Chapter 01

명제와 논리

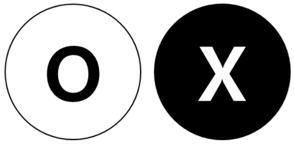
*학습목표

- 명제를 이해하고 진릿값을 판별할 수 있다.
- 논리 연산자를 이용해 합성명제를 만들고 그 진릿값을 판별할 수 있다.
- 논리적 동치를 이해할 수 있다.
- 논의영역에 따른 명제함수의 진릿값을 판별할 수 있다.
- 추론을 이해하여 결론을 유도할 수 있다.

Section 01

명제

디지털 컴퓨터를 동작시키는 하드웨어나 소프트웨어는 작은 단위의 수학적 논리로 구성된다. 명제는 '참이나 거짓으로 구분할 수 있는 문장이나 수식'을 뜻하는 것으로 수학적 논리(mathematical logic)는 명제가 참인지 거짓인지 판별한다. 따라서 프로그램을 수행하여 올바른 결과를 얻으려면 수학적 논리가 정확하게 정의되어야 한다. 논리는 컴퓨터가 연산하는 데 중요한 부분을 차지하며, 실제로 컴퓨터 회로 설계, 프로그램 제작, 검증, 인공지능 등 다양한 분야의 이론적 기반이 되고 있다.



명제는 문장이나 수식을 참이나 거짓으로 구분할 수 있어야 한다

이산수학에서 명제의 정의를 알아보고, 명제를 합성하는 데 사용하는 다양한 논리 연산자(Logical Operator)와 합성명제, 함축을 살펴보자. 그리고 논리를 전개하는 데 필요한 논리의 역, 이, 대우를 알아보자.

1. 명제의 정의

정의 1-1 명제(Proposition)

참(True)이나 거짓(False)으로 구분할 수 있는 문장이나 수식 : 영어 소문자 $p, q, r,$ …로 표현

예제 1-1

다음 문장이 명제인지 명제가 아닌지 구분하고, 그 이유를 설명하라.

(1) 서울은 대한민국의 수도다. (2) 컴퓨터 가격은 비싸다.

(3) $x+1=2$ (4) $1+1=3$

풀이

(1) 명확하게 참이라 판별할 수 있으므로 명제다.

(2) 개인의 기준에 따라 참, 거짓이 달라질 수 있으므로 명제가 아니다.
(3) x값에 따라 식의 참, 거짓이 달라질 수 있으므로 명제가 아니다.
(4) 정확하게 거짓이라 판별할 수 있으므로 명제다.

[예제 1-1]의 (3)에서 x값에 따라 식의 참, 거짓이 달라지기 때문에 명제가 아니라고 하였다. 그러나 반대로 x값이 정해지면 참, 거짓을 판별할 수 있게 된다. 이와 같이 문장이나 식에서 어떤 값이 정해지면 참, 거짓을 판별할 수 있게 되는 명제를 명제함수라고 한다. 이는 뒤에서 다룬다.

정의 1-2 진릿값(Truth Value)

참(True)이나 거짓(False)을 가리키는 값 : T, F 또는 0, 1

예제 1-2

다음 명제의 진릿값을 구하라.

(1) 미국의 수도는 뉴욕이다. (2) $5+3=8$ (3) 4는 양수다.

풀이

(1) 거짓(F) (2) 참(T) (3) 참(T)

예제 1-3

다음 문장이 명제인지 명제가 아닌지 구분하고, 명제인 문장은 진릿값을 구하라.

(1) 정수 값 중에는 $2^n=n^2$를 만족하는 정수 n이 하나 이상 존재한다.
(2) $x=y$
(3) 모든 실수 a에 대해 $a^2=1$을 만족하는 경우는 오로지 $a=1$ 뿐이다.

풀이

(1) $2^n=n^2$이라는 식을 만족하는 정수의 개수에 따라 참, 거짓을 구분할 수 있으므로 이 문장은 명제다. 이 식을 만족하는 정수는 2와 4, 두 개므로 진릿값은 참이다.
(2) 이 문장은 x, y에 대입되는 값의 범위가 제시되지 않았기 때문에 진릿값을 알 수 없다. 그러므로 이 문장은 명제가 아니다.
(3) $a^2=1$의 참, 거짓을 구분할 수 있으므로 이 문장은 명제다. 그런데 $a=1$ 인 경우뿐만 아니라, $a=-1$ 인 경우도 $a^2=1$이 성립하므로 진릿값은 거짓이다.

2 논리 연산자(명제의 결합)

명제는 두 개 이상 결합하여 사용되기도 한다. 이렇게 여러 명제를 결합할 때는 논리 연산자를 이용한다. 논리 연산자에는 부정, 논리곱, 논리합, 배타적 논리합 등이 있다.

정의 1-3 부정(Negation) NOT

문장 p가 명제일 때 "p가 아니다"도 명제 : $\neg p$ 또는 $\sim p$

$\neg p$ **또는** $\sim p$ 'not p' 또는 'p의 부정'이라고 읽는다.

명제의 부정 또한 명제기 때문에 $\neg p$ 진릿값은 p 진릿값의 반대가 된다. 예를 들어 명제 p가 "태양은 뜨겁다"라는 문장이라면 명제 p를 부정하는 $\neg p$는 "태양은 뜨겁지 않다"가 되며 $\neg p$도 명제가 된다. 명제 p의 진릿값이 참(T)이면 명제 $\neg p$의 진릿값은 참(T)에 대한 부정인 거짓(F)이 되며, 명제 p의 진릿값이 거짓(F)이면 명제 $\neg p$의 진릿값은 거짓(F)에 대한 부정인 참(T)이 된다. 부정 진리표는 [표 1-1]과 같다.

[표 1-1] 부정 진리표

p	$\neg p$
T	F
F	T

진리표 각 명제의 진릿값에 따라 합성명제를 이루는 논리연산의 결과를 보여주는 표

예제 1-4

부정 연산 NOT을 이용해 "4는 양수다"라는 명제 p의 부정을 작성하고, 진릿값을 구하라.

풀이

$\neg p$: 4는 양수가 아니다.
"4는 양수가 아니다"라는 말은 4가 0이거나 음수임을 의미한다. 그러나 4는 0도 아니고 음수도 아니기 때문에 "4는 양수가 아니다"라는 명제 $\neg p$의 진릿값은 거짓(F)이 된다. 명제 p가 참(T)이기 때문에 $\neg p$는 거짓(F)이 되는 것이다.

정의 1-4 논리곱(Conjunction) AND

문장 p, q가 명제일 때 p, q의 진릿값이 모두 참(T)일 때만 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 되는 명제 : $p \wedge q$

$p \wedge q$ 'p and q' 또는 'p 그리고 q'라고 읽는다.

논리곱에는 '그리고' 또는 '~(이)고'라는 의미가 있다. 예를 들어 명제 p가 "태양은 뜨겁다"고 명제 q가 "달의 그늘진 곳은 차갑다"라면, 두 명제 p, q를 논리곱한 $p \wedge q$는 "태양은 뜨겁다. 그리고 달의 그늘진 곳은 차갑다" 또는 "태양은 뜨겁고, 달의 그늘진 곳은 차갑다"로 표현할 수 있다.

명제 p, q에 대해, p와 q 각 진릿값이 모두 참(T)인 경우에만 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 참(T)이 된다. p나 q 둘 중 하나라도 거짓(F)이면 논리곱 $p \wedge q$의 진릿값은 거짓(F)이 된다. 그러므로 논리곱 $p \wedge q$ "태양은 뜨겁고, 달의 그늘진 곳은 차갑다"는 명제 p "태양은 뜨겁다"와 명제 q "달의 그늘진 곳은 차갑다"가 모두 참(T)인 경우만 참(T)이 된다. 그런데 명제 p "태양은 뜨겁다"와 명제 q "달의 그늘진 곳은 차갑다"는 실제로 모두 참(T)이므로 "태양은 뜨겁고, 달의 그늘진 곳은 차갑다"로 표현되는 논리곱 $p \wedge q$는 참(T)이 된다.

그렇다면 명제 p가 "태양은 뜨겁다"고, 명제 q가 "달은 태양보다 크다"라면 두 명제의 논리곱은 진릿값이 어떻게 될까? 우선 이 두 명제의 논리곱 $p \wedge q$는 "태양은 뜨겁고, 달은 태양보다 크다"가 된다. 여기서 명제 p "태양은 뜨겁다"의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q "달은 태양보다 크다"의 진릿값은 거짓(F)이다. 두 명제 중 명제 q가 거짓(F)이므로 "태양은 뜨겁고, 달은 태양보다 크다"라는 논리곱 $p \wedge q$는 거짓(F)이 된다. 논리곱 $p \wedge q$의 진리표는 [표 1-2]와 같다.

[표 1-2] 논리곱 $p \wedge q$의 진리표

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

예제 1-5

다음은 두 명제의 논리곱을 작성하고, 진릿값을 구하라.

p : 4는 양수다. q : $2+6=0$

풀이

$p \wedge q$: "4는 양수다. 그리고 $2+6=0$이다" 또는 "4는 양수고, $2+6=0$이다"

4는 양수기 때문에 참(T)이지만, $2+6=8$이므로 $2+6=0$은 거짓(F)이다. 따라서 두 명제가 모두 참인 것은 아니기 때문에 $p \wedge q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

$\therefore$ $p \wedge q$는 "4는 양수고, $2+6=0$이다"고, 진릿값은 거짓(F)이다.

정의 1-5 논리합(Disjunction) OR

문장 p, q가 명제일 때 p, q의 진릿값이 모두 거짓(F)일 때만 거짓(F)이 되고, 그렇지 않으면 참(T)이 되는 명제 : $p \vee q$

$p \vee q$ ‘p or q’ 또는 ‘p 또는 q’라고 읽는다.

논리합은 ‘또는’ 혹은 ‘~(이)거나’의 의미를 갖는다. 예를 들어 명제 p가 “태양은 뜨겁다”고 명제 q가 “달은 태양보다 크다”라면, 두 명제의 논리합 $p \vee q$는 “태양은 뜨겁다. 혹은 달은 태양보다 크다” 또는 “태양은 뜨겁거나 달은 태양보다 크다”로 표현할 수 있다.

논리합 $p \vee q$의 진릿값은 p나 q, 둘 중 하나라도 참(T)이면 참(T)이 되고 둘 다 거짓(F)이면 거짓(F)이 된다. 논리합 $p \vee q$ “태양은 뜨겁거나 달은 태양보다 크다”는 명제 p “태양은 뜨겁다”와 명제 q “달은 태양보다 크다” 중에 하나라도 참(T)이면 참(T)이 된다. 명제 q “달은 태양보다 크다”가 거짓(F)이긴 하지만, 명제 p “태양은 뜨겁다”는 참(T)이므로 명제 $p \vee q$ “태양은 뜨겁거나 달은 태양보다 크다”는 참(T)이 된다.

다른 예로 명제 p가 “태양은 차갑다”고 명제 q가 “달은 태양보다 크다”라면, $p \vee q$는 “태양은 차갑거나 달은 태양보다 크다”가 된다. 이때 명제 p는 거짓(F)이고, 명제 q도 거짓(F)이므로 논리합 $p \vee q$ “태양은 차갑거나 달은 태양보다 크다”는 거짓(F)이 된다. 논리합 $p \vee q$의 진리표는 [표 1-3]과 같다.

[표 1-3] 논리합 $p \vee q$의 진리표

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

예제 1-6

다음 두 명제의 논리합을 작성하고 진릿값을 구하라.

p : 4는 양수다. q : $2+6=0$

풀이

$p \vee q$: “4는 양수다. 또는 $2+6=0$이다” 또는 “4는 양수거나, $2+6=0$이다”

4는 양수기 때문에 명제 p는 참(T)이지만, $2+6$은 0이 아닌 8이므로 명제 q는 거짓(F)이다. 두 명제 중 하나만 참(T)이어도 참(T)이 되는데, 명제 p가 참(T)이므로 $p \vee q$의 진릿값은 참(T)이다.

∴ 논리합 $p \vee q$는 “4는 양수거나 $2+6=0$이다”고, 진릿값은 참(T)이다.

정의 1-6 배타적 논리합(Exclusive OR) XOR

문장 p, q가 명제일 때 p, q의 두 진릿값 중 하나만 참(T)일 때 참(T)이 되고, 그렇지 않으면 거짓(F)이 되는 명제 : $p \oplus q$

$p \oplus q$ 'p xor q'라고 읽는다.

배타적 논리합은 부정과 논리합, 논리곱의 조합으로 만들어진다. 명제 p가 "태양은 지구보다 크다"고 명제 q가 "달은 태양보다 크다"라면, 두 명제의 배타적 논리합 $p \oplus q$는 "태양은 지구보다 크지 않고, 달은 태양보다 크다 또는 태양은 지구보다 크고 달은 태양보다 크지 않다"로 표현할 수 있다.

$p \oplus q$로 표현된 명제를 두 부분으로 나눠보면 명제 (a)와 명제 (b)의 논리합((a) ∨ (b))의 형태를 띈다. 명제 (a)는 "태양은 지구보다 크지 않고, 달은 태양보다 크다"고, 명제 (b)는 "태양은 지구보다 크고 달은 태양보다 크지 않다"가 된다. 이때 명제 (a)는 "태양은 지구보다 크지 않다"라는 명제 $\neg p$와 "달은 태양보다 크다"라는 명제 q의 논리곱($\neg p \wedge q$) 형태를 띠고, 명제 (b)는 "태양은 지구보다 크다"라는 명제 p와 "달은 태양보다 크지 않다"라는 명제 $\neg q$의 논리곱($p \wedge \neg q$) 형태를 띤다. 결국 명제 (a)는 거짓(F)이고, 명제 (b)는 참(T)이므로 명제 $p \oplus q$는 참(T)이 된다.

이와 같이 배타적 논리합 $p \oplus q$의 진릿값은 p와 q 둘 중 하나만 참(T)이면 참(T)이 되고, 둘 다 참(T)이거나 둘 다 거짓(F)인 경우에는 거짓(F)이 된다. 배타적 논리합의 진리표는 [표 1-4]와 같다.

[표 1-4] 배타적 논리합 $p \oplus q$의 진리표

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

예제 1-7

합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$에 대한 진리표를 작성하라.

풀이

합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$의 진리표는 다음과 같다.

$$\underbrace{\underbrace{\neg(\underbrace{p \wedge q}_{①})}_{③} \oplus \underbrace{(\underbrace{\neg p}_{②} \vee q)}_{④}}_{⑤}$$

		①	②	③	④	⑤
p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F

3. 합성명제(명제의 합성)

정의 1-7 합성명제(Compound Proposition)

하나 이상의 명제들이 결합되어 만들어진 명제로, AND, OR, NOT 등의 논리 연산자(Logical Operators)를 이용해 명제를 결합

합성명제의 진릿값은 그 합성명제를 구성하고 있는 명제 각각의 진릿값과 각 명제를 결합하는 논리 연산자에 의해 결정된다. 그러므로 연산의 우선순위를 정하는 것이 중요하다. 합성명제를 구성하는 논리 연산자의 연산 우선순위는 [표 1-5]와 같다. 우선순위가 같은 연산에 대해서는 괄호를 이용해 순서를 정한다. 연산 순서를 이용해 합성명제의 진릿값을 알려면 진리표(Truth Table)를 이용하면 된다.

[표 1-5] 논리 연산자의 우선순위

우선순위	논리 연산자
1	$\neg$
2	$\vee$, $\wedge$
3	$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

합성명제는 진릿값에 따라 다음과 같이 세 종류로 나눌 수 있다.

정의 1-8 항진명제(Tautology) T

합성명제를 구성하는 단일 명제의 진릿값에 상관없이 합성명제의 진릿값이 항상 참(T)인 명제

정의 1-9 모순명제(Contradiction) F

합성명제를 구성하는 단일 명제의 진릿값에 상관없이 합성명제의 진릿값이 항상 거짓(F)인 명제

정의 1-10 사건명제(Contingency)

항진명제도, 모순명제도 아닌 명제

예제 1-8

다음 합성명제의 종류를 구분하라.

(1) $\neg p$ (2) $p \vee \neg p$ (3) $p \wedge \neg p$

풀이

(1) 사건명제

p	$\neg p$
T	F
F	T

(2) 항진명제

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

(3) 모순명제

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

예제 1-9

다음은 명제 p와 항진명제 T, 모순명제 F와의 연산이다. 각각의 진리표를 구하라.

(1) $p \vee \mathrm{T}$ (2) $p \vee \mathrm{F}$ (3) $p \wedge \mathrm{T}$ (4) $p \wedge \mathrm{F}$

풀이

(1)

p	T	$p \vee$ T
T	T	T
F	T	T

(2)

p	F	$p \vee$ F
T	F	T
F	F	F

(3)

p	T	$p \wedge$ T
T	T	T
F	T	F

(4)

p	F	$p \wedge$ F
T	F	F
F	F	F

4. 함축(조건명제)

"정월대보름에는 달이 가장 크다"는 "정월대보름이다"와 "달이 가장 크다"가 결합된 문장이다. 즉 "정월대보름이다"는 조건이 되고, "달이 가장 크다"는 결론이 된다. 이와 같이 두 개의 명제가 조건과 결론의 관계로 결합된 형태를 함축 또는 조건명제라고 한다.

정의 1-11 함축 (Implication) / **조건명제** (Conditional Proposition) $p \rightarrow q$

문장 p, q가 명제일 때, 명제 p가 조건 또는 원인으로 제시되고, 명제 q가 결론 또는 결과로 제시되는 명제

- p implies q : p는 q를 함축한다.
- if p then q 또는 p only if q : p면 q다.

함축 $p \to q$는 조건이 되는 명제 p가 참(T)이고 결론이 되는 명제 q가 거짓(F)인 경우에만 거짓(F)이 되고, 그 외의 경우에는 참(T)이 된다. 특히 명제 p가 참(T)일 때 반드시 명제 q가 참(T)인 경우는 $p \Rightarrow q$로 표기하고 "p는 q의 충분조건이다(p is sufficient for q)" 혹은 "q는 p의 필요조건이다(q is necessary for p)"라고 한다.

앞에서 제시했던 "정월대보름에는 달이 가장 크다"라는 명제를 예로 들어보자. 명제 p를 "정월대보름이다", 명제 q를 "달이 가장 크다"라고 했을 때, "p면 q다($p \to q$)"의 형태가 된다. 정월대보름에는(명제 p가 참(T)이면) 달의 크기가 가장 크므로(명제 q가 참(T)이므로) $p \to q$ 형태의 문장 "정월대보름에는 달이 가장 크다"는 참(T)이 된다. 함축에 대한 진리표는 [표 1-6]과 같다.

[표 1-6] 함축 $p \to q$의 진리표

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

수학적 논리에서의 함축은 명제 자체로서는 의미가 없으며, 오로지 진릿값에만 의미가 있다. 그러므로 조건이 되는 명제와 결론이 되는 명제 사이에 반드시 연관관계가 있을 필요는 없다. 함축명제 "사과가 빨갛다면 달은 크다"의 경우, 명제 p는 "사과는 빨갛다"고 명제 q는 "달은 크다"다. 상식적으로 볼 때 사과가 빨간 것과 달이 큰 것에는 연관관계가 없지만 "사과가 빨갛다면 달은 크다"는 명제며, 그중에서도 함축명제에 해당한다.

함축 $p \to q$의 진리표 이해하기!

"비가 오면 우산을 가지고 간다"라는 명제를 두 개의 명제 p, q로 나누어 써보면, "p : 비가 온다"와 "q : 우산을 가지고 간다"가 된다. 비가 오면(명제 p가 참(T)), 밖에 우산을 가지고 가는 것(명제 q가 참(T))은 당연한 이치다(함축 $p \to q$도 참(T)). 비가 오지 않는 경우(명제 p가 거짓(F))는 어떨까? 우산을 가지고 가지 않는 것(명제 q가 거짓(F))이 일반적이지만, 우산을 가지고 간다고 해도(명제 q가 참(T)) 일반적으로 문제가 되지 않는다. 그러므로 이 두 경우 모두 함축 $p \to q$도 참(T)으로 말할 수 있다.

예제 1-10

함축 "부산이 대한민국의 수도면, 10은 양수다"에 대한 진릿값을 구하라.

풀이

p : 부산은 대한민국의 수도다.
q : 10은 양수다.
명제 q "10은 양수다"가 항상 참이기 때문에 명제 p의 진릿값에 상관없이 함축 명제 $p \to q$는 참(T)이 된다.

예제 1-11

명제 p, q가 주어졌을 때, 합성명제 $\neg(p \oplus q) \to (\neg p \to q)$의 진리표를 구하라.

풀이

$$\neg(\underbrace{\underbrace{p\oplus q}_{①}}_{③})\rightarrow(\underbrace{\underbrace{\neg p\rightarrow q}_{②}}_{④})\ \ ⑤$$

		①	②	③	④	⑤
p	q	$p\oplus q$	$\neg p$	$\neg(p\oplus q)$	$\neg p\rightarrow q$	$\neg(p\oplus q)\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F

예제 **1-12**

명제 p, q, r이 주어졌을 때 합성명제 $(\neg p\vee r)\rightarrow\neg q$의 진리표를 구하라.

풀이

$$\underbrace{(\underbrace{\neg p}_{①}\vee r)}_{②}\rightarrow\underbrace{\neg q}_{③}\ \ ④$$

			①	②	③	④
p	q	r	$\neg p$	$\neg p\vee r$	$\neg q$	$(\neg p\vee r)\rightarrow\neg q$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

"사과가 빨갛다면 배는 노랗고, 배가 노랗다면 사과는 빨갛다"라는 명제가 있다고 하자. 명제 p를 "사과가 빨갛다", 명제 q를 "배가 노랗다"라고 하면 "사과가 빨갛다면 배는 노랗고, 배가 노랗다면 사과는 빨갛다"는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\underbrace{(p\rightarrow q)}_{①}\wedge\underbrace{(q\rightarrow p)}_{②}$$

①에서 명제 p는 조건이고 q는 결론이다. ②에서는 명제 q가 조건이고 p가 결론이 된다. 여기에서는 명제 p와 q가 모두 조건이 되면서 결론이 된다. 이러한 명제를 쌍방조건명제라고 한다.

정의 **1-12** **쌍방조건명제**(Biconditional) $p\leftrightarrow q$

문장 p, q가 명제일 때, 명제 p와 q가 모두 조건이면서 결론인 명제

- p if and only if q : p면 q고, q면 p다.

쌍방조건명제 $p \leftrightarrow q$는 명제 p, q의 진릿값이 같을 때는 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 된다. 앞에서 명제 p가 참(T)일 때 반드시 명제 q가 참(T)인 $p \Rightarrow q$에 대해 언급했다. 쌍방조건에서도 p가 참(T)이면 q도 참(T)인 동시에 q가 참(T)이면 p도 참(T)인 경우는 $p \Leftrightarrow q$ 또는 $q \Leftrightarrow p$로 구별하여 표기한다. 이러한 표기를 'p는 q의 필요충분조건' 또는 'q는 p의 필요충분조건'이라고 한다.

[표 1-7] 쌍방조건명제 $p \leftrightarrow q$의 진리표

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

예제 1-13

명제 p, q가 주어졌을 때 합성명제 $(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$의 진리표를 구하라.

풀이

$(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$

① ①

② ③

④

		①		②	③	④
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F

예제 1-14

명제 p, q, r이 주어졌을 때 합성명제 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r$의 진리표를 구하라.

풀이

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r$

①

②

③

			①	②	③
p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

예제 1-15

다음 명제의 진릿값을 구하고, 각 합성명제의 종류를 구분하라.

(1) $[p \wedge (p \to q)] \to q$ (2) $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$ (3) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$

풀이

(1) p, q가 어떤 진릿값을 갖든지 $[p \wedge (p \to q)] \to q$는 항상 참(T)이 되므로 이 명제는 항진명제다.

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(2) p의 진릿값이 참(T)일 때 $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$의 진릿값은 거짓(F)이 되고, p의 진릿값이 거짓(F)일 때 $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$의 진릿값은 참(T)이 된다. 명제 $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$의 진릿값은 p의 진릿값에 반대가 되므로 이 명제는 사건명제다.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$
T	F	T	F
F	T	T	T

(3) p, q의 진릿값에 상관없이 $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$는 항상 거짓(F)이 되므로 이 명제는 모순명제다.

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F

5 역, 이, 대우

때로는 주어진 명제만으로 논리를 전개하거나 증명하기가 어려울 때가 있다. 이때 역, 이, 대우 중 하나를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

정의 1-13 역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contraposition)

함축 $p \to q$의 역은 $q \to p$, 이는 $\neg p \to \neg q$, 대우는 $\neg q \to \neg p$

[표 1-8] 함축 $p \to q$의 역, 이, 대우 진리표

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

예제 **1-16**

명제 "오늘 비가 오면, 나는 영화를 본다"의 역, 이, 대우를 구하라.

풀이

p : 오늘 비가 온다.
q : 나는 영화를 본다.
역 : 내가 영화를 본다면, 오늘 비가 온다.
이 : 오늘 비가 오지 않으면, 나는 영화를 보지 않는다.
대우 : 내가 영화를 보지 않으면, 오늘 비가 오지 않는다.

예제 **1-17**

명제 "정수 x에 대해 $x \geq 50$ 이면, $x \leq 30$ 이다"에 대해 역, 이, 대우를 구하고, $x = 72$, $x = 23$, $x = 46$일 때 각 명제의 진릿값을 구하라.

풀이

p : 정수 x에 대해 $x \geq 50$ 이다.
q : 정수 x에 대해 $x \leq 30$ 이다.
역 : 정수 x에 대해 $x \leq 30$ 이면, $x \geq 50$ 이다.
이 : 정수 x에 대해 $x < 50$ 이면, $x > 30$ 이다.
대우 : 정수 x에 대해 $x > 30$ 이면, $x < 50$ 이다.

- $x = 72$일 때

  본 명제 : 정수 x에 대해 $x \geq 50$ 이면, $x \leq 30$ 이다.

  72는 50보다 크므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 참(T)이지만, 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

  ∴ 본 명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

  역 : 정수 x에 대해 $x \leq 30$ 이면, $x \geq 50$ 이다.

  72는 30보다 크므로 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이지만, 50보다 크므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 참(T)이다.

  ∴ 역 명제의 진릿값은 참(T)이다.

이 : 정수 x에 대해 $x < 50$ 이면, $x > 30$ 이다.

72는 50보다 크므로 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이지만, 명제 $\neg q$ "$x > 30$ 이다"에 대해 참(T)이다.

∴ 이 명제의 진릿값은 참(T)이다.

대우 : 정수 x에 대해 $x > 30$ 이면, $x < 50$ 이다.

72는 30보다 크므로 명제 q "$x > 30$ 이다"에 대해 참(T)이지만, 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

∴ 대우 명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

- $x = 23$일 때

본 명제 : 정수 x에 대해 $x \geq 50$ 이면, $x \leq 30$ 이다.

23은 50보다 작으므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이지만, 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 참(T)이다.

∴ 본 명제의 진릿값은 참(T)이다.

역 : 정수 x에 대해 $x \leq 30$ 이면, $x \geq 50$ 이다.

23은 30보다 작으므로 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 참(T)이지만, 50보다 작으므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

∴ 역 명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

이 : 정수 x에 대해 $x < 50$ 이면, $x > 30$ 이다.

23은 50보다 작으므로 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해 참(T)이지만, 명제 $\neg q$ "$x > 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

∴ 이 명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

대우 : 정수 x에 대해 $x > 30$ 이면, $x < 50$ 이다.

23은 30보다 작으므로 명제 $\neg q$ "$x > 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이지만, 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해 참(T)이다.

∴ 대우 명제의 진릿값은 참(T)이다.

- $x = 46$일 때

본 명제 : 정수 x에 대해 $x \geq 50$ 이면, $x \leq 30$ 이다.

46은 50보다 작으므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이고, 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

∴ 본 명제의 진릿값은 참(T)이다.

역 : 정수 x에 대해 $x \leq 30$ 이면, $x \geq 50$ 이다.

46은 30보다 크므로 명제 q "$x \leq 30$ 이다"에 대해 거짓(F)이고, 50보다 작으므로 명제 p "$x \geq 50$ 이다"에 대해 거짓(F)이다.

∴ 역 명제의 진릿값은 참(T)이다.

이 : 정수 x에 대해 $x < 50$ 이면, $x > 30$ 이다.

46은 50보다 작으므로 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해 참(T)이고 명제 $\neg q$ "$x > 30$ 이다"에 대해 참(T)이다.

∴ 이 명제의 진릿값은 참(T)이다.

대우 : 정수 x에 대해 $x > 30$ 이면, $x < 50$ 이다.

46은 30보다 크므로 명제 $\neg q$ "$x > 30$ 이다"에 대해 참(T)이고, 명제 $\neg p$ "$x < 50$ 이다"에 대해서도 참(T)이다.

∴ 대우 명제의 진릿값은 참(T)이다.

예제 **1-18**

명제 "실수 a, b에 대해 $ax = bx$ 면, $a = b$ 이다"에 대해 대우와 그 진릿값을 구하라.

풀이

p : 실수 a, b에 대해 $ax = bx$ 다.

q : 실수 a, b에 대해 $a = b$ 다.

대우 : 실수 a, b에 대해 $a \neq b$ 면, $ax \neq bx$ 다.

대우를 보면, $x = 0$ 인 경우 $a \neq b$ 라도 $ax = bx = 0$ 이 된다. 그러므로 대우 명제 "실수 a, b에 대해 $a \neq b$ 면, $ax \neq bx$ 다"는 거짓이며, 명제 "실수 a, b에 대해 $ax = bx$ 면, $a = b$ 다"도 거짓이다.

Section

02 논리적 동치

논리적 동치란 두 문장이나 수식이 논리적으로 같다는 의미다. 합성명제가 같은 진릿값이라면 논리적 동치를 이용하여 명제를 간단히 하여 논리를 단순화할 수 있다. 이처럼 프로그램이나 알고리즘의 과정이 단순해지면 설계와 검증 과정에서 시간과 비용을 줄일 수 있다.

1. 명제와 논리적 동치

두 명제의 진릿값이 같을 때 두 명제 중, 간단한 명제를 활용하여 논리를 단순화할 수 있다. 단순화했을 때에는 본 명제와 단순화된 명제의 진릿값이 같아야 한다. 진릿값이 달라지면 전혀 다른 명제가 된 것이기 때문이다.

정의 1-14 논리적 동치(Logical Equivalence) $p \equiv q$

합성명제 p와 q의 진릿값이 서로 같은 경우

$p \equiv q$ "p와 q는 같다" 또는 "p와 q의 진릿값은 같다"라고 읽는다.

예제 1-19

명제 $p \rightarrow q$와 $\neg p \vee q$는 어떤 관계에 있는지 진리표를 작성하여 판별하라.

풀이

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

진리표를 보면 $p \to q$와 $\neg p \lor q$의 진릿값이 같음을 알 수 있다.

$\therefore\ p \to q \equiv \neg p \lor q$

2 논리적 동치법칙

[표 1-9]는 기본적인 논리적 동치법칙을 보인다. 이 논리적 동치법칙에 의해 정의된 합성명제들은 진릿값이 서로 같기 때문에, 두 개의 명제가 논리적 동치임을 증명하거나 복잡한 합성명제를 간단히 하는 데 활용할 수 있다. 예를 들어 분배법칙 $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$의 경우 $p \lor (q \land r)$과 $(p \lor q) \land (p \lor r)$의 진릿값이 같으므로, $p \lor (q \land r)$ 대신 $(p \lor q) \land (p \lor r)$로 표현하거나 $(p \lor q) \land (p \lor r)$ 대신 $p \lor (q \land r)$로 표현할 수 있다.

[표 1-9] 논리적 동치법칙

논리적 동치		법칙
$p \land \mathrm{T} \equiv p$	$p \lor \mathrm{F} \equiv p$	항등법칙(Identity Law)
$p \land \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$	$p \lor \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$	지배법칙(Domination Law)
$p \land \neg p = \mathrm{F}$	$p \lor \neg p = \mathrm{T}$	부정법칙(Negation Law)
$\neg(\neg p) \equiv p$		이중 부정법칙(Double Negation Law)
$p \land p \equiv p$	$p \lor p \equiv p$	멱등법칙(Idempotent Law)
$p \land q \equiv q \land p$	$p \lor q \equiv q \lor p$	교환법칙(Commutative Law)
$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$ $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$		결합법칙(Associative Law)
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$		분배법칙(Distributive Law)
$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$		드모르간의 법칙(De Morgan's Law)
$p \land (p \lor q) \equiv p$	$p \lor (p \land q) \equiv p$	흡수법칙(Absorption Law)
$p \to q \equiv \neg p \lor q$		함축법칙(Implication Law)

간혹 결합법칙을 적용해야 하는 경우와 분배법칙을 적용해야 하는 경우를 혼동할 때가 있다. 결합법칙은 괄호 안에 위치한 기호와 괄호 밖에 위치한 기호가 같아야 적용할 수 있고, 분배법칙은 괄호 안의 기호와 괄호 밖의 기호가 달라야 적용할 수 있다.

예제 1-20

논리적 동치법칙을 이용해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$와 $\neg p \wedge \neg q$가 논리적 동치임을 증명하고, 진리표를 이용해 확인하라.

풀이

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	드모르간의 법칙
	$\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$	드모르간의 법칙
	$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$	이중 부정법칙
	$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	분배법칙
	$\equiv \mathrm{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$	부정법칙
	$\equiv (\neg p \wedge \neg q)$	항등법칙

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T

진리표를 보면 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$와 $\neg p \wedge \neg q$의 진릿값이 같음을 알 수 있다.
$\therefore$ 논리적 동치법칙을 통해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$와 $\neg p \wedge \neg q$가 논리적 동치임을 알 수 있다.

예제 1-21

논리적 동치법칙을 이용하여 명제 $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$를 간략히 하라.

풀이

$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$	$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	함축법칙
	$\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q)$	분배법칙
	$\equiv \neg p \vee \mathrm{F}$	부정법칙
	$\equiv \neg p$	항등법칙

예제 1-22

논리적 동치법칙을 이용하여 명제 $\neg p \vee [(p \wedge q) \to q]$가 항진명제임을 증명하라.

풀이

$\neg p \vee [(p \wedge q) \to q] \equiv \neg p \vee [\neg(p \wedge q) \vee q]$ 함축법칙

$\equiv \neg p \vee [(\neg p \vee \neg q) \vee q]$ 드모르간의 법칙
$\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q)$ 결합법칙
$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q)$ 멱등법칙
$\equiv \neg p \vee \mathrm{T}$ 부정법칙
$\equiv \mathrm{T}$ 지배법칙

[표 1-9]의 항등법칙을 살펴보자. $p \wedge \mathrm{T} \equiv p$와 $p \vee \mathrm{F} \equiv p$를 자세히 보면 명제 p를 제외한 나머지를 반대의 형태로 바꿔놓은 것임을 알 수 있다. 다시 말해 $\vee$는 $\wedge$로, $\wedge$는 $\vee$로, T는 F로, F는 T로 바꿔놓았다. 이러한 형태로 변형시킨 논리식을 쌍대라고 부른다.

Section 03

변수를 포함한 명제와 한정자

명제는 참과 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 수식이라고 정의했다. 그렇다면 변수를 포함하는 명제도 있을 수 있지 않을까? 변수에 입력되는 값에 따라 참과 거짓을 판별할 수 있다면 이것 또한 명제라고 할 수 있다. 변수를 포함한 명제의 참, 거짓을 판별하려면 변수의 논의영역을 지정해줘야 하는데, 이를 정의하기 위해서 한정자를 사용한다. 즉 한정자는 변수의 입력 범위를 나타낸다.

아래의 알고리즘(또는 프로그램)에서 변수 a에 입력되는 값이 양수면 if문 내의 실행문이 실행되지만, 변수 a에 입력되는 값이 0이거나 음수면 if문 내의 실행문이 실행되지 않는다. 변수가 포함된 문장도 그 변수 안에 들어가는 값의 범위를 정해주면 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있기 때문에 명제가 될 수 있다. 즉 알고리즘(또는 프로그램) 내에서 a>0가 아무 조건 없이 그냥 주어졌다면 문장에 불과하지만 변수 a에 입력되어 참이 되는 값의 범위를 정해주면 a>0도 명제가 될 수 있다. 여기에서는 변수 a의 범위를 지정해주는 것이 한정자가 된다.

```
algorithm data(){
    int a;
    input a;
    if a > 0 then
        print a;
    endif
}
```

1. 명제함수

변수가 포함된 문장이라도 그 변수의 값이나 범위가 주어지면 충분히 참(T), 거짓(F)을 판별할 수 있으므로 명제가 될 수 있다고 하였다. 이와 같이 변수를 포함하는 문장을 명제함수라 하며, 명제에 포함된 변수가 속하게 될 범위를 논의영역이라고 한다.

정의 1-15 명제함수 (Propositional Function) $P(x)$

논의영역 D에 속하는 변수 x를 포함하여 진릿값을 판별할 수 있는 문장

정의 1-16 논의영역 (Universe of Discourse)

명제에 포함된 변수 x가 속하게 될 범위

예제 1-23

명제함수 $P(x)$가 $x^2-3x=0$ 일 때, $P(1)$과 $P(3)$의 진릿값을 구하라.

풀이

- $P(1)=1^2-3\times1=1-3=-2$ $\quad\therefore$ 거짓
- $P(3)=3^2-3\times3=9-9=0$ $\quad\therefore$ 참

예제 1-24

명제함수 $Q(x,y)$가 $x=2y$ 일 때, $Q(1,2)$와 $Q(2,1)$의 진릿값을 구하라.

풀이

- $Q(1,2)$
  $1=2\times2$
  $1\neq4$
  $\therefore$ 거짓
- $Q(2,1)$
  $2=2\times1$
  $2=2$
  $\therefore$ 참

2 한정자

명제함수의 참, 거짓을 판별하려면 논의영역의 범위를 확실히 정의해야 한다. 이때 사용하는 것이 한정자(Quantifier)다.

정의 1-17 전칭기호 또는 전체한정자(Universal Quantifier) $\forall$

논의영역에 속하는 모든 값을 의미
- 논의영역 U에 속하는 모든 x에 대해 명제 $P(x)$는 참 : $\forall xP(x)$

전체한정자를 갖는 명제함수의 경우 논의영역에 있는 모든 원소가 그 명제를 참(T)으로 만족할 경우에만 명제함수가 참(T)이 된다. 논의영역에 있는 원소 중 하나라도 그 명제를 거짓(F)으로 만든다면 그 명제함수는 거짓(F)이 된다.

예를 들어 논의영역이 정수 영역일 때 명제함수 $P(x)$가 "x는 실수다"고 $\forall xP(x)$로 주어지면, 정수에 속하는 모든 원소는 모두 실수가 되므로 $P(x)$를 참(T)으로 만족한다. 그러므로 $\forall xP(x)$는 참(T)이 된다. 하지만 명제함수 $Q(x)$가 "x는 자연수다"고 $\forall xQ(x)$로 주어지면, 정수에 속하는 원소 중 음의 정수는 자연수가 아니기 때문에 $Q(x)$를 거짓(F)으로 만든다. 따라서 $\forall xQ(x)$는 거짓(F)이 된다. 이처럼 범위가 전체한정자로 주어진 명제함수의 경우, 논의영역의 모든 원소가 명제함수를 참(T)으로 만드는지 판별해야 한다.

정의 1-18 존재기호 또는 존재한정자(Existential Quantifier) $\exists$

논의영역에 속하는 어떤 값을 의미
- 논의영역 U에 속하는 어떤 x에 대해 명제 $P(x)$는 참 : $\exists xP(x)$

존재한정자를 갖는 명제함수의 경우 논의영역에 있는 원소 중 하나라도 명제를 참(T)으로 만족하면, 그 명제함수는 참(T)이 된다. 그러나 논의영역에 있는 모든 원소가 그 명제를 거짓(F)으로 만든다면 그 명제함수는 거짓(F)이 된다.

예를 들어 논의영역이 정수 영역일 때 명제함수 $P(x)$가 "x는 자연수다"고 $\exists xP(x)$로 주어진다면, 정수에 속하는 원소 중 양의 정수에 대해서는 $P(x)$가 참(T)이 된다. 그러므로 $\exists xP(x)$는 참(T)이 된다. 하지만 논의영역이 0이나 음의 정수일 때 명제함수 $P(x)$가 "x는 자연수다"고

$\exists xP(x)$로 주어진다면, 논의영역에 속하는 모든 원소는 자연수가 아니므로 $P(x)$를 거짓(F)으로 만든다. 그러므로 $\exists xP(x)$는 거짓(F)이 된다. 이처럼 범위가 존재한정자로 주어지는 명제함수의 경우 논의영역의 원소 중 명제함수를 참(T)으로 만드는 원소가 하나라도 있는지 판별해야 한다.

예제 1-25

다음 표현을 문장으로 서술하라.

(1) $\neg(\forall xP(x))$ (2) $\exists x(\neg P(x))$ (3) $\exists x(\forall yP(x,y))$ (4) $\forall x\forall yP(x,y)$

풀이

(1) $\neg(\forall xP(x))$: 모든 x가 $P(x)$를 만족하지는 않는다.

(2) $\exists x(\neg P(x))$: $P(x)$가 성립하지 않는 어떤 x가 존재한다.

(3) $\exists x(\forall yP(x,y))$: 모든 y에 대해 $P(x,y)$를 만족하는 어떤 x가 존재한다.

(4) $\forall x\forall yP(x,y)$: 모든 x에 대해 모든 y가 $P(x, y)$를 만족한다.

예제 1-26

논의영역 D가 $D=\{x|0<x\le 4, x$ 는 양의 정수$\}$고, 명제 $P(x)$가 $x^2<10$일 때 다음 진릿값을 구하라.

(1) $\forall xP(x)$ (2) $\exists xP(x)$

풀이

논의영역 $D=\{1,2,3,4\}$

(1) $\forall xP(x)$가 참이 되려면 논의영역 D에 포함되는 모든 원소에 대해 $P(x)$가 참이어야 한다. 즉 $P(1), P(2), P(3), P(4)$가 모두 참이어야 명제 $\forall xP(x)$가 참이 된다. $P(1)=1<10$, $P(2)=2^2=4<10$, $P(3)=3^2=9<10$ 으로 참이지만, $P(4)=4^2=16<10$ 으로 거짓이다. 그러므로 $\forall xP(x)$는 거짓이다.

(2) $\exists xP(x)$가 참이 되려면 논의영역 D에 포함되는 원소들 중 하나라도 참이 되면 된다. $P(1)=1<10$, $P(2)=2^2=4<10$, $P(3)=3^2=9<10$ 으로 세 개의 원소가 참이다. 그러므로 비록 $P(4)=4^2=16<10$ 으로 거짓이라고 해도 $\exists xP(x)$는 참이 된다.

예제 1-27

실수 x, y에 대하여 명제함수 $P(x,y)$가 $x^2 < y^2$일 때 다음 명제의 진릿값을 구하라.

(1) $\forall x \forall y P(x,y)$ (2) $\exists x \exists y P(x,y)$ (3) $\forall x \exists y P(x,y)$ (4) $\exists x \forall y P(x,y)$

풀이

(1) 모든 x에 대해 모든 y가 $P(x,y)$를 만족해야 $\forall x \forall y P(x,y)$가 참이 된다. 그러나 $|x| \geq |y|$ 인 경우, $x=4, y=1$ 과 같은 경우는 성립하지 않으므로 $\forall x \forall y P(x,y)$는 거짓이다.

(2) 어떤 x에 대해 $P(x,y)$를 만족하는 어떤 y가 있으면 $\exists x \exists y P(x,y)$는 참이 된다. $|x| < |y|$ 인 경우라면, 언제든 $P(x,y)$가 성립하므로 $\exists x \exists y P(x,y)$는 참이다.

(3) 모든 x가 $P(x,y)$를 만족하는 y가 한 개라도 있으면, $\forall x \exists y P(x,y)$는 참이 된다. 모든 x는 $|x| < |y|$인 y가 최소 한 개는 있기 때문에 $\forall x \exists y P(x,y)$는 참이다.

(4) 모든 y에 대해 $P(x,y)$를 만족하는 x가 하나라도 존재하면 $\exists x \forall y P(x,y)$는 참이 된다. 그러나 $|x| < |y|$인 경우에만 $P(x,y)$를 만족하므로 모든 y에 대해 만족하는 x가 존재할 수 없다. 그러므로 $\exists x \forall y P(x,y)$는 거짓이다.

Section

04 논리

1. 논리와 추론

사람들은 어떠한 증명을 하거나 주장을 펼칠 때 논리에 맞춰 풀어나간다. 그리고 논리를 풀어갈 때는 참(T)이라고 인정되는 명제들을 나열하여 자신이 주장하는 결론을 유도해간다. 이렇게 논리를 풀어가는 과정을 추론이라고 한다.

정의 1-19 추론 (Inference)

어떤 명제가 참인 것을 근거로 하여 다른 명제가 참임을 유도하는 방식

정의 1-20 가정 또는 전제 (Hypothesis), **결론** (Conclusion)

근거가 되는 명제가 가정 또는 전제가 되고, 유도되는 명제가 결론이 됨

여기서는 정당한 추론이 무엇인지 알아보고, 정당한 추론을 하기 위해 필요한 논리적 추론 규칙을 살펴보자.

2. 정당한 추론(유효추론)

추론은 하나 이상의 전제와 하나의 결론으로 구성되는데, 전제는 항상 참(T)이라고 가정한다. 다음과 같은 추론이 있다고 하자.

영희가 학생이면 학교에 간다.
학생들은 학교에서 공부를 한다.
영희는 학생이다.
∴ 영희는 학교에서 공부를 한다.

위의 전제 중 하나라도 거짓(F)이 있다면 우리는 결론을 유도할 수 없다. 주어진 전제가 모두 참(T)이기 때문에 그에 맞는 결론을 유도할 수 있는 것이다. 유도된 결론이 참(T)이라면 그 추론은 정확하다고 판단할 수 있다.

이와 같이 주어진 전제에 의해 유도된 결론이 참(T)이면 그 추론을 정당한 추론 또는 유효추론이라고 하고, 거짓(F)이면 그 추론을 부당한 추론 혹은 허위추론이라고 한다. 정당한 추론과 부당한 추론을 판별하기 위해서 모든 전제는 참(T)라는 것을 반드시 기억해야 한다. 다음과 같은 추론을 보자.

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.
태양이 뜨겁다.
∴ 달의 그늘진 곳은 차갑다.

위의 추론에서 명제 p를 "태양이 뜨겁다", 명제 q를 "달의 그늘진 곳은 차갑다"로 두고 추론을 기호로 표기해보았다. [표 1-10]은 추론에 사용된 명제의 진릿값을 알아보기 위해 작성한 진리표다.

$p \rightarrow q$
p
$\therefore\ q$

[표 1-10] 유효추론 예

전제	결론	전제
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

전제는 항상 참(T)이라고 했으므로 주어진 전제 $p \rightarrow q$와 p가 모두 참(T)인 경우는 위 진리표에서 사각형이 그려진 부분만이다. 그 외의 경우는 $p \rightarrow q$나 p, 둘 중 하나만 참(T)인 경우이므로 추론에 사용될 수 없다. 사각형이 표시된 부분에서 결론인 q의 진릿값 역시 참(T)이므로 이 추론은 정당한 추론, 유효추론이 된다. 그렇다면 다음 추론을 한번 살펴보자.

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.
달의 그늘진 곳은 차갑다.
∴ 태양은 뜨겁다.

위 추론에서 명제 p를 "태양이 뜨겁다", 명제 q를 "달의 그늘진 곳은 차갑다"로 두고 위의 추론을 기호로 표기했다. [표 1-11]은 위 추론에 사용된 명제의 진릿값을 알아보기 위해 작성한 진리표다.

$p \rightarrow q$

q

$\therefore\ p$

[표 1-11] 허위추론 예

결론	전제	전제	
p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	①
T	F	F	
F	T	T	②
F	F	T	

전제는 항상 참(T)이라고 했으므로 주어진 전제 $p \rightarrow q$와 q가 모두 참(T)인 경우는 사각형이 그려진 부분이 된다. 그 외의 경우는 $p \rightarrow q$와 q, 둘 중 하나만 참(T)인 경우므로 추론에 사용될 수 없다. 사각형 안에서 결론인 p의 진릿값을 확인해보자. ①의 경우 p의 진릿값은 참(T)이다. 그러나 ②의 경우 p의 진릿값은 거짓(F)이다. 이와 같이 전제($p \rightarrow q$와 q)가 모두 참일 때 결론(p)이 거짓(F)인 경우가 하나라도 있으면, 이 추론은 부당한 추론, 허위추론이 된다.

예제 1-28

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

(1) $p \vee (q \vee r)$

$\neg r$

$\therefore\ p \vee q$

(2) $p \rightarrow q \vee \neg r$

$q \rightarrow p \wedge r$

$\therefore\ p \rightarrow r$

풀이

(1)

p	q	r	$q \vee r$	전제		결론
				$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때 결론에 해당되는 명제 역시 모두 참이므로, 이 추론은 정당하다.

(2)

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	전제		결론
						$p \to q \vee \neg r$	$q \to p \wedge r$	$p \to r$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때 결론에 해당되는 명제의 진릿값이 거짓인 경우가 있으므로 이 추론은 정당하지 않다.

3. 논리적 추론법칙

여러 가지 추론 방법 중 항상 정당하다고 판단되는 추론식은 [표 1-12]와 같이 규칙으로 정리할 수 있다. 이렇게 정리된 추론법칙은 항상 유효추론(전제가 모두 참(T)일 때, 결론도 참(T))이기 때문에 추론법칙을 항진명제의 형태로 표현할 수도 있다. 즉 추론에서의 전제를 함축명제의 조건으로, 추론에서의 결론을 함축명제의 결론으로 표현하면 항진명제가 될 수 있는 것이다. 특히 모든 전제는 항상 참(T)이기 때문에 전제가 여러 개 있는 경우 논리곱으로 결합해 하나의 조건으로 만들 수 있다. 예를 들어 [표 1-12]에서 긍정논법의 경우 전제가 $p \to q$와 p, 두 개가 있는데 둘 다 참(T)이므로 논리곱으로 결합한 $(p \to q) \wedge p$도 참(T)이 된다. 이러한 원리로 표현된 것이 [표 1-12]의 항진명제 열이다.

논리적 추론법칙은 항상 정당하기 때문에 어떠한 전제가 주어졌을 때 결론을 유도해내는 과정에 사용할 수 있다.

[표 1-12] 논리적 추론법칙

법칙 이름	추론법칙	항진명제
논리곱 (Conjunction)	p q $\therefore p \wedge q$	없음
선언적 부가 (Disjunctive Addition)	p $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$

법칙 이름	추론법칙	항진명제
단순화 (Simplication)	$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
긍정논법 (Modus Ponens)	p $p \rightarrow q$ $\therefore q$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
부정논법 (Modus Tollens)	$\neg q$ $p \rightarrow q$ $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$
선언적 삼단논법 또는 소거 (Disjunctive Syllogism)	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
가설적 삼단논법 또는 추이 (Hypothetical Syllogism)	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

예제 1-29

추론법칙을 이용해 정당한 추론이 되도록 빈칸을 채워라.

(1) 긍정논법
영수가 수학을 공부하면, 희영이는 영어를 공부한다.
영수가 수학을 공부한다.
∴ ______________________

(2) 부정논법
고양이가 강아지를 이기면, 강아지는 개구리를 이긴다.
강아지는 개구리를 이기지 못한다.
∴ ______________________

(3) 가설적 삼단논법 또는 추이
톰이 야구를 하면, 존은 축구를 한다.
____
∴ 톰이 야구를 하면, 그렉은 수영을 한다.

(4) 선언적 삼단논법 또는 소거
____
데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다.
∴ 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다.

풀이

(1) p : 영수는 수학을 공부한다. q : 희영이는 영어를 공부한다.
전제는 $p \rightarrow q$와 q로 표현될 수 있다.

긍정논법이므로 결론은 q다. 그러므로 "희영이는 영어를 공부한다"가 답이 된다.

(2) p : 고양이가 강아지를 이긴다. q : 강아지는 개구리를 이긴다.
전제는 $p \rightarrow q$와 $\neg q$로 표현될 수 있다.
부정논법이므로 결론은 $\neg p$다. 그러므로 "고양이가 강아지를 이기지 못한다"가 답이 된다.

(3) p : 톰이 야구를 한다. q : 존은 축구를 한다. r : 그렉은 수영을 한다.
전제는 $p \rightarrow q$로 표현될 수 있고, 가설적 삼단논법에 의해 나온 결론은 $p \rightarrow r$로 표현될 수 있다. 전제 $p \rightarrow q$와 가설적 삼단논법에 의해 $p \rightarrow r$가 나오려면 $q \rightarrow r$가 필요함을 알 수 있다.

p : 톰이 야구를 하면	$\Rightarrow$	q : 존은 축구를 한다.
q : 존이 축구를 하면	$\Rightarrow$	r : 그렉은 수영을 한다.
p : 톰이 야구를 하면	$\Rightarrow$	r : 그렉은 수영을 한다.

그러므로 "존이 축구를 하면, 그렉은 수영을 한다"가 답이 된다.

(4) p : 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다. q : 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다.
선언적 삼단논법을 위해 주어진 전제 중 하나가 "데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다"므로 $\neg q$다. 전제 $\neg q$와 선언적 삼단논법에 의해 결론이 p가 나오기 위해서는 $p \vee q$가 필요함을 알 수 있다. 그러므로 전제 $p \vee q$는 "수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측하거나 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다"가 된다.

예제 1-30

논리적 추론법칙을 이용해 다음 추론의 결론이 참인지 판별하라.

A : $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$

B : $\neg r \rightarrow \neg s$

C : s

$\therefore\ q$

풀이

- 전제 A와 B에 대해 가설적 삼단논법에 의해 D : $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg s$
- 전제 D와 C에 대해 부정논법에 의해 E : $\neg(\neg p \vee \neg q)$
- 전제 E에 대해 드모르간의 법칙에 의해 F : $p \wedge q$
- 전제 F에 대해 단순화 법칙에 의해 q가 유도된다.

$\therefore$ 이 추론은 전제가 참이면 결론도 항상 참이 된다.

예제 1-31

다음과 같이 전제로 주어진 명제가 항상 참이라고 할 때, 열쇠가 어디에 있는지 찾아라.
(a) 열쇠가 서랍에 있었다면, 출근할 때 열쇠를 보았다.
(b) 내가 아침을 먹었다면, 열쇠는 서랍에 있다.
(c) 나는 샤워를 했거나 아침을 먹었다.
(d) 내가 샤워를 했다면, 열쇠는 가방 속에 있다.
(e) 내가 출근할 때, 나는 열쇠를 보지 못했다.

풀이

우선 위에 주어진 명제를 이용에 명제를 단순화한다.
p : 열쇠는 서랍에 있다. q : 출근할 때 열쇠를 보았다.
r : 샤워를 했다. s : 아침을 먹었다.
t : 열쇠는 가방 속에 있다.
문제에 주어진 명제들을 기호로 표현해보면 다음과 같다.
(a) $p \to q$ (b) $s \to p$ (c) $r \vee s$ (d) $r \to t$ (e) $\neg q$

- (a) $p \to q$와 (e) $\neg q$에 대해 부정논법에 의해 (f) $\neg p$
- (b) $s \to p$와 (f) $\neg p$에 대해 부정논법에 의해 (g) $\neg s$
- (c) $r \vee s$와 (g) $\neg s$에 대해 선언적 삼단논법(소거)에 의해 (h) r
- (d) $r \to t$와 (h) r에 대해 긍정논법에 의해 t

$\therefore$ 열쇠는 가방 속에 있다.

요약

1 명제(Proposition)

참(True, T, 1)이나 거짓(False, F, 0)으로 구분할 수 있는 문장이나 수식이다.

2 논리 연산자(Logical Operation)의 종류

(1) 부정(Negation : NOT : $\neg p$ 또는 $\sim p$) : 명제 p에 대해 p가 참(T)이면 $\neg p$ 또는 $\sim p$는 거짓(F)이 되고, p가 거짓(F)이면 $\neg p$ 또는 $\sim p$는 참(T)이 된다.

(2) 논리곱(Conjunction : AND : $p \wedge q$) : 명제 p, q에 대해 p, q의 진릿값이 모두 참(T)이면 $p \wedge q$는 참(T)이 되고, 그 외의 경우에는 거짓(F)이 된다.

(3) 논리합(Disjunction : OR : $p \vee q$) : 명제 p, q에 대해 p, q의 진릿값 중 하나라도 참(T)이면 $p \vee q$는 참(T)이 되고, p와 q의 진릿값이 모두 거짓(F)이면 $p \vee q$는 거짓(F)이 된다.

(4) 배타적 논리합(Exclusive OR : XOR : $p \oplus q$) : 명제 p, q에 대해 p, q의 진릿값 중 하나만 참(T)이면 $p \oplus q$는 참(T)이 되고, p와 q의 진릿값이 모두 참(T)이거나 모두 거짓(F)이면 $p \oplus q$는 거짓(F)이 된다.

3 합성명제(Compound Proposition)

AND, OR, NOT과 같은 논리 연산자에 의해 하나 이상의 명제들이 결합되어 만들어진 명제다.

4 명제의 종류

(1) 항진명제(Tautology : T) : 합성명제를 구성하는 명제의 진릿값에 상관없이 진릿값이 항상 참(T)인 명제다.

(2) 모순명제(Contradiction : F) : 합성명제를 구성하는 명제의 진릿값에 상관없이 진릿값이 항상 거짓(F)인 명제다.

(3) 사건명제(Contingency) : 항진명제도 모순명제도 아닌 명제다.

5 함축(Implication : $p \rightarrow q$)

명제 p가 조건 또는 원인이 되고, 명제 q가 결론 또는 결과로 제시되는 명제로, "p는 q를 함축한다" 또는 "p면 q다"라고 읽는다. 명제 p가 참(T)이고 명제 q가 거짓(F)일 때만 $p \rightarrow q$는 거짓(F)이 되고, 그 외의 경우에는 모두 참(T)이 된다.

6 함축명제의 역, 이, 대우

(1) 역(Converse) : 명제 $p \rightarrow q$에 대해 $q \rightarrow p$가 되고, 진릿값은 함축 $p \rightarrow q$의 진릿값과 반대다.

(2) 이(Inverse) : 명제 $p \rightarrow q$에 대해 $\neg p \rightarrow \neg q$가 되고, 진릿값은 함축 $p \rightarrow q$의 진릿값과 반대다.

(3) 대우(Contraposition) : 명제 $p \rightarrow q$에 대해 $\neg q \rightarrow \neg p$가 되고, 진릿값은 함축 $p \rightarrow q$의 진릿값과 같다.

요약/연습문제

7 논리적 동치(Logical Equivalence : $p \equiv q$)

합성명제 p와 q의 진릿값이 서로 같은 경우다.

8 명제함수(Propositional Function : $P(x)$)

논의영역 D에 속하는 변수 x를 포함하여 진릿값을 판별할 수 있는 문장이다.

9 한정자(Quantifier)

(1) 전칭기호 또는 전체한정자(Universal Quantifier : $\forall$)
- $\forall xP(x)$: 논의영역 U에 속하는 모든 x에 대해 명제 $P(x)$는 참(T)이다.

(2) 존재기호 또는 존재한정자(Existential Quantifier : $\exists$)
- $\exists xP(x)$: 논의영역 U에 속하는 어떤 x에 대해 명제 $P(x)$는 참(T)이다.

10 논리적 추론(Inference)

근거되는 명제인 가정(Hypothesis)이 참(T)인 것을 근거로, 결론(Conclusion)이 참(T)임을 유도하는 과정이다.

[연습문제]

1 다음 문장이 명제인지 판별하라. 명제라면 그 진릿값을 구하고, 명제가 아니라면 그 이유를 설명하라.

(1) 지금 날씨가 어떻습니까?
(2) 4는 소수(prime number)다.
(3) 대한민국은 살기 좋은 나라입니다.
(4) $x^2 - 3 = 6$
(5) 7은 홀수다.
(6) 런던은 영국의 수도다.

2 명제 p, q, r이 다음과 같을 때 주어진 문장을 합성명제의 형태로 나타내고 진릿값을 구하라.

p : $3+8 \le 11$
q : $100 \times 4 = 3800$
r : 계란 한 판$>$ 30

(1) $100 \times 4 \neq 3800$

(2) $100 \times 4 = 3800$ 이거나 $3+8 \leq 11$
(3) $3+8 > 11$이고, 계란 한 판 > 30
(4) 계란 한 판 > 30 이거나 $100 \times 4 = 3800$
(5) $3+8 \leq 11$이고, $100 \times 4 \neq 3800$

3 다음 합성명제의 진리표를 구하고, 이들 중 항진명제와 모순명제를 찾아라.
(1) $\neg(\neg p \wedge q)$
(2) $(p \oplus q) \rightarrow (p \vee \neg q)$
(3) $p \wedge q \rightarrow p$
(4) $\neg((p \wedge (\neg q)) \rightarrow \neg q)$

4 명제 p, q가 다음과 같을 때 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$에 대한 역, 이, 대우 문장을 구하고 진릿값을 구하라.

p : 부산은 대한민국의 수도다.
q : 워싱턴 DC는 미국의 수도다.

5 진리표를 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.
(1) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$
(2) $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

6 논리적 동치법칙을 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.
(1) $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p$
(2) $\{p \wedge [\neg(\neg p \vee q)]\} \vee (p \wedge q) \equiv p$
(3) $\{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)\} \rightarrow (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$

7 $X = \{x \mid x \in Z\}$, $Y = \{y \mid y \in N\}$일 때, $P(x, y) = x^2 - y^2 > 0$에 대해 다음 명제의 진릿값을 구하라.
(1) $\forall x \forall y P(x, y)$
(2) $\forall x \exists y P(x, y)$
(3) $\exists x \forall y P(x, y)$
(4) $\exists x \exists y P(x, y)$

8 선물 포장을 위한 재료로 갈색 둥근 상자 7개, 검은색 둥근 상자 2개, 회색 사각 상자 6개, 검은색 사각 상자 10개, 파란색 포장지 5장, 노란색 포장지 6장, 검은색 포장지 1장을 샀다. 다음 명제의 진릿값을 구하라.
(1) 빨간색 재료가 있다.
(2) 모든 재료는 상자거나 포장지다.
(3) 모든 재료는 갈색이거나 회색이거나 검은색이다.
(4) 둥근 상자도 아니고 사각 상자도 아닌 재료가 있다.

(5) 파란색 재료는 없다.
(6) 둥근 상자와 사각 상자와 포장지의 색 중 공통된 색이 있다.

9 $X=\{x|x$는 모든 종목의 운동$\}$에 대한 명제가 다음과 같다. 다음 문장을 기호로 표기하고 진릿값을 구하라.

$p(x)$: x를 주 종목으로 하는 선수는 키가 크다.
$q(x)$: x는 동계 올림픽 종목이다.

(1) 모든 운동 종목의 선수들은 키가 크다.
(2) 어떤 운동 종목은 동계 올림픽 종목이다.
(3) 모든 키 큰 운동선수들은 동계 올림픽을 주 종목으로 한다.
(4) 어떤 선수들은 동계 올림픽 종목을 주 종목으로 하는 키가 큰 선수들이다.

10 다음 논증식이 정당한지 판별하라.

(1) $p \rightarrow q$
$q \rightarrow p$
$\therefore p \vee q$

(2) $p \wedge q \rightarrow \neg r$
$p \vee q$
$\neg q \rightarrow p$
$\therefore p$

11 다음 전제를 보고 결론을 유도하라.

(1) $\neg p \vee q \rightarrow r$
$s \vee \neg q$
$\neg t$
$p \rightarrow t$
$\neg p \wedge r \rightarrow \neg s$

(2) $p \vee q$
$q \rightarrow r$
$p \wedge s \rightarrow t$
$\neg r$
$\neg q \rightarrow u \wedge s$

12 다음 명제를 참이라 가정하고 보물의 위치를 찾아라.

(a) 집이 단독주택이면 보물은 침실에 있지 않다.
(b) 거실에 난초가 있으면 보물은 침실에 있다.
(c) 집은 단독주택이다.
(d) 거실에 난초가 있거나 보물은 주방에 있다.
(e) 화장실에 비누가 있으면 보물은 창고에 있다.