 통계량과 연계하여 이해한다.
- 집합의 개념과 집합에 적용되는 연산을 복습한다.
- 집합 연산에 적용되는 대수 법칙을 알아본다.
- 신호의 종류와 이에 따른 신호의 특성을 살펴본다.
- 에너지와 전력의 기본 개념을 익힌다.
- 특이 신호에 대해 살펴보고 적용되는 예를 통해 그 사용법을 익힌다.
- 푸리에 급수를 이용하여 주기 신호에 대한 스펙트럼을 계산하는 방법을 익힌다.
- 푸리에 변환을 통해 비주기 신호의 스펙트럼을 계산하고 응용하는 방법을 익힌다.
- 전력밀도 스펙트럼과 에너지 밀도 스펙트럼의 개념을 살펴본다.



이 장에서는 공학도에게 확률과 랜덤 변수, 랜덤 과정이 왜 필요한지에 대해 알아본다. 그리고 확률 및 랜덤 과정 이론을 공부하는 데 필요한 집합 이론과 푸리에 기법, 랜덤 신호 및 선형 시스템에 관한 기본 이론을 정리한다. 신호 및 시스템을 다루는 1.3절에서는 먼저 랜덤 신호의 특성과 랜덤 신호가 적용되는 선형 시스템의 기본 이론을 설명하고, 이들을 주파수 영역에서 해석할 수 있는 푸리에 변환 기법에 대해 자세히 다룬다.

1. 확률 이론 및 랜덤 과정의 필요성

시스템을 설계하거나 신호를 분석할 경우, 랜덤 신호 자체가 분석적이지 않으므로 확률 이론이나 랜덤 과정을 이용해 시뮬레이션을 수행해야 하고, 그 결과 또한 확률 및 랜덤 과정을 통해 분석해야 한다.

2. 집합의 개념

집합이란 사물 혹은 실험으로부터 얻은 결과값을 모아 놓은 것으로, 결과값들을 집합의 원소라고 한다. 집합 이론을 알면 어떤 실험 결과에 대해 확률 개념을 적용할 수 있기 때문에, 집합 이론은 확률 이론을 공부할 때 기본이 된다.

3. 집합의 연산

집합에서도 다음 표와 같이 여러 가지 연산이 적용될 수 있다.

연산	기호	내용
합집합	$A + B = A \cup B$	A 와 B 에 속한 모든 원소의 집합
차집합	$A \subset B$ 일 때 $B - A$	B 의 원소 중 A 에 속하지 않는 원소의 집합
교집합	$AB = A \cap B$	A 와 B 에 모두 속하는 원소의 집합
여집합	$A^c = \overline{A}$	전체 집합 S 의 원소 중에서 A 에 속하지 않는 원소의 집합

4. 집합에 대한 대수 법칙

집합 연산에 대한 중요한 대수 법칙은 다음 표와 같이 정리할 수 있다.

대수 법칙	내용
멱등 법칙	$A + A = A, AA = A$
교환 법칙	$A + B = B + A, AB = BA$
결합 법칙	$A + (B + C) = (A + B) + C, A(BC) = (AB)C$
분배 법칙	$A(B + C) = AB + AC, A + (BC) = (A + B)(A + C)$
드모르간의 제1법칙	$\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$
드모르간의 제2법칙	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

5. 에너지 신호와 전력 신호

신호가 유한값의 에너지를 가질 경우 신호 $x(t)$ 는 에너지 신호라고 하며, 유한값의 평균 전력을 가질 경우 전력 신호라고 한다. 에너지 신호는 평균 전력이 $P = 0$ 이며 반대로 전력 신호의 에너지는 $E \rightarrow \infty$ 가 된다.

6. 선형 시스템

선형 시스템은 중첩의 원리가 성립하는 시스템을 말한다. 선형 시스템의 경우 입력 신호를 기본 신호의 조합으로 분해하여 각 기본 신호에 대한 출력 신호를 얻은 뒤, 이들을 다시 조합하여 원래의 입력 신호에 대한 출력을 얻을 수 있다.

7. 푸리에 급수

주기 신호를 복소 지수 함수들의 합 형태로 전개한 것을 말하며, 주기 신호의 푸리에 급수 계수들은 조화 주파수 성분을 의미하므로 주기 신호는 선 스펙트럼을 갖는다. 임의의 주기 신호 $x(t)$ 에 대한 푸리에 급수 전개는 다음과 같다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 = 1/T_0$$

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

8. 푸리에 변환

푸리에 변환은 비주기 함수에 적용하는 푸리에 급수를 확장한 형태라고 할 수 있으며, 비주기 함수에 대한 스펙트럼 정보를 얻을 수 있다. 푸리에 변환쌍은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

9. 푸리에 변환의 특징

- 선형성 : $\mathcal{F}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[x_1(t)] + \beta \mathcal{F}[x_2(t)]$
- 쌍대성 : $x(t) \leftrightarrow X(f)$, $X(t) \leftrightarrow x(-f)$
- 시간 이동 : $\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$
- 주파수 이동 : $\mathcal{F}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
- 콘벌루션 특성 : $\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)Y(f)$, $\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$
- 파시발의 정리 : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

10. 위너 힌친의 정리

비주기 전력 신호 $x(t)$ 의 전력밀도 스펙트럼 $S_x(f)$ 와 시간 자기 상관 함수 $R_{xx}(\tau)$ 에 대한 푸리에 변환이 같음을 알 수 있는데, 이를 위너 힌친의 정리라고 한다. 즉, 비주기 전력 신호의 전력밀도 스펙트럼은 자기 상관 함수를 통해 구할 수 있다.

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

1.1 확률 이론 및 랜덤 과정의 필요성

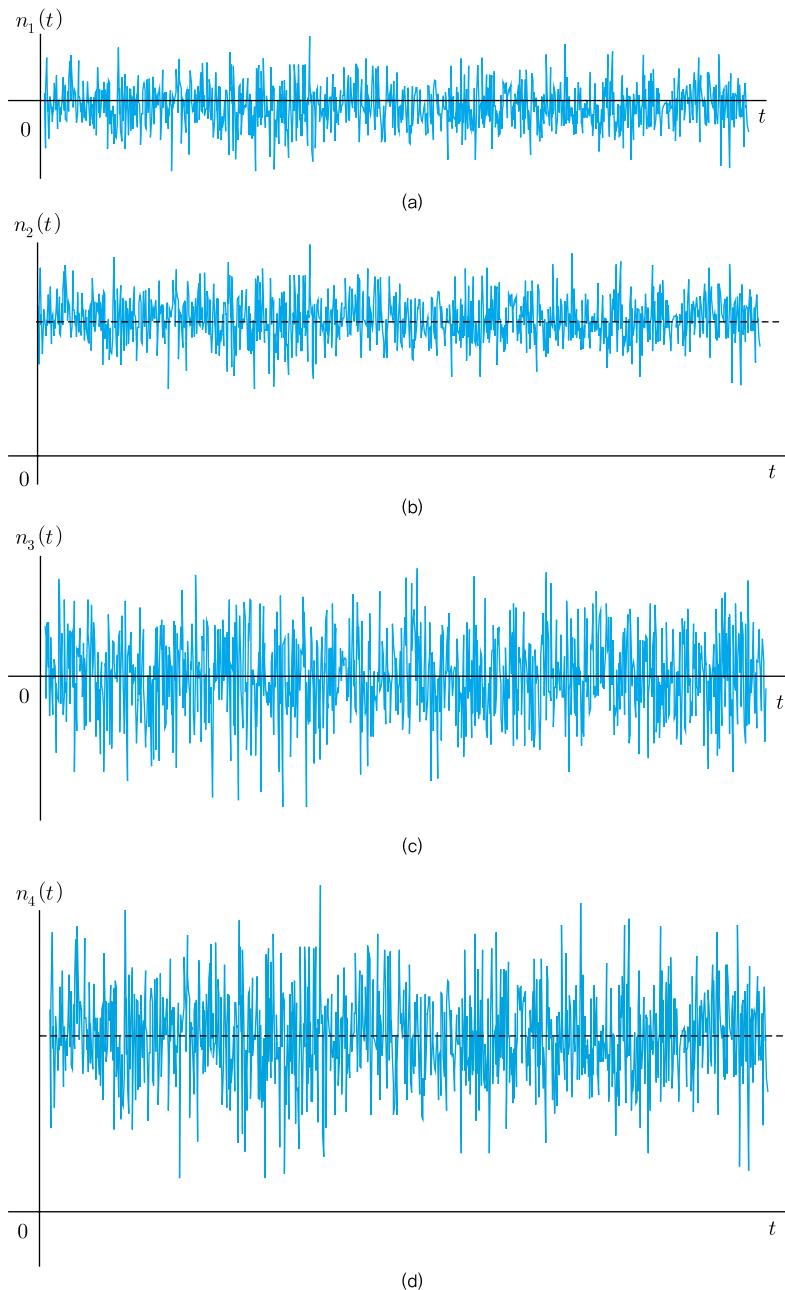
확률 및 랜덤 과정 이론이 응용되는 분야는 통신 시스템, 전기 및 전자 공학, 음향 공학, 지리 공학, 해양 및 환경 공학, 컴퓨터 공학, 화공학, 기계 공학, 우주 천문학 등 실로 광범위하다. 특히 시스템을 설계하거나 신호를 분석할 경우, 랜덤 신호 자체가 분석적^{analytic}이지 않으므로 확률 이론이나 랜덤 과정을 이용해 시뮬레이션^{simulation}을 수행해야 하고, 그 결과도 확률 및 랜덤 과정을 통해 분석해야 한다.

이 책은 확률 이론이나 랜덤 과정에 대한 개념을 주로 랜덤 신호^{random signal}와 관련하여 정의하고 설명하려고 노력했다. 공학을 다루는 데 확률 및 랜덤 과정이 왜 필요한지 예를 들어 알아보자.

[그림 1-1]은 통신 시스템에 항상 존재하는 백색 가우시안 잡음^{white Gaussian noise}을 나타낸 것으로, 그림에서 볼 수 있듯이 잡음 신호는 랜덤 신호다. 잡음 신호 자체를 분석적으로 표현하는 것이 어렵기 때문에, 확률 및 통계적인 방법을 통해 다뤄야 한다.

$n_1(t)$ 과 $n_2(t)$ 의 경우 두 잡음 신호의 모양과 크기가 거의 같아 구별할 수 없지만, $n_2(t)$ 의 평균값^{average value}이 $n_1(t)$ 의 평균값보다 더 크므로 평균값은 두 랜덤 신호를 구별하는 데 대단히 중요한 척도가 된다. 마찬가지로 $n_3(t)$, $n_4(t)$ 의 경우에도 두 잡음 신호는 모양과 크기가 거의 같아 구별할 수 없지만, $n_4(t)$ 의 평균값이 $n_3(t)$ 의 평균값보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 한편 $n_1(t)$ 와 $n_3(t)$ 의 경우 두 신호의 모양과 평균값은 유사하지만 $n_3(t)$ 의 전력^{power}이 $n_1(t)$ 의 전력보다 훨씬 큼을 알 수 있는데, 이는 분산^{variance}이라는 통계 파라미터를 이용해 측정할 수 있다.

평균과 분산은 랜덤 신호를 다루는 데 매우 중요한 통계 척도다. 이 척도를 이용하여 [그림 1-1]의 신호에 대해, $n_2(t)$ 와 $n_4(t)$ 는 $n_1(t)$ 와 $n_3(t)$ 에 비해 전체적인 신호 중간 레벨(평균)이 더 크고, $n_3(t)$ 와 $n_4(t)$ 는 $n_1(t)$ 와 $n_2(t)$ 에 비해 전체적인 신호 레벨은 같으나 평균을 중심으로 위아래로 변화하는 정도(분산)가 더 크다고 말할 수 있다. 이와 같이 평균과 분산은 랜덤 신호를 표현하고 분석하는 데 중요한 개념으로 사용된다. 랜덤 신호가 전기 신호^{electrical signal}일 경우 평균은 랜덤 신호의 직류 성분^{DC component}을, 분산은 랜덤 신호의 교류 평균 전력^{AC average power}을 의미한다. 다시 말하지만 확률 및 통계에 대한 개념 없이 랜덤 신호를 분석하는 것은 거의 불가능하다.

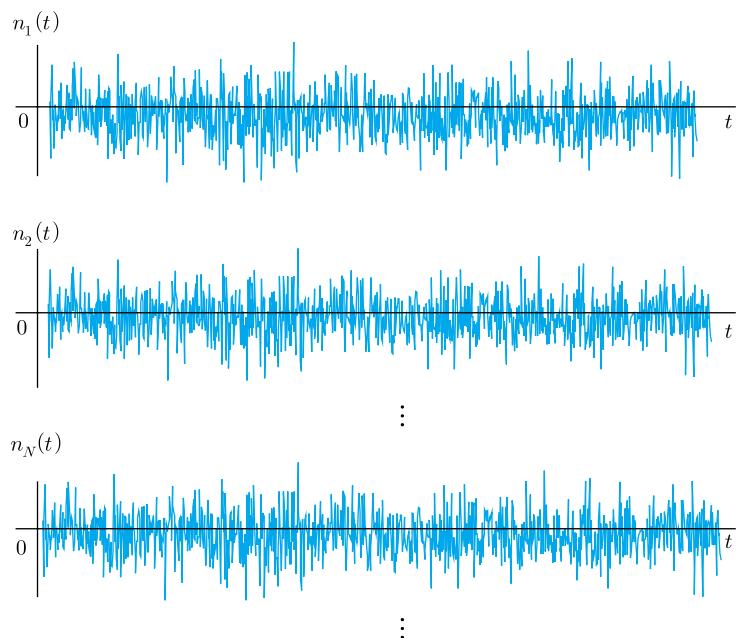


[그림 1-1] 여러 가지 형태의 백색 가우시안 잡음 신호

[그림 1-1]의 잡음 신호는 어느 한 시간 대에 발생한 랜덤 신호 중 하나일 뿐이므로, 백색 가우시안 신호 전체의 완전한 특성을 나타낸다고 볼 수 없다. 예를 들어 통신 시스템에서 발생하는 백색 가우시안 잡음 신호는 모양과 크기 등이 서로 유사하지만 현재 발생한 잡음 신호와 내일 동일한 시간에 발생할 잡음 신호, 그리고 한 달 뒤에 발생할 잡음 신호가 똑같지 않다. 각각의 신호는 채널

상태나 통신 시스템 상태 등에 따라 조금씩 변한다고 볼 수 있다. 따라서 전체적 이면서 일반적인 백색 가우시안 잡음의 통계적 특성을 얻으려면 발생 가능한 모든 잡음 신호를 모아서 다뤄야 한다. 이와 같이 발생 가능한 잡음 신호를 모두 모은 랜덤 신호의 집합을 양상을 ensemble이라고 하고, 양상을 구성하고 있는 각각의 랜덤 신호를 표본 함수 sample function라고 부른다.

[그림 1-2]는 백색 가우시안 잡음의 양상을 개념도를 나타낸 것이다. 랜덤 신호를 양상을 형태로 다루는 것이 랜덤 과정 random process이다. 위에서 예를 든 백색 가우시안 잡음의 평균은 양상을 평균 ensemble average으로 취급하는 것이 타당하다. 양상을 평균이란 표본 함수들에 대한 각각의 평균값들에 대해 또 다시 평균을 취해 얻은 값으로, 양상을 평균이 백색 가우시안 잡음의 진정한 평균이라고 할 수 있다. 대부분의 랜덤 신호는 양상을, 즉 랜덤 과정의 개념으로 표현되며 이 책의 제5장에서 제7장까지 랜덤 과정을 상세히 다룰 것이다.



[그림 1-2] 백색 가우시안 잡음의 양상을 개념도

학률 및 랜덤 과정 개념을 이해하려면 신호 및 시스템, 푸리에 기법 Fourier technique, 집합 이론 set theory 등에 대해 미리 알고 있어야 한다. 이 책에서는 위에서 말한 선행 이론을 정리하는 의미에서 제1장에 관련 이론을 간략히 요약하였다. 먼저 1.2절에서는 집합 이론의 중요 부분을 설명하고, 1.3절에서는 이 책을 공부하는데 필수적인 푸리에 변환, 신호 및 시스템의 기본 이론을 정리한다.

1.2 집합 이론

집합 이론^{set theory}을 통해 사물이나 심벌 등을 세고^{counting}, 그룹화^{grouping}하는 데 체계적이고 수학적인 방법을 얻을 수 있다. 즉, 집합 이론을 알면 어떤 실험 결과에 대해 확률 개념을 적용할 수 있기 때문에, 집합 이론은 확률 이론을 공부 할 때 기본이 된다.

■ 집합 이론

집합이란 사물 혹은 실험으로부터 얻은 결과값을 모아 놓은 것으로, 결과값들을 집합의 원소라고 한다. 집합은 원소를 나열하여 정의할 수도 있고 집합의 특성 혹은 성질을 기술하여 정의할 수도 있다. 예를 들어 주사위를 던지는 실험에서 윗면에 나오는 점의 개수를 관찰할 때, 짹수 집합 A 를 다음과 같이 두 가지 형태로 정의할 수 있다.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad (1.1)$$

$$A = \{a \mid \text{주사위 윗면에 나오는 점의 개수가 짹수}\} \quad (1.2)$$

집합은 대문자(A, B, C, \dots)로 표시하고, 집합을 구성하는 원소는 소문자(a, b, c, \dots)로 표시한다. 원소 a 가 집합 A 에 포함되는 원소일 경우 $a \in A$ 로 표시하고, 구성 원소가 아닐 경우 $a \notin A$ 로 표시하여 집합과 원소 사이의 관계를 나타낸다. 또한 집합 B 가 집합 A 의 부분 집합^{subset}일 경우 집합 B 가 A 에 포함됨을 $B \subset A$ 로 표시하여 포함 관계를 나타낸다. 또한 전체 집합을 S 라고 하고 공집합^{empty set}을 \emptyset 로 표시하면 집합 A 에 대해 식 (1.3)이 성립한다.

$$\emptyset \subset A \subset S, A \subset A \quad (1.3)$$

1.2.1 집합의 연산

집합도 여러 가지 연산^{operation}을 적용할 수 있다. [표 1-1]은 주요 집합 연산을 정리한 것이다. 집합 A 와 B 의 덧셈을 A 와 B 의 합집합이라고 하여 $A \cup B$ 로 표시한다. 또한 A 와 B 의 뺄셈을 차집합, A 와 B 의 곱셈을 교집합 AB 라고 한다. A 의 여집합은 A^c 혹은 \overline{A} 로 표시하며, 전체 집합 S 의 원소 중에서 집합 A 에 포함되지 않는 원소의 집합을 의미한다.

[표 1-1] 주요 집합 연산

연산	기호	내용
합집합	$A + B = A \cup B$	A 와 B 에 속한 모든 원소의 집합
차집합	$A \subset B$ 일 때 $B - A$	B 의 원소 중 A 에 속하지 않는 원소의 집합
교집합	$AB = A \cap B$	A 와 B 에 모두 속하는 원소의 집합
여집합	$A^c = \overline{A}$	전체 집합 S 의 원소 중에서 A 에 속하지 않는 원소의 집합

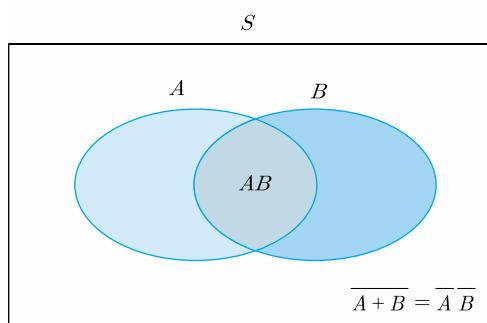
1.2.2 집합의 대수 법칙

[표 1-1]의 집합 연산을 이용하면 [표 1-2]와 같은 집합 연산에 대한 대수 법칙

- 드모르간의 법칙
[표 1-1]의 집합 연산을 이용하면 [표 1-2]와 같은 집합 연산에 대한 대수 법칙을 이끌어낼 수 있다. 특히 드모르간의 법칙^{De Morgan's law}은 복잡한 집합 연산을 간단히 계산할 수 있는 중요한 법칙으로 널리 이용된다. [그림 1-3]은 이러한 집합 연산의 대수 법칙을 설명할 때 널리 사용되는 것으로 벤 다이어그램^{Venn diagram}이라고 한다.
- 벤 다이어그램

[표 1-2] 집합 연산에 대한 대수 법칙

대수 법칙	내용
멱등 법칙	$A + A = A, AA = A$
교환 법칙	$A + B = B + A, AB = BA$
결합 법칙	$A + (B + C) = (A + B) + C, A(BC) = (AB)C$
분배 법칙	$A(B + C) = AB + AC, A + (BC) = (A + B)(A + C)$
드모르간의 제1법칙	$\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$
드모르간의 제2법칙	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

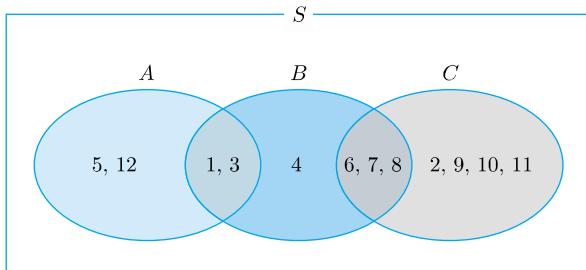


[그림 1-3] 집합에 대한 벤 다이어그램

한편 임의의 두 집합 A , B 에 대해 공통으로 속하는 원소가 없으면 두 집합 A , B 는 상호 배타적(mutually exclusive)이라고 한다. 다시 말해 두 집합 A , B 가 ■ 상호 배타적 상호 배타적이면 $AB = \emptyset$ 이다.

예제 1-1 벤 다이어그램

다음 그림과 같은 벤 다이어그램에 대해 물음에 답하라.



[그림 1-4] 집합 A , B , C 의 벤 다이어그램

- $A+B$, AB , $B+C$, BC 를 구하라.
- $A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$ 임을 보여라.
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ 임을 보여라.
- 드모르간의 제1법칙과 제2법칙이 성립함을 보여라.
- 상호 배타적인 두 집합은 무엇인가?

풀이

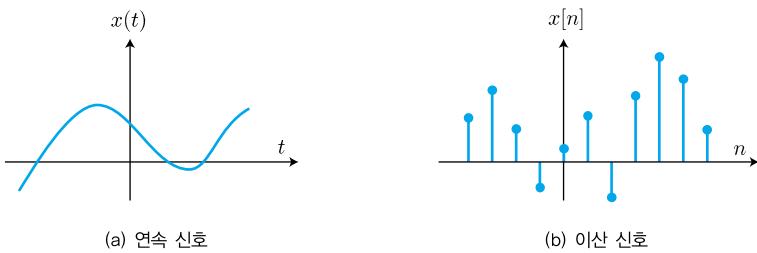
- $A+B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12\}$, $AB = \{1, 3\}$, $B+C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $BC = \{6, 7, 8\}$
- $A = \{1, 3, 5, 12\}$ 이고 $B+C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 이므로 $A+(B+C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = S$ 이다. 같은 방법으로 계산하면 $(A+B)+C = A+B+C = S$ 임을 알 수 있다.
- $AB = \{1, 3\}$ 이고 $C = \{2, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 이므로 $(AB)C = \emptyset$ 이다. 같은 방법으로 계산하면 $A(BC) = ABC = \emptyset$ 임을 알 수 있다.
- 드모르간의 제1법칙 : $\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$
 $\overline{A+B} = \{2, 9, 10, 11\}$, $\overline{A} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $\overline{B} = \{2, 5, 9, 10, 11, 12\}$ 이므로 $\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$ 이 성립한다.
 드모르간의 제2법칙 : $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
 $\overline{AB} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\overline{A} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $\overline{B} = \{2, 5, 9, 10, 11, 12\}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ 가 성립한다.
- 집합 A 와 C 는 공통 원소가 없으므로 상호 배타적이다.

1.3 신호 및 시스템

이 절에서는 앞으로 이 책에서 사용할 여러 가지 신호와 시스템을 설명하고, 특히 신호의 수학적 표현법과 이를 이해하기 위해 필요한 기본적인 해석 기법을 설명한다. 특히 주파수 영역에서 선형 시스템과 여러 가지 신호를 해석할 수 있는 강력한 기법인 푸리에 변환 Fourier transform에 대해 알아본다. 또한 랜덤 특성을 갖는 신호의 주파수 스펙트럼 spectrum을 얻기 위해 필요한 전력밀도 스펙트럼과 에너지 밀도 스펙트럼의 개념에 대해서도 알아본다.

1.3.1 연속 신호와 이산 신호

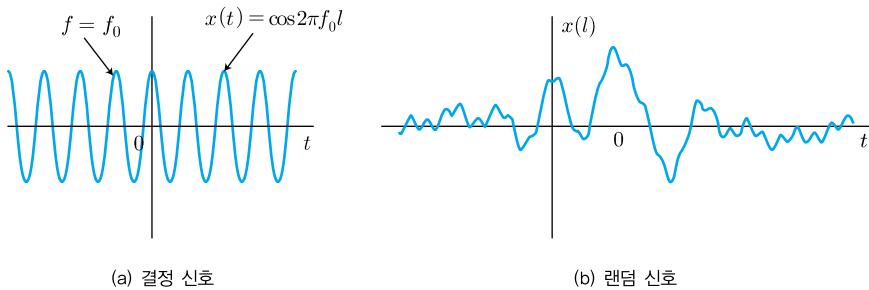
■ 연속 신호 연속 신호 continuous-time signal $x(t)$ 는 모든 연속 시간 t 에 대해 실수 혹은 복소수의 값으로 기술되는 신호로, 연속 시간 변수 t 는 실수값을 가진다. 한편 이산 신호 discrete-time signal $x[n]$ 은 이산 시간 변수 n 에 의해 표현되고, 시간 변수 n 은 정수값을 가진다. [그림 1-5(a)]는 연속 신호의 예를, [그림 1-5(b)]는 이산 신호의 예를 나타낸 것이다.



[그림 1-5] 연속 신호와 이산 신호의 예

1.3.2 결정 신호와 랜덤 신호

모든 시간값 t 에 대해 실수 혹은 복소수 형태로 $x(t)$ 의 신호값이 결정되어 알 수 있는 신호 $x(t)$ 를 결정 신호 deterministic signal라고 한다. 한편 신호 $x(t)$ 의 값이 랜덤 변수 형태로 존재하여 통계적인 값(평균, 분산 등)으로만 표현되는 신호 $x(t)$ 를 랜덤 신호 random signal라고 한다. 앞으로 공부할 대부분의 신호는 랜덤 신호이며, 잡음 신호 또한 랜덤 신호다.



[그림 1-6] 결정 신호와 랜덤 신호의 예

1.3.3 주기 신호와 비주기 신호

주기 신호^{periodic signal}는 일정한 모양의 신호가 주기적으로 반복되는 신호로, 식 (1.4)와 같은 성질이 있다. 임의의 시간 t 에 대해 식 (1.4)가 성립하며

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (1.4)$$

이때 주기 신호 $x(t)$ 의 주기^{period}는 T_0 가 된다. 이산 신호가 주기 신호일 경우에는 식 (1.5)과 같은 성질을 갖는다. 즉, 임의의 정수 n 에 대해

$$x[n] = x[n + N_0] \quad (1.5)$$

이고, 이때 주기 신호 $x[n]$ 의 주기는 N_0 다.

한편 식 (1.4)나 식 (1.5)를 만족하지 않는 신호를 비주기 신호^{non-periodic signal}라고 한다. [그림 1-6(a)]와 같은 코사인파의 결정 신호는 주기 신호의 예고, [그림 1-6(b)]와 같은 랜덤 신호는 비주기 신호의 한 예다. 때로는 비주기 신호를 주기가 무한대인 주기 신호의 특수한 경우로 보기도 한다.

1.3.4 에너지 신호와 전력 신호

통신 시스템에서 다루는 신호는 전류 혹은 전압 신호로 볼 수 있으므로 신호 $x(t)$ 에 대한 순시 전력^{instantaneous power}은 $|x^2(t)| [W]$ 이고, 이 신호에 대한 에너지는 식 (1.6)과 같이 표현할 수 있다.

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

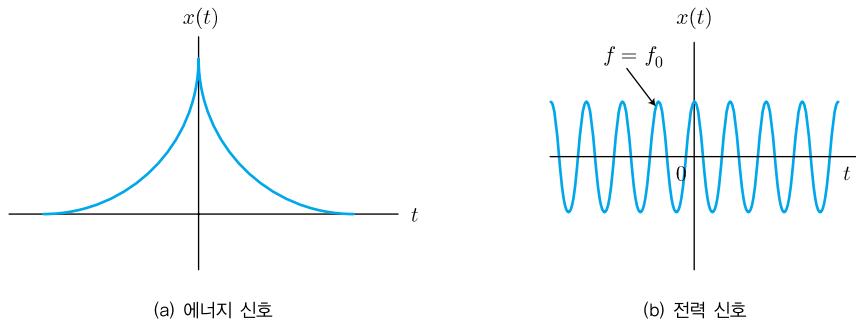
또한 신호 $x(t)$ 의 평균 전력 average power 은

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

와 같이 표현할 수 있다.

■ 에너지 신호

신호 $x(t)$ 가 유한값의 에너지를 가질 경우 신호 $x(t)$ 를 에너지 신호 energy signal라고 하고, 유한값의 평균 전력을 가질 경우 전력 신호 power signal라고 한다. [그림 1-7]은 에너지 신호와 전력 신호의 예를 나타낸 것이다. 에너지 신호는 평균 전력이 $P = 0$ 이고, 반대로 전력 신호의 에너지는 $E \rightarrow \infty$ 임을 잘 알아둬야 한다.



[그림 1-7] 에너지 신호와 전력 신호의 예

예제 1-2 에너지 신호

신호 $x(t) = 5e^{-3t}u(t)$ 가 에너지 신호임을 보여라.

풀이

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |5e^{-3t} u(t)|^2 dt \\ &= 25/6 < \infty \end{aligned}$$

따라서 $x(t)$ 는 에너지 신호다.

예제 1-3 전력 신호

신호 $x(t) = 5u(t)$ 가 전력 신호임을 보여라.

풀이

신호 $x(t)$ 의 에너지는 무한하므로 에너지 신호가 아니다. 신호 $x(t)$ 의 평균 전력을 계산하면 다음과 같다.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{5^2}{2} < \infty$$

$x(t)$ 의 평균 전력은 유한하므로 $x(t)$ 는 전력 신호다.

1.3.5 특이 신호

앞으로 확률 계산, 랜덤 변수 및 랜덤 과정을 설명하는 데 자주 이용할 함수가 몇 가지 있다. 이 절에서는 그러한 함수를 정의하고, 함수가 갖는 특성에 대해 살펴본다. 이 함수들 중에는 실제로 존재하지는 않지만 여러 가지 신호를 수학적으로 표현하는 데 유용한 함수들이 있으며, 이와 같은 함수들을 이용해 정의 한 신호를 특이 신호라고 한다. 이 절에서는 특이 함수와 특이 신호를 같은 의미로 혼용하여 사용하기로 한다.

단위 임펄스 함수 : $\delta(t)$

단위 임펄스 함수 unit impulse function 및 델타 함수 delta function는 아주 작은 시간 구간 동안에 발생하는 물리적 현상을 수학적으로 모델링하기 위해 사용하는 개념적인 함수다. 앞으로 자주 사용할 중요한 함수이므로 잘 알아두자.

■ 단위 임펄스 함수

임펄스 함수는 발생되는 시간 구간이 너무 작아 실제로 측정할 수 없어, 그 시간 구간을 0으로 간주한다. 따라서 엄밀하게 임펄스 함수 $\delta(t)$ 는 수학적인 의미의 함수가 아닌, 일종의 분포 함수 distribution function라고 해야 한다. 임펄스 분포 함수는 식 (1.8)과 같이 적분 기호를 사용하여 다른 함수와 함께 정의한다.

■ 분포 함수

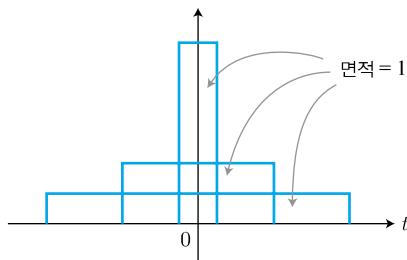
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \alpha \leq t_0 \leq \beta \\ 0 & elsewhere \end{cases} \quad (1.8)$$

식 (1.8)에서 임펄스 함수는 시간 $t = t_0$ 에 대한 함수 $f(t)$ 값 $f(t_0)$ 를 발생시키

는 효과가 있다. 이런 성질을 이동 특성 shifting property이라고 한다. 임펄스 함수의 개념을 이해하기 위해 흔히 식 (1.9)와 같은 방법을 사용한다.

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \prod \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \quad (1.9)$$

여기에서 $\frac{1}{\epsilon} \prod \left(\frac{t}{\epsilon} \right)$ 은 폭이 ϵ 이고 면적이 1인 구형파 함수 rectangular function이라고, [그림 1-8]과 같이 나타낸다.

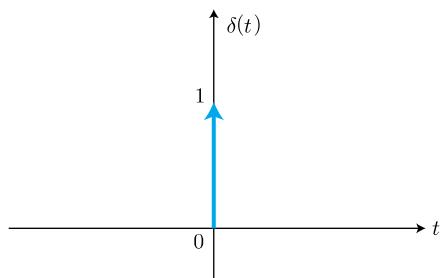


[그림 1-8] 극한을 이용한 임펄스 함수

식 (1.9)에서 전체 면적은 1이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.10)$$

이 성립하며, 이는 식 (1.8)에 의한 정의에도 부합된다. 임펄스 신호는 [그림 1-9]와 같이 도식적으로 나타낼 수 있다.



[그림 1-9] 임펄스 신호

임펄스 신호에 임의의 연속 신호 $x(t)$ 를 곱하는 경우 어떤 결과를 얻을 수 있는지 살펴보자. $\delta(t)$ 는 $t = 0$ 을 제외한 나머지 부분에서는 모두 0이므로 식 (1.11)이 성립한다.

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1.11)$$

마찬가지로 $t = T$ 에 위치한 $\delta(t - T)$ 에 연속 신호 $x(t)$ 를 곱하면 식 (1.12)가 된다.

$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T) \quad (1.12)$$

식 (1.12)로부터 연속 신호 $x(t)$ 에 대해

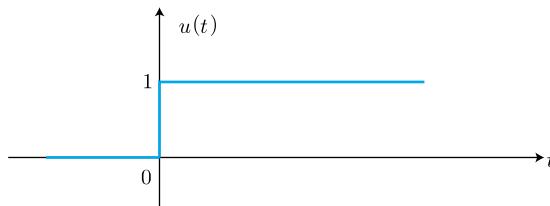
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (1.13)$$

가 성립하므로 두 신호의 곱 $x(t)\delta(t)$ 에 대한 면적은 임펄스 신호가 위치한 순간($t = 0$)의 신호값 $x(0)$ 과 같음을 알 수 있다. 이는 신호값 $x(0)$ 을 표본화 sampling한 동작과 같다고 볼 수 있다.

단위 계단 함수 : $u(t)$

단위 계단 함수^{unit step function} $u(t)$ 는 식 (1.14)와 같이 정의하고, [그림 1-10]과 같이 나타낸다. ■ 단위 계단 함수

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$



[그림 1-10] 단위 계단 함수

임의의 함수를 단위 계단 함수에 곱하면 그 함수의 인과 신호^{causal signal} 형태가 나타나는데, 이때 인과 신호란 $t = 0$ 이전에 시작되지 않는 신호를 말한다. 단위 계단 함수는 임펄스 함수와 밀접한 관계를 가지고 있으며, 식 (1.15)와 식 (1.16)을 통해 두 함수 간의 관계를 밝힐 수 있다.

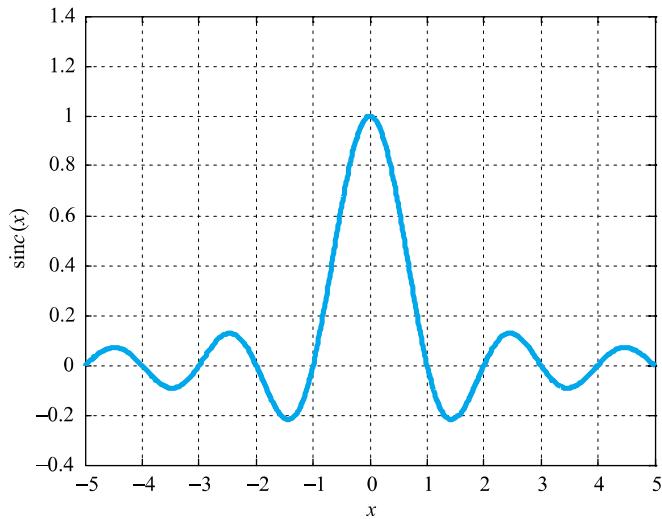
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.16)$$

Sinc 함수 : $\text{sinc}(x)$

■ sinc 함수 sinc function는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \sin(\pi x)/(\pi x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$



[그림 1-11] $\text{sinc}(x)$ 함수

[그림 1-11]은 $\text{sinc}(x)$ 함수를 나타낸 것이다. $x = 0$ 일 때 최댓값 1을, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 일 때 0 값을 가진다.

1.3.6 시스템의 종류와 기본 특성

시스템이란 입력 신호에 대해 시스템 고유 특성에 따라 동작하여 출력 신호 output signal를 나타내는 과정을 통칭하는 것이다. 시스템은 연속성 continuity, 선형성 linearity, 인과성 causality, 시불변성 time-invariance 등의 특징이 있다. 이 절에서는 이러한 특징에 따라 시스템을 분류하고, 특별히 통신 공학에서 중요하게 사용하는 선형 시불변 시스템의 입출력 관계를 살펴볼 것이다.

선형 시스템과 비선형 시스템

선형 시스템^{linear system}은 중첩의 원리^{superposition principle}가 성립하는 시스템을 말한다. 두 입력 신호 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 에 대한 출력 신호가 각각 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 라고 할 때, 식 (1.18)과 같이 중첩의 원리를 만족하면 그 시스템을 선형 시스템이라고 한다.

■ 선형 시스템

$$f[a x_1(t) + b x_2(t)] = a y_1(t) + b y_2(t) \quad (1.18)$$

시스템에서 선형성은 매우 중요한 성질이다. 선형 시스템의 경우 입력 신호를 기본 신호^{fundamental signal}의 조합으로 분해하여 각 기본 신호에 대한 출력 신호를 얻은 후, 이들을 다시 조합하여 원래 입력 신호에 대한 출력을 쉽게 얻는 경우가 많다. 예를 들어 미분기를 선형 시스템이라고 할 수 있는 이유는, 중첩의 원리가 성립하기 때문이다. 일반적으로 실제 시스템의 대부분은 비선형 시스템^{nonlinear system}이지만 선형 시스템으로 근사화하여 입출력 관계를 나타내는 경우가 많다. 식 (1.19)는 선형 시스템인 미분기의 중첩 특성을 나타낸 것이다.

■ 비선형 시스템

$$\frac{d}{dt} [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha x'_1(t) + \beta x'_2(t) \quad (1.19)$$

시불변 시스템과 시변 시스템

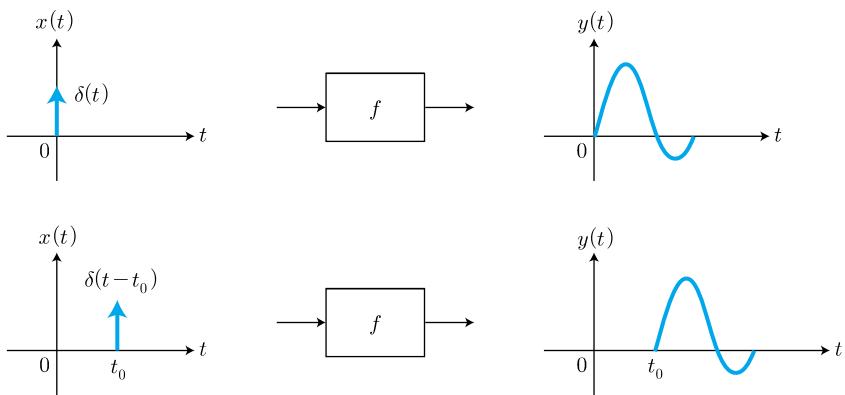
시불변^{TI : Time-Invariant} 시스템이란 입출력 관계가 시간에 따라 변화하지 않는 시스템으로, t_0 만큼 지연된 신호 $x(t - t_0)$ 가 시스템에 인가될 때 출력 신호도 동일한 시간 t_0 만큼 지연되어 나타나는 시스템을 말한다. 이를 수식으로 표현하면 식 (1.20)과 같다. [그림 1-12]는 시불변성의 개념을 나타낸 것이다.

■ 시불변 시스템

$$y(t - t_0) = f[x(t - t_0)] \quad (1.20)$$

만약 식 (1.20)의 조건을 충족하지 않으면, 시변^{TV : Time-Variant} 시스템이다. 미분기는 식 (1.21)로부터 시불변 시스템임을 알 수 있는데, 예를 들어 $\frac{d}{dt}\{x(t - t_0)\}$ 의 경우를 살펴보자. $t' = t - t_0$ 로 치환하면 $dt' = dt$ 이므로 식 (1.21)이 성립한다. 따라서 미분기는 시불변 시스템이다.

$$\frac{d}{dt}\{x(t - t_0)\} = \frac{d}{dt'}\{x(t')\} = x'(t') = x'(t - t_0) \quad (1.21)$$



[그림 1-12] 시불변 시스템

시간 영역에서 선형 시불변 시스템의 입출력 관계

- 선형 시불변 시스템

공학 분야에서 가장 중요한 시스템 중 하나는 선형 시불변^{LTI : Linear Time-Invariant} 시스템일 것이다. 실제로 거의 모든 시스템의 입출력 관계는 선형 시불변 시스템으로 가정하여 접근하며, 이런 선형 시불변 시스템의 입출력 관계는 임펄스 응답으로 표현할 수 있다. 임펄스 응답은 시스템 입력으로 단위 임펄스 신호 $\delta(t)$ 가 인가될 경우 출력되는 신호를 의미하며, $y(t) = f[\delta(t)] = h(t)$ 로 표시한다.

- 콘벌루션 적분

선형 시불변 시스템의 임펄스 응답이 주어진 경우 선형 시불변 시스템의 출력 신호 $y(t)$ 는 입력 신호 $x(t)$ 와 임펄스 응답 $h(t)$ 의 콘벌루션 적분^{convolution integral}으로 구한다. 식 (1.22)는 선형 시불변 시스템의 입출력 관계를 콘벌루션 적분을 이용해 표현한 것이다.

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.22)$$

임펄스 응답 $h(t)$ 는 선형 시불변 시스템의 특성을 완전히 나타낸다. 즉, 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답만 알고 있으면 시스템의 동작을 완전히 표현할 수 있다. 입력 신호 $x[n]$ 과 출력 신호 $y[n]$ 을 갖는 선형 이산 시스템도, 지연된 입력 신호 $x[n-n_0]$ 에 대해 동일한 이산 시간 n_0 만큼 지연된 출력 신호 $y[n-n_0]$ 를 출력하면 선형 시불변 이산 시스템이라고 볼 수 있다.

연속 시스템과 마찬가지로 선형 시불변 이산 시스템도 입력 신호와 출력 신호의 관계를 이산 콘벌루션 discrete convolution으로 계산하여 식 (1.23)과 같이 나타낼 수 있다.

■ 이산 콘벌루션

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (1.23)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

여기에서 $h[n]$ 은 단위 임펄스를 이산 시스템에 인가하여 얻은 임펄스 응답 신호다. 통신 시스템을 구성하는 많은 요소가 선형 시불변 시스템이며, 앞에서 본 바와 같이 콘벌루션 적분을 이용해 입출력 관계를 표현할 수 있다. 그리하여 입력 신호에 해당하는 출력 신호를 구하고 시스템 동작을 분석하는 등의 작업을 통해, 최적의 시스템을 설계하고 개선해 나갈 수 있는 것이다. 그러나 콘벌루션 적분으로 구한 선형 시불변 시스템의 분석에는 두 가지 난점이 있다. 첫째, 콘벌루션 적분 계산이 복잡하다는 것, 둘째, 콘벌루션 적분 계산을 했더라도 이를 통해 시스템 자체가 어떤 동작을 했는지 자세히 알 수 없는 경우가 대부분이라는 것이다.

선형 시불변 시스템을 분석할 수 있는 중요한 방법 중 하나로 푸리에 기법 Fourier technique을 들 수 있다. 푸리에 기법은 콘벌루션 적분 계산보다 계산이 훨씬 쉽고, 선형 시불변 시스템의 동작 형태를 상세히 알게 해주는 아주 유용한 도구다. 푸리에 기법은 푸리에 급수 Fourier series와 푸리에 변환 Fourier transform으로 나누어 설명할 수 있다.

■ 푸리에 기법

1.3.7 푸리에 급수

푸리에 급수 Fourier series 혹은 푸리에 변환은 임의의 신호를 복소 지수 함수의 합으로 전개하여 표현하는 기법이다. 주기 T_0 를 갖는 주기 신호 $x(t)$ 는 식 (1.24)와 같이 푸리에 급수를 이용해 전개할 수 있다.

■ 푸리에 급수

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 = 1/T_0 \quad (1.24)$$

여기에서 x_n 을 $x(t)$ 에 대한 푸리에 급수의 계수라고 하고 식 (1.25)와 같이 구한다.

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha + T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (1.25)$$

이때 α 는 임의의 상수이고, 계산을 간단히 하기 위해 일반적으로 $\alpha = 0$ 혹은 $\alpha = -T_0/2$ 로 놓는다. 여기에서 주파수 $f_0 = 1/T_0$ 를 주기 신호 $x(t)$ 의 기본

- 기본 주파수
- 조화 주파수 $f_n = n f_0$ 를 n 번째 조화 주파수라고 한다.

식 (1.24)와 같이 표현되는 푸리에 급수를 복소 지수 푸리에 급수라고 하는데, $x(t)$ 가 주기 신호일 경우 실함수와 복소 함수 모두에 적용할 수 있다. $x(t)$ 가 실신호^{real valued signal}인 경우에도 계수 x_n 은 복소값을 갖는 것이 일반적이다. 식 (1.25)에서 x_n 은 주파수 nf_0 의 함수이고, 신호 $x(t)$ 에 대한 스펙트럼 성분을 의미한다.

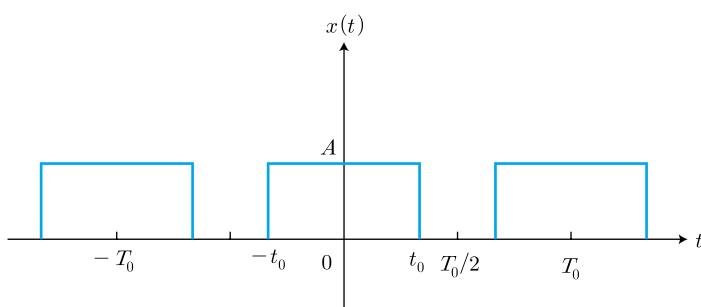
예제 1-4 구형 펄스열의 푸리에 급수

[그림 1-13]과 같이 구형 펄스열의 주기가 T_0 인 주기 신호 $x(t)$ 는 $|t| \leq \frac{T_0}{2}$ 에서 다음과 같이 정의된다.

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{2t_0}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.26)$$

단, $t_0 < \frac{T_0}{2}$ 이다. $A = 1$ 이고 $T_0 = 4$, $t_0 = 1$ 일 경우 다음 물음에 답하라.

- $x(t)$ 에 대한 푸리에 급수를 지수 함수 형태로 표현하라.
- $x(t)$ 의 이산 스펙트럼을 그려라.



[그림 1-13] 구형 펄스열 $x(t)$

풀이

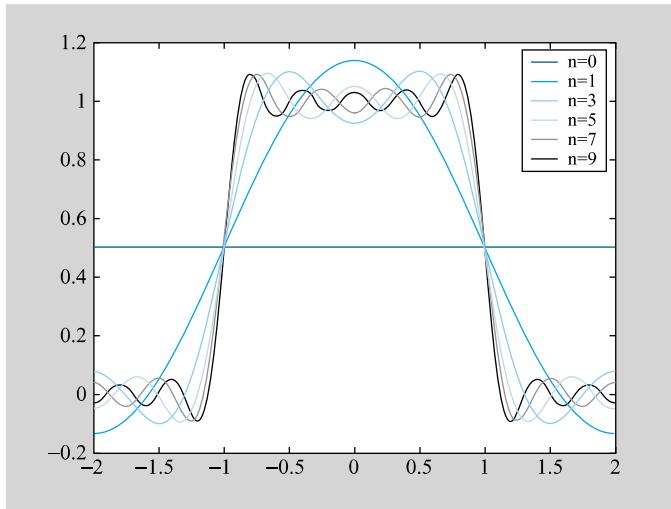
$$(a) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) e^{-j2\pi nt/2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j\pi nt/2} dt = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{j\pi n} \right) [e^{-j\pi n/2}]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1}{\pi n} \right) \left[\frac{e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n/2}}{2j} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \\ \text{단, } \text{sinc}(x) &\triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$x_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$ 이므로 n 이 짝수일 때마다 $x_n = 0$ 이 됨을 알 수 있다. $x(t)$ 를 복소 지수 함수 형태의 푸리에 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{j2\pi nt/4} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(2\pi nt/4) \end{aligned} \quad (1.27)$$

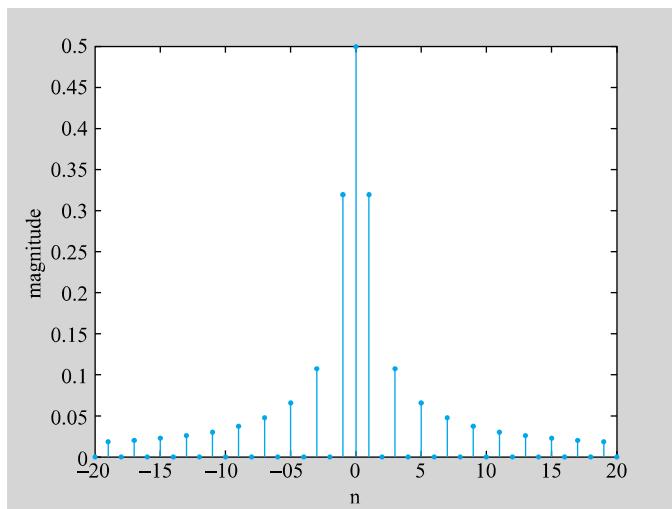
(b) $x(t)$ 를 푸리에 급수로 나타낸 뒤 $n = 0, 1, 3, 5, 7, 9$ 일 경우를 근사화하면 [그림 1-14]와 같다.



[그림 1-14] 구형파에 대한 푸리에 급수 근사 파형

x_n 은 항상 실수값이므로, $\angle x_n$ 은 부호에 따라 0 혹은 π [rad]의 위상각을 가진다. $|x_n| = \frac{1}{2} \left| \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|$

이므로 이산 스펙트럼은 [그림 1-15]와 같이 그릴 수 있다.



[그림 1-15] 계수 x_n 의 크기 스펙트럼

1.3.8 푸리에 변환

■ 푸리에 변환

푸리에 변환 Fourier transform은 비주기 신호에 대해 푸리에 급수를 확장하여 적용한 형태라고 할 수 있다. 따라서 푸리에 변환을 통하여 비주기 신호에 대한 스펙트럼 정보를 얻을 수 있다.

주기 신호의 스펙트럼은 이산적인 주파수 성분인 기본 주파수 성분과 그 고조파 harmonics 성분이 분포되어 있다. 이때 주파수 성분의 간격은 주기에 반비례한다. 한편 비주기 신호는 주기가 무한대인 주기 신호로 볼 수 있으므로, 비주기 신호의 주파수 성분 분포는 주파수 성분 간의 간격이 0인 연속 스펙트럼 continuous spectrum 형태가 되리라는 것을 짐작할 수 있다.

■ 푸리에 변환쌍

식 (1.28)과 식 (1.29)를 비주기 신호 $x(t)$ 에 대한 푸리에 변환쌍 Fourier transform pair이라고 하고, 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.28)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.29)$$

여기에서 $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$ 를 $X(f)$ 에 대한 역 푸리에 변환 inverse Fourier transform이라 고 한다. 일반적으로 스펙트럼 $X(f)$ 는 복소 함수의 형태이므로, 크기 스펙트럼 $|X(f)|$ 와 위상 스펙트럼 $\angle X(f)$ 를 이용해 나타내는 것이 편리하다.

예제 1-5 구형 펄스의 푸리에 변환

다음과 같이 정의되는 구형 펄스 $\Pi(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

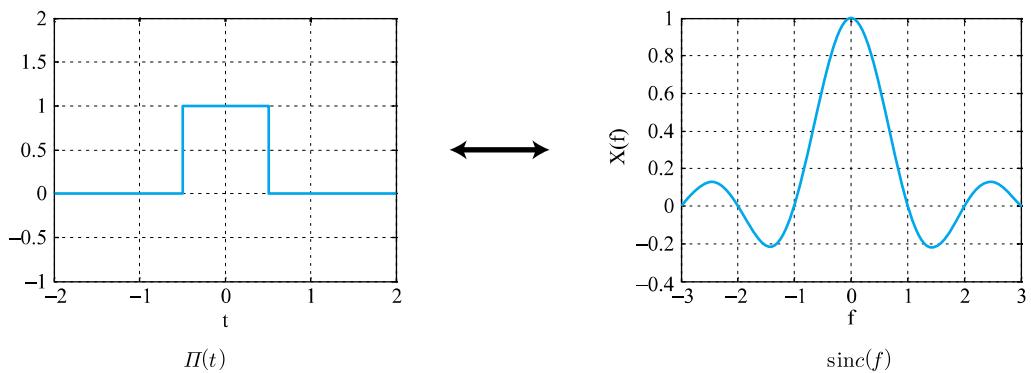
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 < t \leq 1/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

풀이

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{\sin \pi f}{\pi f} \\ &= \text{sinc}(f) \end{aligned}$$

$$\Pi(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f) \quad (1.30)$$

[그림 1-16]은 구형 펄스 함수 $\Pi(t)$ 와 이에 대한 푸리에 변환 $X(f) = \text{sinc}(f)$ 를 나타낸 것이다.



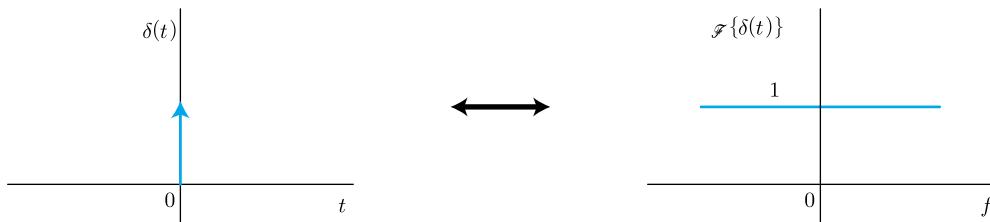
[그림 1-16] 구형 펄스에 대한 푸리에 변환

예제 1-6 임펄스 함수의 푸리에 변환

단위 임펄스 신호 $\delta(t)$ 에 대한 푸리에 변환을 구하라.

풀이

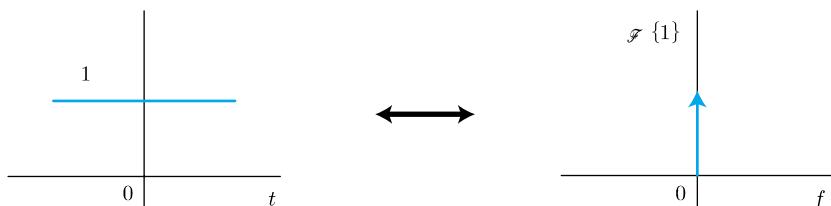
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$



[그림 1-17] 임펄스 함수의 푸리에 변환

[그림 1-17]로부터 임펄스 신호 $\delta(t)$ 의 주파수 성분은 모든 주파수에 걸쳐 크기가 1이고 위상이 0인 스펙트럼을 가진다는 것을 알 수 있다. 이와 유사한 방법으로 $\delta(f)$ 에 대한 역 푸리에 변환을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\delta(f)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = 1 \\ \therefore \mathcal{F}\{1\} &= \delta(f) \\ 1 &\leftrightarrow \delta(f) \end{aligned} \quad (1.31)$$



[그림 1-18] 상수에 대한 푸리에 변환

[그림 1-18]을 보면, 상수 1의 주파수 성분은 DC 성분인 0[Hz]를 제외하고는 어떠한 주파수 성분도 존재하지 않음을 알 수 있다.

예제 1-7 지수 함수의 푸리에 변환

지수 함수 $e^{j2\pi f_0 t}$ 에 대한 푸리에 변환을 구하라.

풀이

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f-f_0)\end{aligned}$$

예제 1-8 코사인 함수의 푸리에 변환

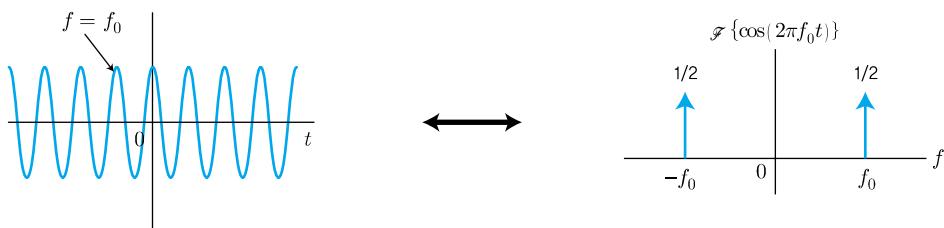
코사인 함수 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

풀이

오일러의 공식 $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ 를 이용하면

$$\begin{aligned}X(f) &= \mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0 t\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})\right\} \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\}] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \\ \cos(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow \frac{1}{2} \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}\end{aligned}$$

[그림 1-19]는 코사인 함수에 대한 푸리에 변환 결과를 나타낸 것으로 코사인 함수의 주파수 성분은 하나 ($f=f_0$)임을 알 수 있다.



[그림 1-19] $\cos(2\pi f_0 t)$ 에 대한 푸리에 변환

1.3.9 푸리에 변환의 특징

푸리에 변환의 아홉 가지 주된 특징을 살펴보자.

선형성 linearity

두 개 이상의 신호를 선형 조합한 신호에 대한 푸리에 변환은, 각각의 신호를 푸리에 변환한 후 이들을 선형 조합한 결과와 동일하다.

$$\mathcal{F}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[x_1(t)] + \beta \mathcal{F}[x_2(t)] \quad (1.32)$$

쌍대성 duality

만일 $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ 이면 $\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$ 가 성립한다.

$$x(t) \leftrightarrow X(f), \quad X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad (1.33)$$

예제 1-9 푸리에 변환의 특징 : 쌍대성

$X(t) = \text{sinc}(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

풀이

[예제 1-3]으로부터 $x(t) = \Pi(t)$ 의 푸리에 변환은 $X(f) = \text{sinc}(f)$ 임을 알고 있다. 쌍대성을 이용하면 $X(t) = \text{sinc}(t)$ 의 푸리에 변환을 쉽게 구할 수 있다.

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$$

$$\therefore X(t) = \text{sinc}(t) \leftrightarrow \mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f) = \Pi(-f) = \Pi(f)$$

$$\text{sinc}(t) \leftrightarrow \Pi(f) \quad (1.34)$$

시간 이동 time shift

시간 영역에서의 시간 이동은 주파수 영역에서 위상 이동 phase shift 형태로 나타난다.

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f) \quad (1.35)$$

비례 · 축소 scaling

시간 영역에서의 확장은 주파수 영역에서 축소 형태로 나타나고, 시간 영역에서의 축소는 주파수 영역에서의 확장 형태로 나타난다.

만일 $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ 일 경우, 다음이 성립한다.

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \times \left(\frac{f}{a} \right), \quad a \neq 0 \quad (1.36)$$

예제 1-10 푸리에 변환의 특징 : 비례 · 축소

$x(t) = \Pi(t/a)$, $a > 0$ 에 대한 푸리에 변환을 구하라.

풀이

식 (1.30)으로부터 $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{sinc}(f)$ 이므로 비례 · 축소 특성을 이용하여 $\mathcal{F}\{\Pi(t/a)\} = a \text{sinc}(af)$ 임을 쉽게 알 수 있다.

주파수 이동 frequency shift

변조 modulation 특성이라고도 하며, 변 · 복조기, 주파수 다중화 등의 많은 부분에서 적용되는 중요한 특성이다. 시간 영역에서 지수 함수를 곱하면 주파수 영역에서는 주파수 이동으로 나타난다. $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ 일 경우 다음 식이 성립한다.

$$\begin{cases} \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} x(t)] = X(f - f_0) \\ \mathcal{F}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)] \end{cases} \quad (1.37)$$

미분 differentiation

시간 영역에서 미분은 주파수 영역에서 $j2\pi f$ 를 곱한 형태로 나타난다.

$$\mathcal{F}[x'(t)] = j2\pi f X(f) \quad (1.38)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} x(t) \right] = (j2\pi f)^n X(f) \quad (1.39)$$

콘벌루션 convolution

시간 영역에서의 콘벌루션 연산은 주파수 영역에서 곱셈 연산으로 나타나고,

반대로 주파수 영역에서의 콘벌루션 연산은 시간 영역에서 곱셈 연산으로 나타난다. 따라서 $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ 이고 $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ 일 때 식 (1.40), 식 (1.41)이 성립한다.

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f) \quad (1.40)$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (1.41)$$

자기 상관 함수의 푸리에 변환

■ 시간 자기 상관

에너지 신호 $x(t)$ 에 대한 시간 자기 상관^{time autocorrelation}과 이에 대한 푸리에 변환을 식 (1.42) 및 식 (1.43)과 같이 정의할 수 있다.

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} &= \int_0^T R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T x(t) x^*(t - \tau) dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t') e^{-j2\pi f(t-t')} dt' \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} X^*(f) dt = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

파시발의 정리 Parseval's theorem

■ 파시발의 에너지 정리 Parseval's energy theorem

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ 이고 $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ 일 경우, 식 (1.44)가 성립한다. $y(t) = x(t)$ 이면 식 (1.45)가 성립하는데, 이를 파시발의 에너지 정리 Rayleigh's theorem 혹은 레일리 Rayleigh의 에너지 정리라고 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (1.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.45)$$

[표 1-3]은 가장 많이 사용되는 푸리에 변환쌍을 나타낸 것으로, 푸리에 변환의

특성을 이용하면 표 이외의 함수에 대해서도 변환값을 쉽게 얻을 수 있다. 여기에서 $u(t)$ 는 단위 계단 함수, $\delta(t)$ 는 임펄스 함수, $sgn(t)$ 는 시그눔^{signum} 함수, $\delta^{(n)}(t)$ 는 임펄스 함수를 n 차 미분한 것을 나타낸다.

[표 1-3] 푸리에 변환쌍

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f t_0}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$
$\Pi(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$\Pi(f)$
$A(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$A(f)$
$e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
$t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\delta'(t)$	$j2\pi f$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

1.3.10 에너지 밀도 스펙트럼과 전력밀도 스펙트럼

랜덤 신호의 주파수 스펙트럼 정보는 전력밀도 스펙트럼으로 나타난다. 따라서 랜덤 신호의 스펙트럼을 알기 위해서는 전력밀도 스펙트럼을 반드시 알아야 한다. 이 절에서는 전력밀도 스펙트럼과 에너지 밀도 스펙트럼의 기본 개념을 설명한다.

에너지 밀도 스펙트럼

신호 $x(t)$ 가 에너지 신호일 경우 $x(t)$ 의 에너지는 식 (1.46)과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x^2(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)| dt \quad (1.46)$$

여기에서 복소 신호일 경우까지 고려해 파시발의 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned} \quad (1.47)$$

로 나타낼 수 있다. 식 (1.47)의 $|X(f)|^2$ 은 단위 주파수당 에너지이므로, 신호

- 에너지 밀도 스펙트럼 $E_x(f)$: Energy Spectral Density라고 한다. 특히 식 (1.47)은 신호 $x(t)$ 가 유한 에너지를 가질 때 의미가 있으므로, 무한 에너지를 갖는 전력 신호의 경우에는 에너지 밀도 스펙트럼을 적용할 수 없다.

한편 에너지 신호 $x(t)$ 에 대한 시간 자기 상관 함수 $R_{xx}(\tau)$ 는

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t + \tau) dt \quad (1.48)$$

이므로, 에너지 신호 $x(t)$ 의 에너지 밀도 스펙트럼 $G_x(f)$ 는 식 (1.43)을 이용하여 식 (1.49)와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} \quad (1.49)$$

따라서 식 (1.50)은 다음과 같다.

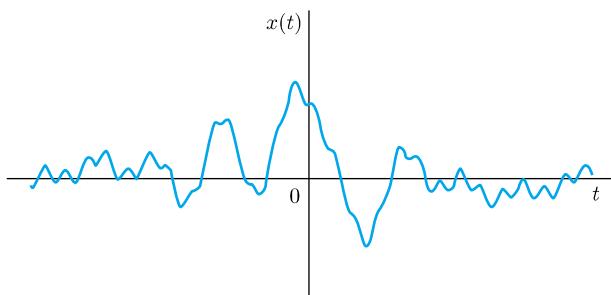
$$\begin{aligned}
 E_x &= R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

전력밀도 스펙트럼

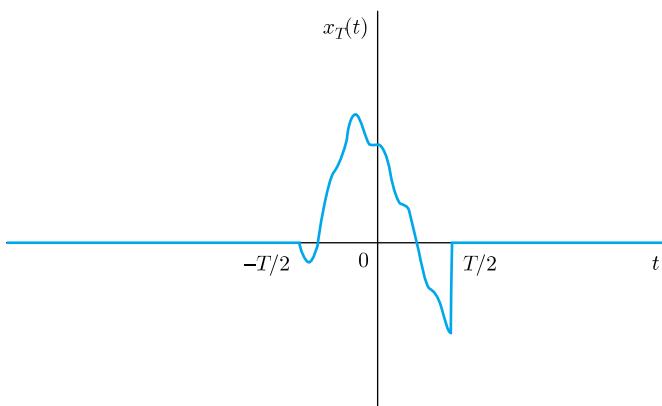
비주기 전력 신호 aperiodic power signal의 경우 푸리에 급수나 푸리에 변환에 존재하지 않아 에너지 밀도 스펙트럼을 적용할 수 없으므로, 전력밀도 스펙트럼을 이용해 표현해야 한다. 전력 신호의 전력밀도 스펙트럼을 살펴보자.

■ 비주기 전력 신호

신호 $x(t)$ 가 [그림 1-20]과 같이 비주기 전력 신호라고 가정하고, [그림 1-21]과 같이 시간 구간 $(-T/2, T/2)$ 에 대해 절단하여 신호 $x_T(t)$ 를 만들었다고 하자.



[그림 1-20] 비주기 전력 신호 $x(t)$



[그림 1-21] $x(t)$ 의 절단 함수 $x_T(t)$

신호 $x_T(t)$ 의 평균 전력은

$$P_x^T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt \quad (1.51)$$

이고, $x_T(t)$ 의 시간 자기 상관 함수 $R_{xx}^T(\tau)$ 는 식 (1.52)와 같이 정의할 수 있다.

$$R_{xx}^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \quad (1.52)$$

$R_{xx}^T(\tau)$ 의 푸리에 변환을 구하면

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}^T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) e^{-j2\pi f(t+\tau)} e^{j2\pi ft} dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j2\pi ft} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) e^{-j2\pi f(t+\tau)} d\tau \right) dt \\ &= \frac{1}{T} X_T(-f) X_T(f) \end{aligned} \quad (1.53)$$

이며, 여기에서 $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ 이다. $x_T(t)$ 가 실함수이므로 $X_T(-f) = X_T^*(f)$ 가 성립하며, 식 (1.54)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}^T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad (1.54)$$

$T \rightarrow \infty$ 이면

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} R_{xx}^T(\tau) \quad (1.55)$$

이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}^T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \end{aligned} \quad (1.56)$$

이 성립함을 알 수 있다. 식 (1.56)의 좌측 항은 전력 신호 $x(t)$ 의 자기 상관 함수를 푸리에 변환한 것이므로, $\mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$ 라고 표현할 수 있다. 한편 우측 항의 $|X_T(f)|^2$ 은 에너지 신호 $x_T(t)$ 의 에너지 밀도 스펙트럼이므로, $|X_T(f)|^2 / T$ 는 신호 $x_T(t)$ 에 대한 주파수 영역에서의 전력밀도 스펙트럼^{PSD : Power Spectral Density}이 된다. 따라서 식 (1.57)이 성립하고, 비주기 전력 신호 $x(t)$ 의 전력밀도 스펙트럼 $S_x(f)$ 와 시간 자기 상관 함수 $R_{xx}(\tau)$ 에 대한 푸리에 변환 이 같음을 알 수 있다. 이를 위너 힌진의 정리^{Wiener-Khintchine's theorem}라고 한다.

- 전력밀도 스펙트럼
- 위너 힌진의 정리

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \end{aligned} \quad (1.57)$$

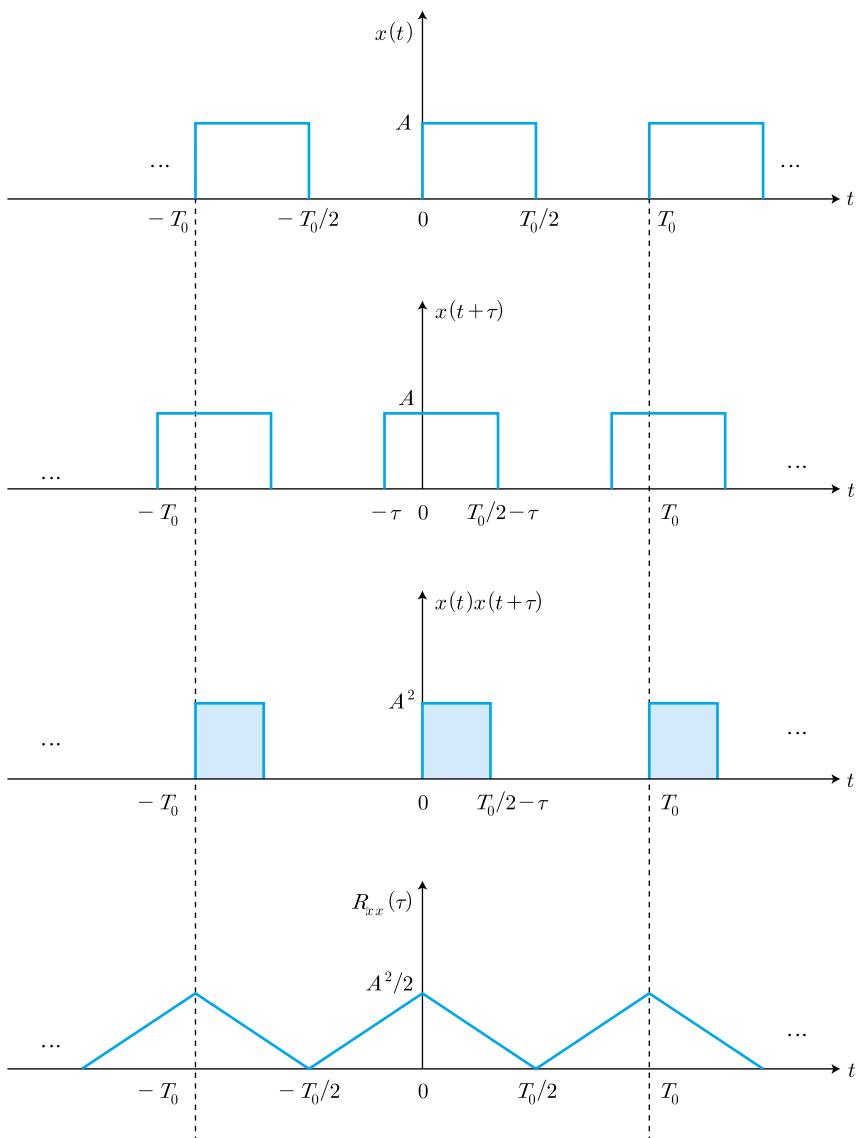
비주기 전력 신호에 대한 주파수 영역에서의 스펙트럼은 식 (1.57)의 전력밀도 스펙트럼을 통해 표현할 수 있는데, 주기 신호의 경우에도 절단 신호의 구간을 한 주기 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 로 놓으면 같은 방법을 통해 식 (1.57)과 같은 전력밀도 스펙트럼을 구할 수 있다. 식 (1.57)과 같이 전력밀도 스펙트럼은 크기에 대한 정보만을 가지며 위상 정보는 포함하지 않으므로, 동일한 전력밀도 스펙트럼을 가지면서 위상이 다른 여러 개의 신호가 존재할 수 있다.

일반적으로 전력 신호 $x(t)$ 의 평균 전력을 전력밀도 스펙트럼을 이용해 식 (1.58)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \\ &= R_{xx}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \end{aligned} \quad (1.58)$$

예제 1-11 전력밀도 스펙트럼

[그림 1-22]와 같은 구형 펄스열에 대해 시간 자기 상관 함수 $R_{xx}(\tau)$ 를 계산하고, 이를 이용해 $x(t)$ 의 전력밀도 스펙트럼을 구하라.



[그림 1-22] 구형 펄스열

풀이

$x(t)$ 는 주기 신호이므로 한 주기에 대해서만 시간 자기 상관 함수를 구하면 된다. 따라서 $0 < \tau < T_0/2$ 일 경우 다음 식과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2-\tau} A^2 dt \\
&= \frac{A^2}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - \tau \right) \\
&= A^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T_0} \right), \quad 0 < \tau < T_0
\end{aligned}$$

$-T_0/2 < \tau < 0$ 인 구간에 대해서도 같은 방법으로 구하면

$$R_{xx}(\tau) = A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T_0} \right), \quad -\frac{T_0}{2} < \tau < 0$$

이므로 한 주기 구간 $-T_0/2 < \tau < T_0/2$ 에 대해 다음과 같은 짹함수 형태의 $R_{xx}(\tau)$ 를 얻을 수 있다.

$$R_{xx}(\tau) = A^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{|\tau|}{T_0} \right), \quad -\frac{T_0}{2} < \tau < \frac{T_0}{2}$$

전 구간에서의 시간 자기 상관 함수는 [그림 1-22]와 같이 주기 함수로 나타난다. 즉, $R_{xx}(\tau)$ 가 주기 함수이므로 푸리에 급수를 이용해 나타내면

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 \tau} = \frac{A^2}{4} \left[1 + \sum_{n:odd, n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 n^2} \right) e^{j2\pi n f_0 \tau} \right]$$

o]므로 $x(t)$ 의 전력밀도 스펙트럼은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} \left[1 + \sum_{n:odd, n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 n^2} \right) e^{j2\pi n f_0 \tau} \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\
&= \frac{A^2}{4} \left[\delta(f) + \sum_{n:odd, n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 n^2} \right) \delta(f - n f_0) \right]
\end{aligned}$$

⇒ Chapter 01 연습문제

1.1 정육면체 주사위를 던지는 실험에서 윗면에 나오는 점의 개수를 관찰한다. 집합 A , B , C 가 다음과 같이 정의될 때 물음에 답하라.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{3, 4, 5\}$$

- (a) 벤 다이어그램을 그려라.
- (b) BC , $A + B$, $A + C$ 를 구하라.
- (c) 분배 법칙 $A + (BC) = (A + B)(A + C)$ 가 성립함을 보여라.
- (d) $\overline{A + C} = \overline{A} \overline{C}$ 임을 보여라.
- (e) $\overline{AC} = \overline{A} + \overline{C}$ 임을 보여라.
- (f) 상호 배타적인 집합은 어떤 집합인가?

1.2 임의의 세 집합 A , B , C 에 대해 $C \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $C \subset A$ 임을 보여라.

1.3 전체 집합 $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에 대해 두 집합 A , B 가 다음과 같이 정의된다. 물음에 답하라.

$$A = \{2, 4, 10\}$$

$$B = \{4, 6, 8, 10\}$$

- (a) $\overline{A} = S - A$ 임을 보여라.
- (b) $\overline{A} \cap B$ 를 구하라.
- (c) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ 임을 보여라.
- (d) $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$ 임을 보여라.

1.4 드모르간의 법칙을 이용해 다음을 증명하라.

- (a) $\overline{A(B+C)} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$
- (b) $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

1.5 전체 집합 S 에 대해 집합 A, B, C 가 다음과 같이 정의된다. 물음에 답하라.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 5, 9\}$$

$$B = \{1, 2, 6, 9\}$$

$$C = \{6, 9\}$$

- (a) 벤 다이어그램을 그려라.
- (b) $A + B, A + \overline{C}, A(B + C)$ 를 구하라.
- (c) $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$ 임을 보여라.
- (d) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ 임을 보여라.

1.6 충격파 함수 $\delta(t)$ 는 다음과 같이 정의된다. 다음 적분을 계산하라.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \alpha < t_0 < \beta \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \cos 6t \cdot \delta(t - 3) dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot \delta(t - 1) dt$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2) \sin \pi t dt$$

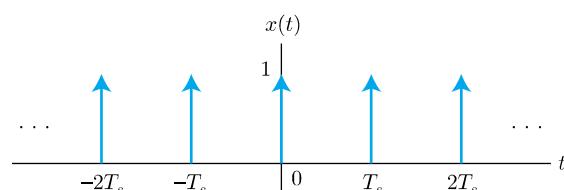
$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} f(3 - t) \delta(1 - t) dt$$

$$(e) \int_{-\infty}^{0} \delta(t + 3) e^{-t} dt$$

$$(f) \int_{0}^{\infty} e^x \cos \pi(x + 3) \delta(x + 1) dx$$

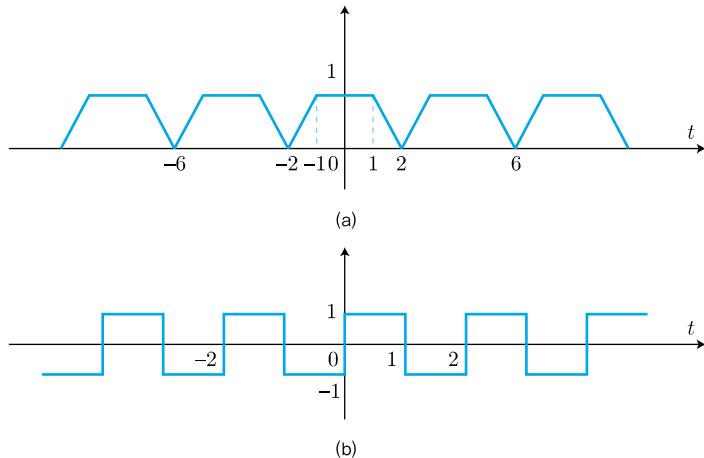
1.7 [그림 1-23]과 같은 임펄스 열 impulse train 신호의 주파수 스펙트럼을 구하고 nf_0 에 대해 그려라. 단, $f_0 = 1/T_s$ 이다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



[그림 1-23] [연습문제 1.7]의 그림

1.8 [그림 1-24]와 같은 주기 신호에 대해 물음에 답하라.



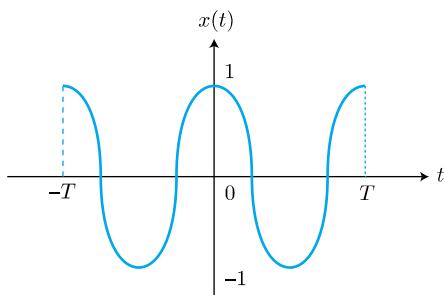
[그림 1-24] [연습문제 1.8]의 그림

- (a) 삼각 푸리에 급수를 구하고 크기 스펙트럼과 위상 스펙트럼을 그려라.
(b) 삼각 푸리에 급수에서 코사인 항이나 사인 항이 없을 경우 그 이유를 설명하라.

1.9 주기 신호 $x(t) = 2 \cos 200t$ 에 대해 다음 물음에 답하라.

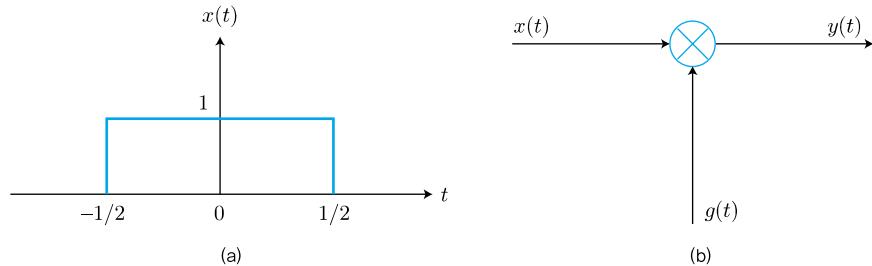
- (a) 신호 $x(t)$ 의 평균 전력을 시간 영역 적분으로 구하라.
(b) 신호 $x(t)$ 의 푸리에 급수 계수 x_n 를 구한 후 x_n 의 제곱값을 모두 합한 값이 시간 영역에서 구한 평균 전력값과 같음을 확인하라.

1.10 [그림 1-25]와 같은 신호의 푸리에 변환 $X(f)$ 를 구하고 크기 스펙트럼을 그려라. 단, $x(t) = \cos \omega_0 t$, $-T \leq t < T$ 이고 $\omega_0 = 2\pi/T$ 이다.



[그림 1-25] [연습문제 1.10]의 그림

1.11 [그림 1-26]에 대해 물음에 답하라.



[그림 1-26] [연습문제 1.11]의 그림

(a) [그림 1-26(a)]와 같은 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환 $X(f)$ 를 구하고 그려라.

(b) 신호 $g(t)$ 가 다음 식과 같을 때 신호 $y(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

$$g(t) = A \cos \omega_0 t$$

(c) 위의 결과로부터 [그림 1-26(b)]의 곱셈기[mixer]는 주파수 영역에서 어떠한 동작을 하는지 설명하라.

1.12 신호 $x(t) = e^{-2|t|}$ 에 대해 물음에 답하라.

(a) 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환이 $X(f) = \frac{4}{4 + 4\pi^2 f^2}$ 임을 보여라.

(b) 신호 $x(t)$ 의 에너지를 시간 영역에서 구하라.

(c) 신호 $x(t)$ 의 에너지를 주파수 영역에서 구하고 시간 영역에서 구한 값과 동일함을 보여라.

1.13 $x(t) = \text{rect}(t/2)$ 일 때 물음에 답하라.

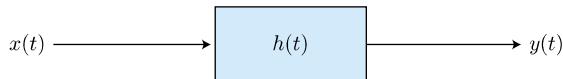
(a) $z(t) = x(t) * x(t)$ 를 계산하고 $z(t)$ 를 정확히 그려라.

(b) $z(t)$ 의 푸리에 변환 $Z(f)$ 를 구하라.

1.14 신호 $x(t) = \sin 10\pi t$ 의 푸리에 변환 $X(f)$ 을 구하고 $X(f)$ 의 크기 스펙트럼과 위상 스펙트럼을 그려라.

1.15 선형 시스템을 통하여 신호 $x(t)$ 를 전송할 경우 수신 신호 $y(t)$ 는 [그림 1-27]과 같은 형태를 가질 때 왜곡 없이 전송되었다고 한다. 단, K, t_0 는 상수다.

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$



[그림 1-27] [연습문제 1.15]의 그림

- (a) 전달 함수 $H(f)$ 의 크기 $|H(f)|$ 를 구하라.
- (b) 전달 함수 $H(f)$ 의 위상 $\theta(f)$ 를 구하라.
- (c) $|H(f)|$ 와 $\theta(f)$ 를 그려라.

1.16 여파기의 전달 함수가 다음과 같을 때 물음에 답하라.

$$H(f) = \begin{cases} 2e^{-j2\pi f} & |f| < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- (a) 신호 $x(t) = 10\delta(t)$ 가 입력 신호로 인가될 때 출력 신호 $y(t)$ 를 구하라.
- (b) 출력 신호 $y(t)$ 를 그려라.